চ্চমাধ্যমিক

ণিত

অধ্যাপক এন. ভঞ্জ
অধ্যাপক এইচ. কে. গাঙ্গুলী



কার এ্যাণ্ড কোং
লিকাতা-৭৩

প

নরেন্দ্রপু

পশ্চিমবঙ্গ উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা সংসদ কর্তৃক ১৯৭৬ সাল হইতে প্রবর্তিত
একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর পাঠ্যসূচী অনুসরণে লিখিত।

উচ্চ মাধ্যমিক গণিত

● কলন শাস্ত্র ও বলবিদ্যা ●

[একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর পাঠ্য]

(দ্বিতীয় পত্র)

অধ্যাপক এন, ভঞ্জ, এম. এ., ডি. ফিল.
নরেন্দ্রপুর রামকৃষ্ণ মিশন আবাসিক মহাবিদ্যালয়ের গণিতের অধ্যাপক। স্নাতক শ্রেণীর "অ্যানালিসিস্" ও "জ্যোতির্বিজ্ঞান" এবং নূতন পাঠ্যসূচী অনুযায়ী একাদশ শ্রেণীর "বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতি" এবং সপ্তম, অষ্টম, নবম ও দশম শ্রেণীর বীজগণিত, পাটীগণিত, জ্যামিতি ও পরিমিতি প্রভৃতি গ্রন্থ প্রণেতা এবং কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের পরীক্ষক।

ও

অধ্যাপক এইচ, কে, গাঙ্গুলী, এম. এ. (গোল্ড মেডেলিষ্ট)
স্কটিশচার্চ কলেজের গণিত বিভাগের ভূতপূর্ব প্রধান অধ্যাপক; বর্তমানে নরেন্দ্রপুর রামকৃষ্ণ মিশন আবাসিক মহাবিদ্যালয়ের গণিত বিভাগের অধ্যাপক এবং নূতন পাঠ্যসূচী অনুযায়ী একাদশ শ্রেণীর "বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতি" গ্রন্থ প্রণেতা এবং কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের পরীক্ষক।

বি. সরকার এ্যাণ্ড কোম্পানী
পুস্তক প্রকাশক ও বিক্রেতা
15 কলেজ স্কোয়ার, কলিকাতা-700073.

প্রকাশক :
শ্রীভারতচন্দ্র সরকার
বি. সরকার এ্যাণ্ড কোং
15, কলেজ স্কোয়ার
কলিকাতা-700073

প্রথম প্রকাশ : ফেব্রুয়ারী, 1978

মূল্য : বাইশ টাকা মাত্র।

মুদ্রাকর :
শ্রীদুর্গাদাস পাণ্ডা
দেবাশীষ প্রেস
71, কৈলাস বোস ষ্ট্রীট
কলিকাতা-700006.

ভূমিকা

পশ্চিমবঙ্গ উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা সংসদ কর্তৃক নির্ধারিত পাঠ্যসূচী অনুযায়ী একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য এই পুস্তকখানি সম্পূর্ণ নূতন ভাবে লিখিত। বাংলাভাষায় বিশেষ করিয়া গণিতশাস্ত্রের পাঠ্যপুস্তক রচনা করা যে অতি দুরূহ কাজ সে বিষয়ে কোনও সন্দেহ নাই। ইহার প্রধান কারণ, বাংলাভাষায় বিভিন্ন ইংরেজী শব্দের পরিভাষার অত্যন্ত অভাব। যেখানে যেখানে বাংলা প্রতিশব্দ দেওয়া সম্ভব হয় নাই, সেই সমস্ত স্থানে ইংরেজী শব্দটিকে যথাযথ ভাবে রাখিয়াছি। এই সমস্ত অসুবিধা সত্ত্বেও সরল ভাষায় এবং বিভিন্ন উদাহরণের মাধ্যমে এই কঠিনতম বিষয়টিকে সহজভাবে বুঝাইয়া লিখিবার যথাসাধ্য চেষ্টা করিয়াছি। পুস্তকখানি যাহাতে একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর ছাত্র-ছাত্রীদের ঠিক ঠিক উপযুক্ত হয় সেই দিকে লক্ষ্য রাখিবার জন্য C. U. (Pass), W. B. H. S., প্রভৃতি বিভিন্ন পরীক্ষার পূর্বতন প্রশ্নগুলির প্রতি দৃষ্টি রাখিয়া এই পুস্তকখানি রচনা করিয়াছি এবং বিভিন্ন প্রশ্নমালাতে ঐজাতীয় কিছু কিছু প্রশ্ন রাখিয়াছি।

পুরানো ধাঁচে পুস্তক লিখিতে অগ্রসর না লইয়া, পৃথিবীর বিভিন্ন দেশের আধুনিক শিক্ষা পদ্ধতির সঙ্গে সামঞ্জস্য রাখিবার উদ্দেশ্যে সম্পূর্ণ নূতনভাবে এই পুস্তকখানি রচনায় প্রয়াস পাইয়াছি। সেইজন্য, অন্যান্য প্রচলিত পুরানো পুস্তক হইতে এই পুস্তকের মধ্যে বেশ কিছু নূতন বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হইবে। যেমন, প্রতিটি অধ্যায়ের সূচনায় বিষয়বস্তুর পাঠের উদ্দেশ্য উপস্থাপনায় দেওয়া হইয়াছে; প্রয়োজনবোধে চিত্রের মাধ্যমে সহজভাবে বিষয়বস্তু বুঝানো হইয়াছে।

তাহা ছাড়া, প্রতিটি প্রশ্নামালাতে যথেষ্ট সংখ্যক নানাধরণের প্রশ্ন সহজতর হইতে কঠিনতর এই ক্রমে সাজানো আছে। এই জাতীয় বিভিন্ন অঙ্কগুলি হইতে, অথবা, এই জাতীয় প্রশ্ন অতি অবশ্যই শেষ পরীক্ষায় আসিবে। পরিশেষে উল্লেখ করা যাইতে পারে, এই পুস্তকের প্রশ্নমালার অঙ্কগুলি কষিয়া সমাধানগুলি একটি পুস্তক আকারে বাহির হইয়াছে। তাহার সাহায্যে বিভিন্ন ধরণের অঙ্ক কষিবার পদ্ধতি ও নিয়ম জানা যাইবে।

কলিকাতাস্থ নেতাজী নগর কলেজের গণিত বিভাগের অধ্যাপক শঙ্কর কুমার দে এবং অধ্যাপক অমিতাভ ব্যানার্জী এই পুস্তক রচনার সময় হইতেই আমাদের সাহায্য করায় তাহাদের আমরা কৃতজ্ঞতা জানাই।

বিশেষ সতর্কতা সত্ত্বেও পুস্তকখানিতে কোন ত্রুটি পরিলক্ষিত হইলে, তাহা সংশোধনের উদ্দেশ্যে সকল প্রকার উপদেশ ও পরামর্শ সাদরে গৃহীত হইবে।

বিনীত—
গ্রন্থকারদ্বয়

SYLLABUS

Paper-II (Marks—100)

Elements of Calculus and Mechanics

Elements of Differential Calculus(:—(30 Marks)

Rational numbers. Real numbers and their geometrical representation. Functions of a single variable including trigonometrical functions. Limit and continuity (geometrical and intuitive approach). Inverse functions. Standard limits, such as :

$$\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin x}{x},\ \underset{x\to 0}{Lt}\frac{e^x-1}{x},\ \underset{x\to 0}{Lt}\frac{\log(1+x)}{x}$$; (proofs not required).

Fundamental limit theorems (statement only). Differential co-efficient of a function and its significances. Rules of differentiation of sum, product and quotient of two functions. Rule of differentiation of function of a function (proof not required). Differential co-efficients of x^n (n rational), $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\log x$ from first principles. Second order derivative of a function.

Integral Calculus and Differential Equations :—(30 Marks)

Indefinite integrals. Standard forms. Integration by simple substitution. Integration by parts in simple cases. Definite integral as the limit of a sum and as an area. Fndamental theorem, connecting primitive with definite integral (proof not required). Determination of areas in simple cases.

Solution of first order differential equations by separation method. *Solution of linear second order differential equations with constant co-efficients of the from : $\frac{d^2y}{dx^2}+P_1\frac{dy}{dx}+P_2y=0$.

Elements of Mechanics :—(40 Marks) [Revised Syllabus]

Resultant of any two velocities and of any two accelerations of a particle. Relative velocity. Expressions for velocity and acceleration of a prticle in Cartesian co-ordinates. Newton's laws of motion ; Equation of motion. Motion of a particle in a straight line. Simple Harmonic motion. Vertical motion under gravity. Motion of a projectile under constant gravity neglecting air-resistance.

Resultant of two concurrent forces, two like parallel forces, two unlike parallel forces ; couples. Centre of gravity of a uniform plane lamina :— Simple cases. Resultant of three or more concurrent forces in a plane, conditions of equilibrium.

---

*[*In the revised syllabus the following portion is deleted :—*

Solution of linear second order differential equations with constant co-efficients of the form : $\frac{d^2y}{dx^2}+P_1\frac{dy}{dx}+P_2y=0$].

সূচীপত্র

কলনবিদ্যা (Calculus)

অন্তরকলন

সমাকলন

বলবিদ্যা (Mechanics)

গতিবিদ্যা

স্থিতিবিদ্যা

Important Results and Formulae

Differential Calculus

1. Important limits :

(i) $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$; (ii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

(iii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$; (iv) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1}{x} \log_e (1+x) = 1$;

(v) $\underset{x \to 0}{Lt} (1+x)^{1/x} = e.$

2. Standard derivatives :

(a) $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$; $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

$\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$; $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$;

$\dfrac{d}{dx}(\log_e x) = \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x} \log_a e.$

(b) $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$; $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$;

$\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$; $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$;

$\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$; $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$;

(c) $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$;

$\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(d) $\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$; $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$;

$\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$; $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{cosech}^2 x.$

3. Formulae for derivatives :

(i) $\frac{d}{dx}(k)=0$, (k=constant) ; (ii) $\frac{d}{dx}(ku)=k\frac{du}{dx}$;

(iii) $\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$; (iv) $\frac{d}{dx}(u-v)=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$;

(v) $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$; (vi) $\frac{d}{dx}(u/v)=\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\Big/v^2$

$=(uv)\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx}+\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}\right)$. $=\left(\frac{u}{v}\right)\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx}-\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}\right)$.

Integral Calculus

4. Fundamental Integrals :

(i) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n\neq-1)$; (ii) $\int\frac{dx}{x}=\log|x|$;

(iii) $\int e^x dx=e^x$; (iv) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\log_e a},\ (a>0)$;

(v) $\int \sin x\,dx=-\cos x$; (vi) $\int \cos x\,dx=\sin x$;

(vii) $\int \sec^2 x\,dx=\tan x$; (viii) $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\cot x$;

(ix) $\int \tan x=\log\sec x$; (x) $\int \cot x=\log\sin x$;

(xi) $\int \sec x\,dx=\log(\sec x+\tan x)=\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$;

(xii) $\int \operatorname{cosec} x\,dx=\log(\operatorname{cosec} x-\cot x)=\log\tan\frac{x}{2}$.

5. Standard Integrals :

(i) $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$.

(ii) $\int(uv)\,dx=u\int v\,dx-\int\left\{\frac{du}{dx}\int v dx\right\}dx$.

(iii) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$.

(iv) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log_e\frac{x-a}{x+a}$; $(x^2>a^2)$.

(v) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \log_e \frac{a+x}{a-x}$; $(x^2<a^2)$.

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\ (x+\sqrt{x^2+a^2})$ or, $\sinh^{-1} \frac{x}{a}$.

(vii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log \left| (x+\sqrt{x^2-a^2}) \right|$ or, $\cosh^{-1} \frac{x}{a}$.

(viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a}$.

(ix) $\int \sqrt{x^2+a^2}\ dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \log\ (x+\sqrt{x^2+a^2})$

or, $= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sinh^{-1} \frac{x}{a}$.

(x) $\int \sqrt{x^2-a^2}\ dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \log \left| (x+\sqrt{x^2-a^2}) \right|$

or, $= \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \cosh^{-1} \frac{x}{a}$.

(xi) $\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}$.

6. $\int_a^b \phi'(x)\, dx = \Big[\phi(x)\Big]_a^b = \phi\ (b) - \phi(a)$.

7. (i) $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{r=1}^{n} f\ (a+rh)$; $(b>a)$, $b-a=nh$.

(ii) $\underset{n\to\infty}{Lt} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \int_0^1 f\ (x)\ dx$.

8. $\int_a^b f\ (x)\, dx = \int_a^c f\ (x)\ dx + \int_c^b f\ (x)\ dx$, $(a<c<b)$.

9. Area : (i) $S = \int_a^b y\ dx$; (ii) $S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 d\theta$.

10. (i) For $\frac{dy}{dx} = f\ (y/x)$; Put $y = xv$;

(ii) For $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, Solution : $ye^{\int P dx} = \int \left\{ Qe^{\int P dx} \right\} dx + c$.

Important Results and Formulae

Dynamics :

1. Resultant of two concurrent velocities :

$$V=\sqrt{(u^2+v^2+2uv\cos\alpha)}$$

$$\tan\theta=\frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}.$$

2. Rectilinear motion with uniform acceleration :

$$v=u+ft\ ;\quad s=ut+\tfrac{1}{2}ft^2\ ;$$

$$v^2=u^2+2fs\ ;\quad s_t=u+\tfrac{1}{2}f(2t-1).$$

3. Average velocity : $\overline{V}=\frac{1}{2}(u+v)=u+\frac{1}{2}ft.$

4. Equation of motion : $P=mf.$

5. Projectile :

(i) Greatest height : $H=\dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$;

(ii) Time of flight : $T=\dfrac{2u\sin\alpha}{g}$;

(iii) Horizontal Range : $R=\dfrac{u^2\sin 2\alpha}{g}$;

Statics :

1. Resultant of two concurrent forces :

$$R=\sqrt{(P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha)}\ ;$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}.$$

2. Conditions of equilibrium for concurrent coplanar forces :

$$X=\sum X_1\equiv\sum P_1\cos\alpha_1=0\ ;$$

$$Y=\sum Y_1\equiv\sum P_1\sin\alpha_1=0.$$

3. Resultant R of two parallel forces P and Q acting at A and B respectively : $R=P+Q$, (when they are like).

or, $R=P-Q$, $P>Q$, (when they are unlike).

and $P.\overline{AC}=Q.\overline{BC}$, ($R$ acts at C).

কলন শাস্ত্র
[CALCULUS]

Meaning of Abbreviations & Notations used :

		Symbol	Meaning
[1]	(*i*)	$\lvert a \rvert$	Absolute value of a.
	(*ii*)	∞	Infinity
	(*iii*)	$\simeq$	Approximately
	(*iv*)	$\Leftrightarrow$	Equivalence
	(*v*)	$\in$	Belonging
[2]	(*i*)	C. U. (Pass)	Calcutta University Ex. (Pass)
	(*ii*)	W. B. H. S.	Higher Secondary Ex. (W. B.)

কলনশাস্ত্র

(Calculus)

0-1. উপস্থাপন।

কলনশাস্ত্রের উদ্ভাবন ও বিকাশের সঙ্গে সঙ্গে উহার প্রয়োগ বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় প্রবেশ লাভ করিয়াছে ও করিতেছে। ব্রিটিশ গণিতজ্ঞ **স্যার আইজ্যাক্ নিউটন** (Sir Isaac Newton, 1642—1727) এবং জার্মান গণিতজ্ঞ **লাইব্‌নিৎস্** (Leibnitz, 1651—1708) উভয়কেই কলনশাস্ত্রের উদ্ভাবক বলা যাইতে পারে। এই কলনশাস্ত্রের ভিত্তি প্রধানতঃ সংখ্যাতত্ত্ব (Number-theory), অপেক্ষক তত্ত্ব (Function theory) ও সীমান্ত মানের ধারণা (concept of limiting value)-এর উপর অবস্থিত। আবার আধুনিক গণিতে অপেক্ষক সেটতত্ত্বের উপর নির্ভরশীল। সেটতত্ত্বের আবিষ্কারক **জর্জ ক্যান্টর** (Georg Cantor, 1845—1918) রাশিয়ায় জন্মগ্রহণ করেন। সেটতত্ত্বের আবিষ্কার ও বিকাশের সঙ্গে সঙ্গে বিজ্ঞানের বিভিন্ন জটিল প্রশ্নাবলী উহার সাহায্যে সমাধান করা সহজ হইয়াছে এবং বিশেষ করিয়া গণিতের ক্ষেত্রে বর্তমানে উহার বহুল প্রয়োগ হইয়াছে ও হইতেছে। তাহা ছাড়া সেটের মাধ্যমে গণিতের বিভিন্ন শাখাকে একই সূত্রে আবদ্ধ করা এবং একে অপরের উপর কিভাবে নির্ভরশীল তাহা দেখানো হইয়াছে। সেইজন্য গণিতের যে দিক্ সেটের মাধ্যমে আলোচিত হইতেছে তাহাকে বর্তমানে আধুনিক গণিত (Modern Mathematics) বলা হয়। পৃথিবীর বিভিন্ন দেশে এই **আধুনিক গণিত** অভূতপূর্ব বিকাশ লাভ করিয়াছে। সেইজন্য, বিভিন্ন দেশের গণিতের বিকাশ ভঙ্গির প্রতি লক্ষ্য রাখিয়া এই পুস্তকে গণিতের বিভিন্ন দিক আলোচিত হইবে।

আধুনিক পদ্ধতি ও প্রতীকের মাধ্যমে ক্যাল্‌কুলাসের বিভিন্ন দিক এই পুস্তকে আলোচিত হইবে।

অন্তরকলন

[Differential Calculus]

প্রথম অধ্যায়

বাস্তব রাশি

[Real Numbers]

1-1. (a) স্বাভাবিক সংখ্যা :

1, 2, 3, 4, 5··· ··· প্রভৃতি এই সুবিন্যস্ত (well-arranged) সংখ্যাসমূহের সহিত আমরা পরিচিত। ইহাদিগকে **স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural numbers)** বলা হয়। এই সংখ্যাসমূহের প্রত্যেকটি আবার অখণ্ড ধনসংখ্যা অথবা **ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা** নামেও পরিচিত। প্রকৃতপক্ষে ইহাদিগকে গণনাকারী সংখ্যা বলা হয়।

1-1. (b) মৌলিক সংখ্যা এবং কৃত্রিম সংখ্যা :

যে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা 1 এবং সেই সংখ্যা ভিন্ন অপর কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য (Divisible) নহে তাহাকে **মৌলিক সংখ্যা (Prime number)** বলে। যেমন,

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23··· ···এর প্রত্যেকটি মৌলিক সংখ্যা।

যে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা 1 এবং সেই সংখ্যা ভিন্ন অপর কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য, সেই সংখ্যাটিকে **কৃত্রিম সংখ্যা (Composite Number)** বলে। যেমন,

4, 6, 8, 9, 10, 12,··· ···এর প্রত্যেকটি কৃত্রিম সংখ্যা।

1-1. (c) পরস্পর মৌলিক সংখ্যা :

দুইটি স্বতন্ত্র (Distinct) ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার মধ্যে 1 (One) ভিন্ন অপর কোন সাধারণ গুণনীয়ক (Common factor) না থাকিলে তাহাদিগকে **'পরস্পর মৌলিক' (Prime to each other)** বলা হয়। যেমন, 9 এবং 13 পরস্পর মৌলিক ; 15 এবং 28 পরস্পর মৌলিক ; কিন্তু 10 ও 15 পরস্পর মৌলিক নহে।

1·1. (d) স্বাভাবিক সংখ্যার কয়েকটি ধর্ম্ম (Some properties of Natural Numbers) ঃ

(i) যে কোন দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল এবং গুণফল স্বাভাবিক সংখ্যা হইবে।

(ii) m এবং n দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যা হইলে, হয় $m=n$, অথবা $m>n$, অথবা $m<n$ হইবে।

(iii) m, n, p তিনটি স্বাভাবিক সংখ্যা হইলে, যদি $m \geqslant n$, ও $n>p$ হয়, তবে $m>p$; আবার যদি $m \leqslant n$ ও $n<p$ হয়, তবে $m<p$ হইবে।

(iv) দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যা m এবং n পরস্পর মৌলিক হইলে, এবং k যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা হইলে, m^k এবং n^k পরস্পর মৌলিক হইবে।

1·1. (e) পিয়ানো স্বতঃসিদ্ধ ঃ

$1, 2, 3, 4, 5, \cdots \quad \cdots n, n+1, \cdots \quad \cdots$ এই সুসংবদ্ধ (well-arranged) স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের গোষ্ঠীকে N-মণ্ডলী (N-System) বলা হয় এবং লেখা হইয়া থাকে ঃ

$$N \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots \quad \cdots\} ;$$

যেখানে প্রতিটি স্বাভাবিক সংখ্যা ঐ N-মণ্ডলীর এক একটি পদ (element); এবং ইহার পদগুলি নিম্নলিখিত 4টি স্বতঃসিদ্ধ (Called Peano's Axioms) সিদ্ধ করে ঃ

(1) N-মণ্ডলীর যে কোন একটি নির্দিষ্ট পদ a হইলে ঐ মণ্ডলীতে একটি এবং কেবলমাত্র একটি পদ a^+ থাকিবে যাহাকে a-এর পরবর্তী পদ বা উত্তরাধিকারী (Successor) বলা হয়। যেমন, $a=3$ হইলে, $a^+=a+1=3+1=4$; $a=5$ হইলে, $a^+=a+1=5+1=6$; ইত্যাদি।

(2) N-মণ্ডলীতে একটি একক পদ 1 (unique element) আছে যাহা N-এর কোন পদের পরবর্তী পদ নহে।

(3) N-মণ্ডলীর যে কোন দুইটি ভিন্ন পদের একই উত্তরাধিকারী থাকিবে না।

(4) N-এর পদ লইয়া গঠিত S মণ্ডলী যদি এমন হয় যে Sএতে 1 আছে এবং N-এর কোন পদ a যদি Sএতে থাকে, তবে a^+ উহাতে থাকিবে ; তখন N-এর সমুদয়পদ Sএতে থাকিবে।

1-2 (a) পূর্ণসংখ্যা (Integers) :

যোগ (Addition) এবং **গুণন (Multiplication)**—এই দুইটি মৌলিক প্রক্রিয়া (Fundamental operations) N মণ্ডলীর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য অর্থাৎ দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। যেমন $5+7=12$, যাহা একটি স্বাভাবিক সংখ্যা ; $5\times7=35$, যাহা একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

কিন্তু, **বিয়োগ** প্রক্রিয়াটি N-মণ্ডলীর ক্ষেত্রে সর্ব্বদা প্রযোজ্য নাও হইতে পারে।

বিয়োগের সংজ্ঞানুযায়ী, a এবং b যে কোন দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য যদি কোন একটি স্বাভাবিক সংখ্যা c পাওয়া যায়, যাহাতে $b+c=a$ হয়, তাহা হইলে, c কে a এবং b এর বিয়াগফল বলা হয়, এবং তখন লেখা হয়, $a-b=c$. তাহা হইলে, $3+4=7$ বলিয়া, $7-3=4$, অর্থাৎ 7 হইতে 3 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 4, যাহা একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। কিন্তু এমন কোন স্বাভাবিক সংখ্যা k পাওয়া যাইবে না যাহাতে $5+k=2$ হইবে, অর্থাৎ, 2 হইতে 5 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল কোন স্বাভাবিক সংখ্যা হইবে না।

পরবর্তীকালে, নানাবিধ অসুবিধা দূরীকরণের উদ্দেশ্যে $-1, -2, -3, -4, -5\cdots\cdots$ এইরূপ সুসংবদ্ধ সংখ্যাগুলি এবং অপর একটি সংখ্যা 0 (শূন্য) এর উৎপত্তি হয়। $-1, -2, -3, -4, -5,\cdots\cdots$এই সুসংবদ্ধ সংখ্যাগুলিকে **ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা (Negative Integers)** বলা হয়।

ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাসমূহ, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যাসমূহ এবং শূন্য—এই সংখ্যাগুলিকে একত্রে J-মণ্ডলী (**J-sytem**) বলা হয় এবং লেখা হইয়া থাকে :

$$J\equiv\{\cdots\cdots-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots\cdots\}.$$

এই J মণ্ডলীর অন্তর্গত প্রতিটি সংখ্যাকে **পূর্ণসংখ্যা (Integer)** বলা হয়। সুতরাং, প্রতিটি পূর্ণসংখ্যা এই J-মণ্ডলীর এক একটি সদস্য (member).

1-2 (b). যুগ্ম সংখ্যা ও অযুগ্ম সংখ্যা :

যে সমস্ত পূর্ণসংখ্যা 2 দ্বারা বিভাজ্য তাহাদিগকে যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। যেমন, $\cdots,-6,-4,-2,2,4,6,8,\cdots,\cdots$, এর প্রাত্যকটি এক একটি যুগ্ম সংখ্যা। সুতরাং, $n\ (\neq 0)$ যে কোন পূর্ণসংখ্যা হইলে $2n$ সর্বদাই যুগ্ম সংখ্যা।

মন্তব্যঃ 0 (শূন্য) কেও যুগ্ম সংখ্যা মনে করা যায়।

যে সমস্ত পূর্ণসংখ্যা 2 দ্বারা বিভাজ্য নহে, তাহাদিগকে অযুগ্ম সংখ্যা বলে। যেমন, $\cdots$, $\cdots$, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, $\cdots$, $\cdots$এর প্রত্যেকটি এক একটি অযুগ্ম সংখ্যা। সুতরাং, n কোন পূর্ণসংখ্যা হইলে $2n+1$ অযুগ্ম সংখ্যা হইবে। আবার, $4n\pm1$ সর্বদাই অযুগ্ম সংখ্যা হইবে, যেখানে $n=$পূর্ণসংখ্যা।

দ্রষ্টব্য ঃ

(i) p একটি যুগ্ম সংখ্যা হইলে, p^2 একটি যুগ্ম সংখ্যা হইবে।

p একটি যুগ্ম সংখ্যা হইলে,

$p=2n$, যেখানে n একটি পূর্ণসংখ্যা।

$\therefore\ p^2=(2n)^2=4n^2=2\,(2n^2)=2k,$

যেখানে, $k=2n^2=$একটি পূর্ণসংখ্যা।

সুতরাং, p^2 একটি যুগ্ম সংখ্যা।

(ii) m একটি অযুগ্ম সংখ্যা হইলে, m^2 একটি অযুগ্ম সংখ্যা হইবে।

m একটি অযুগ্ম সংখ্যা হইলে,

$m=2n+1$, যেখানে n একটি পূর্ণসংখ্যা।

$$\therefore\ m^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$$
$$=2(2n^2+2n)+1=2k+1,$$

যেখানে, $k=2n^2+2n=2(n^2+n)=$একটি পূর্ণসংখ্যা। সুতরাং, m^2 একটি অযুগ্ম সংখ্যা।

মন্তব্য ঃ **(i)** p^2 যুগ্ম সংখ্যা হইলে, অবশ্যই p যুগ্ম সংখ্যা হইবে।

(ii) p^2 অযুগ্ম সংখ্যা হইলে, অবশ্যই p অযুগ্ম সংখ্যা হইবে।

1-3. (a) মূলদ সংখ্যা (Rational Numbers) ঃ

যোগ, বিয়োগ ও গুণন—এই তিনটি মৌলিক প্রক্রিয়া J-মণ্ডলীর ক্ষেত্রে সর্বদাই প্রযোজ্য অর্থাৎ, যে কোন দুইটি পূর্ণসংখ্যার যোগফল, বিয়োগফল ও গুণফল সর্বদাই পূর্ণসংখ্যা। কিন্তু; ভাগ প্রক্রিয়াটি J-মণ্ডলীর ক্ষেত্রে সর্ব্বদা প্রয়োজ্য নহে।

ভাগের সংজ্ঞানুযায়ী, a এবং b যে কোন দুইটি পূর্ণসংখ্যার জন্য যদি কোন একটি পূর্ণসংখ্যা c পাওয়া যায়, যাহাতে $b\times c=a$, $(b\neq0)$, হয়, তাহা হইলে, aকে b দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল c হইবে ; এবং তখন লেখা হইবে, $a/b=c$. যেমন, $5\times3=15$ বলিয়া, $15/5=3$; সেইরূপ, $24/6=4$; $35/7=5$; $-18/6=-3$.

কিন্তু এমন কোন পূর্ণসংখ্যা k পাওয়া যাইবে না, যাহাতে $5\times k=7$ হইবে ; অর্থাৎ, 7/5 এর মান কোন পূর্ণসংখ্যা হইতে পারে না।

পরবর্তীকালে, গণিতবিদ্‌গণ $\frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \frac{-5}{6}, \frac{6}{-7}, \frac{-6}{-5}, \cdots\ \cdots$ এই জাতীয় সংখ্যাগুলির প্রবর্তন করেন, যাহাদিগকে **ভগ্নাংশ** (Fraction) বলা হয়। এই সমস্ত ভগ্নাংশ, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে।

যে কোন পূর্ণসংখ্যা এবং যে কোন ভগ্নাংশকে মূলদ সংখ্যা বলা হয় এবং সমষ্টিগত ভাবে (collectively) তাহাদিগকে Q-মণ্ডলী বলা হয়।

মন্তব্য :

যে কোন পূর্ণসংখ্যাকে শূন্য দ্বারা ভাগ করা অর্থহীন। যেমন, $\frac{5}{0}, \frac{-3}{0}, \frac{0}{0}, \frac{a}{0}$ ($a=$ যে কোন পূর্ণসংখ্যা) এর প্রত্যেকটি অর্থহীন।

আমরা জানি, 0 (শূন্য) কে কোন পূর্ণসংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফল শূন্য হইবে। সুতরাং, k যে কোন পূর্ণসংখ্যা হইলে, $0\times k=0$; তাহা হইলে, $0/0=k$. কিন্তু k এর মান 1, অথবা 2, অথবা 3/2, অথবা যে কোন মূলদ সংখ্যা হইলে, $0\times k$ এর মান সর্বদাই শূন্য হইবেই। তাহা হইলে, $0/0=(=k)$ এর মান 1, বা 2, বা 3/2, বা যে কোন মূলদ সংখ্যা হইতে পারে, অর্থাৎ 0/0 এর মান অনির্দ্দিষ্ট (Indefinite)। সেইজন্য 0/0 **অর্থহীন** (Meaningless).

আবার, এমন কোন নির্দিষ্ট মূলদ সংখ্যা k থাকিবে না, যাহাতে $0\times k=5$ হইবে ; কারণ, k যে কোন মূলদ সংখ্যা হইলে, $0\times k\equiv 0$; সুতরাং, 5/0 অর্থহীন। সুতরাং, $a/0$, (যেখানে a যে কোন পূর্ণসংখ্যা) অর্থহীন।

মন্তব্য : a যে কোন মূলদ সংখ্যা হইলেও, $a/0$ অর্থহীন।

সংজ্ঞা : মূলদ সংখ্যা :

p যে কোন পূর্ণসংখ্যা এবং q যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, p/q কে **মূলদ সংখ্যা** (Rational Number) বলা হয়।

তাহা হইলে, 3/5, −7/6, 14/7, −5/3, −8/4, এর প্রত্যেকটি এক একটি মূলদ সংখ্যা। যেহেতু, $4=4/1$; $5=10/2$, $-3=-27/9$, সুতরাং, 4, 5, −3 এর প্রত্যেকটি মূলদ সংখ্যা। আবার, যেহেতু, $0=0/5$, এবং $0=0/4$, সুতরাং, 0 (শূন্য) একটি মূলদ সংখ্যা—ইহা মনে করা যায়।

দ্রষ্টব্য : অমূলদ শূন্যের অস্তিত্ব কল্পনা করা যায়।

1-3 (b) মূলদ সংখ্যার কয়েকটি ধর্ম (Some properties of Rational numbers) :

(1) যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ (অবশ্য শূন্য দ্বারা ভাগ ভিন্ন)—এই চারিটি মৌলিক প্রক্রিয়া মূলদ সংখ্যা-গোষ্ঠীর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

যেমন, 7/4 এবং 3/5 মূলদ রাশি। তখন,

$$\frac{7}{4}+\frac{3}{5}=\frac{7\times5+3\times4}{4\times5}=\frac{47}{20}=\text{একটি মূলদ রাশি};$$

$$\frac{7}{4}-\frac{3}{5}=\frac{7\times5-3\times4}{4\times5}=\frac{23}{20}=\text{একটি মূলদ রাশি};$$

$$\frac{7}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{7\times3}{4\times5}=\frac{21}{20}=\text{একটি মূলদ রাশি};$$

$$\frac{7}{4}\div\frac{3}{5}=\frac{7\times5}{4\times3}=\frac{35}{12}=\text{একটি মূলদ রাশি}।$$

(2) বিনিময় নিয়ম (Commutative law),
সংযোগ নিয়ম (Associative law) এবং
বিচ্ছেদ নিয়ম (Distributive law)
মূলদ সংখ্যা মণ্ডলীর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

r, s, t তিনটি মূলদ সংখ্যা হইলে,

(i) $r+s=s+r$, (যোগের বিনিময় নিয়ম) ;
$r\times s=s\times r$, (গুণনের বিনিময় নিয়ম) ;

(ii) $(r+s)+t=r+(s+t)$, (যোগের সংযোগ নিয়ম) ;
$r\times(s\times t)=(r\times s)\times t$, (গুণনের সংযোগ নিয়ম) ;

(iii) $r\times(s+t)=(r\times s)+(r\times t)$, (বিচ্ছেদ নিয়ম) ;
$(r+s)\times t=(r\times t)+(s\times t)$, (বিচ্ছেদ নিয়ম) ;

(3) মূলদ সংখ্যাসমূহ ক্রম বিন্যস্ত (well-arranged) :

(i) r এবং s দুইটি মূলদ সংখ্যা হইলে, হয় $r=s$, অথবা $r>s$, অথবা $r<s$.

(ii) r, s, t তিনটি মূলদ সংখ্যা হইলে. যদি $r\geqslant s$ এবং $s>t$ হয়, তবে $r>t$ হইবে ; আবার, যদি $r\leqslant s$ এবং $s<t$ হয় তবে $r<t$ হইবে।

(4) দুইটি বিভিন্ন মূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা থাকি বে।

মনে করি, r এবং s দুইটি বিভিন্ন মূলদ সংখ্যা, যেখানে $r<s$; $n\ (>1)$ যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। তাহা হইলে,

$$r+\frac{(s-r)}{n};\quad r+\frac{2(s-r)}{n};\quad r+\frac{3(s-r)}{n};\ \cdots\ \cdots,\quad r+\frac{(n-1)(s-r)}{n}$$

এর প্রত্যেকটি মূলদ রাশি এবং r ও s এর মধ্যে অবস্থিত ; অর্থাৎ ইহাদের যে কোনটি r অপেক্ষা বৃহত্তর এবং s অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; এবং উহাদের সংখ্যা $(n-1)$. এখন $n=2, 3, 4, \cdots\cdots$ প্রভৃতি যথেচ্ছভাবে বর্ধিত করিয়া লইতে লইতে n এর মান অসীম (infinity) হইলে, দেখা যায় r এবং s এর মধ্যে অসংখ্য মূলদ রাশি থাকিবে।

1-3 (c) যে কোন মূলদ রাশিকে হয় সামান্য দশমিক ভগ্নাংশে (terminating decimal), অথবা আবৃত্ত দশমিকে (recurring decimal) প্রকাশ করা যাইবে এবং বিপরীতক্রমে।

(A) মনে করি, p/q একটি মূলদ রাশি এবং $q=2^r5^s$, যেখানে r এবং s এর যে কোন একটি শূন্য এবং অপরটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা অথবা উহাদের উভয়েই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এইরূপ ক্ষেত্রে, p/q, মূলদ রাশিটিকে সসীম দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যাইবে, কারণ এইরূপ ক্ষেত্রে,

$$\frac{p}{q}=\frac{p}{2^r5^s}=\frac{p\times5^r\times2^s}{(2\times5)^{r+s}}=\frac{p\times5^r\times2^s}{10^{r+s}}$$

যাহাকে সহজেই সসীম দশমিক ভগ্নাংশে লেখা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ ;

$$\frac{3}{4}=\frac{3}{2^2}=\frac{3\times5^2}{(2\times5)^2}=\frac{75}{10^2}=0{\cdot}75\,;$$

$$\frac{7}{8}=\frac{7}{2^3}=\frac{7\times5^3}{(2\times5)^3}=\frac{875}{10^3}=0{\cdot}875\,;$$

$$\frac{72}{25}=\frac{72}{5^2}=\frac{72\times2^2}{(2\times5)^2}=\frac{288}{10^2}=2{\cdot}88\,;$$

$$\frac{94}{125}=\frac{94\times2^3}{(2\times5)^3}=\frac{752}{10^3}=0{\cdot}752\,;$$

$$\frac{243}{250}=\frac{243\times4}{10^3}=\frac{972}{10^3}=0{\cdot}972\,;$$ ইত্যাদি।

(B) নিম্নের দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ্যণীয় :—

(i) $\frac{1}{9}=\cdot 11111\cdots \quad \cdots$ অসীম পদ পর্যন্ত $=0\cdot\dot{1}$;

$\frac{5}{9}=5\times\frac{1}{9}=5\times 0\cdot\dot{1}=0\cdot 55555\cdots \quad \cdots$ অসীম পদ পর্যন্ত $=0\cdot\dot{5}$;

$\frac{52}{9}=5+7\times\frac{1}{9}=5+0\cdot\dot{7}=5\cdot\dot{7}$;

(ii) $\frac{1}{99}=0\cdot 01010101\cdots \quad \cdots \quad =0\cdot\dot{0}\dot{1}$;

$\frac{5}{99}=5\times 0\cdot\dot{0}\dot{1}=0\cdot\dot{0}\dot{5}$; $\frac{23}{99}=23\times 0\,\dot{0}\dot{1}=0\cdot\dot{2}\dot{3}$;

$\frac{203}{99}=2+5\times\frac{1}{99}=2+\dot{0}\dot{5}=2\cdot\dot{0}\dot{5}.$

(iii) $\frac{1}{999}=0\cdot\dot{0}0\dot{1}$; $\frac{5}{999}=\cdot\dot{0}0\dot{5}$;

$\frac{23}{999}=\cdot\dot{0}2\dot{3}$; $\frac{473}{999}=\dot{4}7\dot{3}$;

$\frac{3501}{999}=3+\frac{504}{999}=3+\cdot\dot{5}0\dot{4}=3\cdot\dot{5}0\dot{4}$; ইত্যাদি ।

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, কোনও সামান্য ভগ্নাংশ p/q এতে q এর মান 9, অথবা 99, অথবা 999, অথবা 9999, অথবা 99999, ··· ইত্যাদি এইরূপ সংখ্যা থাকিলে, p/q এই মূলদ রাশিটিকে আবৃত্ত দশমিকে পরিণত করা যাইবে।

এখন মনে করি,

$$\frac{p}{q}=\frac{p}{2^r\times 5^s\times n}=\frac{p\times 2^s\times 5^r}{(2\times 5)^{r+s}\times n}=\frac{1}{(10)^{r+s}}\times\frac{m}{n}$$

যেখানে, $m=p\times 2^s\times 5^r$; এবং $n=$একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যেখানে n এর মধ্যে 2 এবং 5 জাতীয় কোন উৎপাদক নাই। এইরূপক্ষেত্রে, p/q কে আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ করা যাইবে। যেমন,

$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=6\times\frac{1}{9}=6\times 0\cdot\dot{1}=0\cdot\dot{6}$;

$\frac{5}{6}=\frac{1}{10}\times\frac{75}{9}=\frac{1}{10}\times\left(8\frac{3}{9}\right)=\frac{1}{10}\times 8\cdot\dot{3}=0\cdot 8\dot{3}$;

$$\frac{13}{15}=\frac{1}{10}\times\frac{78}{9}=\frac{1}{10}\times\left(8\frac{6}{9}\right)=\frac{1}{10}\times 8\cdot\dot{6}=0\cdot 8\dot{6}\ ;$$

$$\frac{47}{165}=\frac{1}{10}\times\frac{282}{99}=\frac{1}{10}\times 2\cdot\dot{8}\dot{4}=0\cdot 2\dot{8}\dot{4}\ ;$$

সাধারণ নিয়ম :

"দ্বিপদ উপপাদ্য" এর সাহায্যে,

$(a+b)^n-a^n-b^n=M(n)\equiv n$-এর গুণিতক ;

$(a+b+c)^n-a^n-b^n-c^n$

$=\{(\overline{a+b}+c)^n-(a+b)^n-c^n\}+\{(a+b)^n-a^n-b^n\}=M(n$

সেইরূপ, $(a+b+c\cdots\cdots+k)^n-a^n-b^n-\cdots\cdots-k^n=M(n)$

ধরি, $a=b=c=\cdots=k=1,$

যেখানে, $a, b, c,\cdots k$ এর মোট সংখ্যা $=N.$

তাহা হইলে,

$N^n-N=M(n)$; বা, $N(N^{n-1}-1)=M(n).$

মনে করি, $N\neq M(n)$; তাহা হইলে, $N^{n-1}-1=M(n).$

অতএব, $N=10$ হইলে এবং **n এর মধ্যে 2 এবং 5 জাতীয় কোন উৎপাদক না থাকিলে, $10^{n-1}-1=M(n)$.**

যেমন, $n=7$ হইলে, $10^{7-1}-1=10^6-1$

$=999{,}999=7$ এর গুণিতক $=M(7)$;

$n=13$ হইলে, $10^{13-1}-1=10^{12}-1=M(13)$; ইত্যাদি।

তাহা হইলে, উপরোক্ত নিয়মে,

$\frac{p}{q}=\frac{1}{10^{r+s}}\frac{m}{n}$ এর ক্ষেত্রে,

$\frac{m}{n}=\frac{m\times\{10^{n-1}-1\}}{n\{10^{n-1}-1\}}$ লিখিয়া p/q কে আবৃত্ত দশমিকে পরিণত করা যাইবে। দৃষ্টান্তস্বরূপ,

$$\frac{6}{7}=\frac{6\times(10^{7-1}-1)}{7\times(10^{7-1}-1)}=\frac{6\times 999{,}999}{7\times 999{,}999}$$

$$=\frac{6\times 142857}{999{,}999}=\frac{857142}{999{,}999}=0\cdot\dot{8}5714\dot{2}.$$

মন্তব্য : r এবং s ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে যেখানে 1, 2 এবং 5 ভিন্ন s এর মান যে কোন মৌলিক সংখ্যা, r/s একটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের সমতুল্য যেখানে অধিকপক্ষে $(s-1)$ সংখ্যক অঙ্ক একই ক্রমে পর পর আবৃত্ত হইতে থাকিবে। যেমন,

$$\frac{2}{3}=0\cdot\dot{6}=0\cdot\dot{6}\dot{6}\ ;\quad \frac{6}{7}=0\cdot\dot{8}5714\dot{2}\ ;$$

$$\frac{3}{11}=\cdot\dot{5}\dot{4}=\cdot\dot{5}454545454\dot{4}\ ;$$

$$\frac{2}{13}=\cdot\dot{1}5384\dot{6}=\cdot\dot{1}53846153846\dot{6}\ ;$$

$$\frac{1}{17}=\cdot\dot{0}58823529411764\dot{7}\ ;$$

$$\frac{1}{19}=\cdot\dot{0}5263157894736842\dot{1}.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য : $6=6\cdot0000\cdots\cdots=6\cdot\dot{0}$

$$\frac{3}{4}=0\cdot75=0\cdot75\dot{0}\ ;\quad \frac{7}{8}=0\cdot875=0\cdot875\dot{0}\ ;$$

$$\frac{7}{25}=0\cdot28=0\cdot28\dot{0}\ ;\quad \frac{94}{125}=0\cdot752=0\cdot752\dot{0}\ ;$$

ইত্যাদি যে কোন সসীম দশমিক ভগ্নাংশকে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে লেখা যাইতে পারে, যেখানে 0 (শূন্য) আবৃত্ত হইতে থাকিবে।

আবার, আমরা লক্ষ্য করি,

$$0\cdot74\dot{9}=\cdot749999\cdots\cdots$$
$$=\cdot74+\cdot009+\cdot0009+\cdots\cdots$$
$$=\frac{74}{100}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\cdots\cdots$$
$$=\frac{74}{100}+\frac{9}{10^3}\times\frac{1}{1-1/10}$$
$$=\frac{74}{100}+\frac{1}{100}=\frac{75}{100}=0\cdot75$$

সুতরাং, $0\cdot75=0\cdot74\dot{9}$;

সেইরূপ দেখানো যাইবে,

$0\cdot875=0\cdot874\dot{9}$; $\quad 0\cdot751=0\cdot750\dot{9}$;

$0\cdot972=0\cdot971\dot{9}$; $\quad 5\cdot5071=5\cdot5070\dot{9}$;

অর্থাৎ, কোন সসীম দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দুর পর শেষ অঙ্কটিকে 1 কম করিয়া লিখিয়া ঠিক তাহার পরে 9 কে পৌনঃপুনিক হিসাবে ব্যবহার করিলে, যে আবৃত্ত দশমিক হইবে তাহাই ঐ দশমিক ভগ্নাংশের সমান হইবে। সুতরাং, দেখা যাইতেছে, যে কোন সসীম দশমিক ভগ্নাংশকে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে লেখা যাইতে পারে।

তাহা হইলে, **যে কোন মূলদ সংখ্যাকে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে লেখা যাইবে।**

(C) বিপরীতক্রমে, **যে কোন সসীম দশমিক ভগ্নাংশ এবং যে কোন আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ মূলদ সংখ্যাকে কেবলমাত্র বুঝাইবে।** যেমন,

$$0{\cdot}34=\frac{34}{10^2}\ ;\ 5{\cdot}75=\frac{575}{10^2}\ ;$$ এবং সাধারণভাবে,

$$0{\cdot}a_1a^2a_3\cdots\quad\cdots a_k=\frac{a_1a_2a_3\cdots\quad\cdots a_k}{10^k}\ ;$$

যেখানে, $a_1, a^2, a_3, \quad\cdots\quad\cdots a_k$-এর কোন কোনটি শূন্য এবং অবশিষ্টগুলি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

আবার,

$$\begin{aligned}0{\cdot}7\dot{5} &= {\cdot}7555\cdots\cdots\\ &= {\cdot}7+{\cdot}05+{\cdot}005+\cdots\cdots\\ &= \frac{7}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\cdots \text{ অসীম পদ পর্য্যন্ত.}\\ &= \frac{7}{10}+\frac{5}{10^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{10}}.\\ &= \frac{7}{10}+\frac{5}{90}=\frac{68}{90}=\frac{75-7}{90}\ ;\end{aligned}$$

সেইরূপ, $0{\cdot}4\dot{7}=\dfrac{47-7}{90}\ ;\ 0{\cdot}4\dot{5}\dot{6}=\dfrac{456-4}{990}\ ;\quad 0{\cdot}35\dot{7}=\dfrac{357-35}{900}\ ;$

$0{\cdot}4\dot{0}\dot{5}=\dfrac{405-4}{990}\ ;$ ইত্যাদি ; এবং **সাধারণভাবে,**

$$0{\cdot}a_1a_2a_3\cdots\cdots a_k\dot{a}bc\cdots\dot{y}$$
$$=\frac{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_kabc\cdots\cdots y-a_1a_2a_3\cdots\cdots a_k}{999\cdots\cdots9000\cdots\cdots0}\ ;$$

[9 এর মোট সংখ্যা $=y$; 0 এর মোট সংখ্যা $=k$].···§.**1 − 3**(c)(C).

সুতরাং যে কোন সসীম দশমিক ভগ্নাংশ এবং যে কোন আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ মূলদ রাশিকেই মাত্র বুঝাইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(i) $S = \dot{.6} = .6666\cdots\cdots.$

$\therefore\ 10S = 6.6666\cdots\cdots;$

$S = 0.6666\cdots\cdots;$

$9S = 6;$ (বিয়োগ করিয়া)

$$\dot{.6} = S = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

(ii) $S = .\dot{4}\dot{7} = .474747\cdots\cdots.$

$\therefore\ 100S = 47.474747\cdots\cdots;$

$S = 0.474747\cdots\cdots;$

$99S = 47;$ (বিয়োগ করিয়া)

$$\therefore\ .\dot{4}\dot{7} = S = \frac{47}{99}.$$

(iii) $S = 5.6\dot{7} = 5.6777\cdots\cdots.$

$\therefore\ 100S = 567.7777\cdots\cdots;$

$10S = 56.7777\cdots\cdots;$

$90S = 567 - 56;$

$$\therefore\ 5.6\dot{7} = S = \frac{567-56}{90} = \frac{511}{90}.$$

(iv) $S = 3.5\dot{4}\dot{7} = 3.5474747\cdots\cdots.$

$\therefore\ 1000S = 3547.474747\cdots\cdots;$

$10S = 35.474747\cdots\cdots;$

$990S = 3547 - 35;$

$$\therefore\ 3.5\dot{4}\dot{7} = S = \frac{3547-35}{990} = \frac{3512}{990}.$$

সেইরূপ, (v) $0.5\dot{0}3\dot{7} = \dfrac{5037-5}{9990} = \dfrac{5032}{9990}.$

(vi) $3.20\dot{9}4\dot{4} = \dfrac{320944-320}{99900} = \dfrac{320624}{99900}.$

এইভাবে যে কোন আবৃত্ত দশমিককে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করা যাইবে।

মন্তব্য ঃ আমরা লক্ষ্য করি যে,

0·050050005০0005……অসীম পদ পর্য্যন্ত—এই অসীম দশমিক ভগ্নাংশটি আবৃত্ত নহে। যে সমস্ত অসীম দশমিক ভগ্নাংশ আবৃত্ত নহে তাহারা কোন মূলদ রাশি হইবে না ; কারণ, আমরা জানি যে কোন মূলদ রাশি সর্ব্বদাই হয় সসীম দশমিক ভগ্নাংশ নতুবা অসীম আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ হইবে।

1-3(d). অমূলদ সংখ্যা ও বাস্তব সংখ্যা।

m, n ও a যে কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে, $a^{m/n}$ এর অর্থ বীজগণিতে, "সূচক-নিয়মাবলী" অধ্যায়ে দেওয়া হইয়াছে। $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[5]{9}$ ইত্যাদির অর্থ ঐখান থেকে আমরা জানিতে পারি। এখন, দেখা যাক্, এই জাতীয় রাশিগুলি মূলদ সংখ্যা না অন্য কিছু।

প্রথমতঃ, $1<2<4$. $\therefore$ $\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$. অর্থাৎ, $1<\sqrt{2}<2$.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ পূর্ণসংখ্যা নহে।

এখন, যদি সম্ভব হয়, মনে করি, $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা, এবং $\sqrt{2}=p/q$, যেখানে p এবং q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও পরস্পর মৌলিক : $(q>1)$. তাহা হইলে, বর্গ করিয়া পাই,

$$p^2/q=2q \quad \cdots\cdots \quad (1).$$

যেহেতু, p এবং q পরস্পর মৌলিক, উহাদের মধ্যে 1 ভিন্ন অপর কোন সাধারণ উৎপাদক থাকিবে না ; সুতরাং, p^2/q একটি সামান্য ভগ্নাংশ যেখানে $q\neq1$, q = পূর্ণসংখ্যা, এবং p^2 এবং q পরস্পর মৌলিক। কিন্তু, $2q$ একটি পূর্ণসংখ্যা। তাহা হইলে, (1)এতে একটি সামান্য ভগ্নাংশ একটি পূর্ণসংখ্যার সমান—যাহা অসম্ভব।

সুতরাং, $\sqrt{2}$ কে p/q আকারে প্রকাশ করা যাইবে না ; অর্থাৎ, **$\sqrt{2}$ কোনমতেই মূলদ সংখ্যা হইতে পারে না।** সেইরূপ, $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[5]{9}\cdots$ইত্যাদি রাশিসমূহ মূলদ সংখ্যা হইতে পারে না। এই সমস্ত সংখ্যাগুলিকে **অমূলদ সংখ্যা (Irrational numbers)** বলা হয়।

আবার, লক্ষ্য করি যে, $\sqrt{2}+\frac{1}{n}(\sqrt{3}-\sqrt{2}),\ \sqrt{2}+\frac{2}{n}\sqrt{(3-\sqrt{2})},$

$$\cdots \qquad \cdots, \qquad \sqrt{2}+\frac{n-1}{n}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\ ;\ n\to\infty\ ;$$

এই অসংখ্য সংখ্যাগুলি অমূলদ ; এবং $\sqrt{2}$ ও $\sqrt{3}$ এর মধ্যে অবস্থিত। অতএব আমরা বলিতে পারি, **যে কোন দুইটি বিভিন্ন অমূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা থাকিবে।**

সমুদয় মূলদ সংখ্যা এবং সমুদয় অমূলদ সংখ্যাকে সমষ্টিগতভাবে **বাস্তব সংখ্যা** (Real Numbers) এর মণ্ডলী বলা হয় এবং এই মণ্ডলীকে R দ্বারা সূচিত করা হয়।

যে কোন অমূলদ সংখ্যাকে সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায় না বলিয়া ইহাদিগকে **অমেয়** (Incommensurable) রাশি বলা হয়। কিন্তু প্রত্যেকটি অমূলদ সংখ্যার নির্দ্দিষ্ট মান আছে। ইহাদের আসন্ন মান যতদূর খুশী সঠিক ভাবে নির্ণয় করা যাইতে পারে।

যেহেতু, $\sqrt{2}$ কোন মূলদ সংখ্যা নহে, সুতরাং, ইহাকে অসীম অনাবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

যেহেতু, $1^2<2<2^2$; $\therefore\ 1<\sqrt{2}<2$. সুতরাং, $\sqrt{2}$ এর মান 1 এবং 2 এর মধ্যে থাকিবে,

আবার, $(1{\cdot}4)^2=1{\cdot}96<2$; $(1{\cdot}5)^2=2{\cdot}25>2$ বলিয়া, $1{\cdot}4<\sqrt{2}<1{\cdot}5$.

আবার, $(1{\cdot}41)^2=1{\cdot}9881<2$, এবং $(1{\cdot}42)^2=2{\cdot}0164>2$ বলিয়া, $1{\cdot}41<\sqrt{2}<1{\cdot}42$.

এইভাবে অগ্রসর হইলে, দেখা যাইবে : $\sqrt{2}=1{\cdot}414, 213, 5\cdots\cdots$,

যাহা একটি অসীম অনাবৃত্ত দশমিক হইবে।

মন্তব্য : পূর্বোক্ত আলোচনা হইতে দেখা যাইতেছে, কোন বাস্তব রাশিকে সসীম অথবা অসীম আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ করা সম্ভব হইলে, উহা একটি মূলদ সংখ্যা হইবে ; কিন্তু অনাবৃত্ত অসীম দশমিকে প্রকাশিত হইলে, উহা একটি অমূলদ সংখ্যা হইবে ; এবং বিপরীতক্রমে, সসীম অথবা আবৃত্ত অসীম দশমিক একটি মূলদ সংখ্যাকে এবং অনাবৃত্ত অসীম দশমিক একটি অমূলদ সংখ্যাকে সূচিত করিবে।

1-4. বাস্তব সংখ্যার কতিপয় ধর্ম (Some properties of real numbers) :

(1) যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ (অবশ্য শূন্য দ্বারা ভাগ ভিন্ন)—এই চারিটি মৌলিক প্রক্রিয়া বাস্তব সংখ্যা-গোষ্ঠীর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

(2) a, b, c তিনটি বাস্তব সংখ্যা হইলে,

(i) $a+b=b+a$, (যোগের বিনিময় নিয়ম) ;

$a\times b=b\times a$, (গুণনের বিনিময় নিয়ম) ;

(ii) $(a+b)+c=a+(b+c)$, (যোগের সংযোগ নিয়ম) ;
$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$, (গুণনের সংযোগ নিয়ম) ;

(iii) $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$, (বিচ্ছেদ নিয়ম) ;
$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$, (বিচ্ছেদ নিয়ম) ।

(3) বাস্তব সংখ্যা সমূহ ক্রম বিন্যস্ত ।

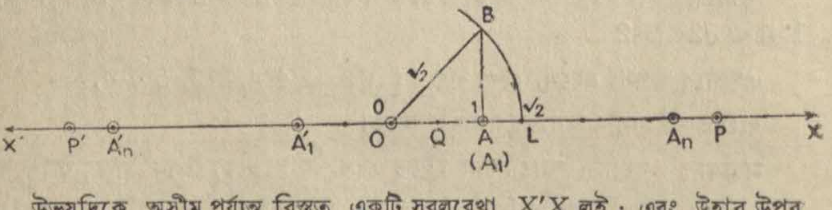
(i) a এবং b দুইটি বাস্তব সংখ্যা হইলে, হয় $a=b$, অথবা $a>b$, অথবা $a<b$.

(ii) a, b, c তিনটি বাস্তব সংখ্যা হইলে, যদি $a\geqslant b$ এবং $b>c$ হয়, তবে $a>c$ হইবে ; আবার যদি $a\leqslant b$ এবং $b<c$ হয়, তবে $a<c$ হইবে ।

(4) দুইটি বিভিন্ন বাস্তব রাশির মধ্যে অসংখ্য বাস্তব রাশি থাকিবে ; অর্থাৎ, অসংখ্য মূলদ রাশি এবং অসংখ্য অমূলদ রাশি থাকিবে ।

বাস্তব রাশির উপরোক্ত ধর্ম সমূহের প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া এখানে দেওয়া সম্ভবপর হইল না ।

1-5. বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ (Geometrical representation of real numbers) :



উভয়দিকে অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত একটি সরলরেখা $X'X$ লই ; এবং উহার উপর যে কোন একটি বিন্দু লইয়া O দ্বারা চিহ্নিত করি । মনেকরি এই O বিন্দুটি 0 (শূন্য) কে সূচিত করে । এখন, OX রেখার উপর একটি বিন্দু A_1 লই এবং ধরি, $OA_1=1$ একক । তাহা হইলে, A_1 বিন্দুটি 1 কে সূচিত করিবে । এইরূপ ক্ষেত্রে, O কে মূল বিন্দু, উহার ডান পার্শ্বে অবস্থিত OX কে ধনাত্মক পার্শ্ব এবং বামপার্শ্বে অবস্থিত OX' কে ঋণাত্মক পার্শ্ব বলা হইবে ।

OX' এর উপর A_1' বিন্দুটি যদি এমনভাবে লই, যেন, $OA_1'=OA_1=1$ হয়, তাহা হইলে, প্রচলিত প্রথানুযায়ী A_1' বিন্দুটি -1 কে সূচিত করিবে ।

এখন, OX ও OX' এর উপর যথাক্রমে A_n ও A'_n দুইটি বিন্দু লই যেন, $OA_n=OA'_n=n\times OA_1$, যেখানে, n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা । তাহা হইলে, A_n এবং A'_n বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে n এবং $-n$ কে সূচিত করিবে ।

এখন, মনে করি, p/q একটি মূলদ সংখ্যা যেখানে, $q(\neq 1)$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এখন, OA_1 রেখাংশকে q সমান অংশে বিভক্ত করি, এবং মনে করি, উহাদের একটি অংশ OQ; p ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, OX এর উপর P বিন্দু লই, যেন $OP=p\times OQ$ হয়; তাহা হইলে P বিন্দুটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ p/q কে সূচিত করিবে। কিন্তু p ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, OX' এর উপর P' বিন্দু লই, যেন $OP'=(-p)\times OQ$ হয়; তাহা হইলে, P' বিন্দুটি ঋণাত্মক ভগ্নাংশ p/q কে সূচিত করিবে। সুতরাং, p/q আকারের একটি মূলদ সংখ্যাকে $X'X$ এর উপর কেবলমাত্র একটি বিন্দু সূচিত করিবে; এবং বিভিন্ন মূলদ সংখ্যাকে $X'X$ এর উপরিস্থিত বিভিন্ন বিন্দু সূচিত করিবে।

আমরা জানি, দুইটি বিভিন্ন মূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা আছে এবং একই সরলরেখা $X'X$ এর উপর দুইটি বিন্দুর মধ্যে অসংখ্য বিন্দু আছে। এই অসংখ্য বিন্দু অসংখ্য বিভিন্ন মূলদ সংখ্যাকে সূচিত করিলেও, উহাদের মধ্যে অসংখ্য বিন্দু থাকিবে, যাহারা কোন মূলদ সংখ্যাকে সূচিত করিবে না। নিম্নের দৃষ্টান্তটি লক্ষ্যণীয়।

মনে করি, OAB একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ, যেখানে $OA=AB=1$; $\angle OAB=90^\circ$; তাহা হইলে, $OB^2=1^2+1^2=2$, অর্থাৎ $OB=\sqrt{2}$. এখন, O কে কেন্দ্র করিয়া এবং OB ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি যাহা OX কে L বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে, $OL=OB=\sqrt{2}$; সুতরাং L বিন্দুটি $\sqrt{2}$ কে সূচিত করিবে। কিন্তু $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। তাহা হইলে, L বিন্দু কোন মতেই কোন মূলদ রাশিকে সূচিত করিবে না।

যদিও প্রমাণ দুরূহ যুক্তি-সাপেক্ষ, $X'X$ এর উপর আরও অনেক বিন্দু আছে যাহারা মূলদ সংখ্যাকে সূচিত করিবে না।

$X'X$ সরলরেখার উপর যে বিন্দুটি মূলদ সংখ্যাকে সূচিত করিবে তাহাকে **মূলদ বিন্দু** (Rational point) এবং যে বিন্দুটি অমূলদ সংখ্যাকে সূচিত করিবে তাহাকে **অমূলদ বিন্দু** (Irrational point) বলা হইবে। এইরূপক্ষেত্রে, $X'X$ সরলরেখাকে **সংখ্যা-রেখা** বা **সংখ্যা-অক্ষ (Number axis)** বা **বাস্তব-অক্ষ** (Real axis) বলা হয়।

ক্যাণ্টর-ডেডিকিণ্ড-এর স্বতঃসিদ্ধ (Cantor-Dedekind's Axiom) :—

"একটি বাস্তব সংখ্যার জন্য কেবলমাত্র একটি বিন্দু সংখ্যা-অক্ষ $X'X$ এর উপর থাকিবে, যাহা ঐ সংখ্যাকে সূচিত করিবে; এবং বিভিন্ন বাস্তব সংখ্যার জন্য পৃথক্

পৃথক্ বিন্দু $X'X$ এর উপর থাকিবে, যাহারা ঐ সমস্ত সংখ্যাকে যথাক্রমে সূচিত করিবে। বিপরীতক্রমে, $X'X$ এর উপর প্রতিটি বিন্দু কোন না কোন একটি বাস্তব সংখ্যাকে সূচিত করিবে।"

সুবিন্যস্ত (well-arranged) বাস্তব সংখ্যাসমূহের মণ্ডলীকে **Arithmetic Continuum** বলা হয় এবং, সংখ্যা-অক্ষ $X'X$ এর উপরিস্থিত বাস্তব সংখ্যা-মণ্ডলীর সংখ্যাগুলির সূচক অনুরূপ বিন্দুগোষ্ঠীকে **Linear Continuum** বলা হয়।

1-6. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ:

উদাহরণ 1. দেখাও যে, যে কোন অযুগ্ম সংখ্যার বর্গ সর্ব্বদাই $8n+1$ আকারের, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

k যে কোন পূর্ণসংখ্যা হইলে, $4k\pm1$ সর্ব্বদাই অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হইবে। এখন, $(4k\pm1)^2=16k^2\pm8k+1.$

$$=8(2k^2\pm k)+1=8n+1$$

যেখানে, $n=2k^2\pm k=$ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $\log_2 5$ একটি অমূলদ রাশি।

যদি সম্ভব হয়, মনে করি $\log_2 5$ একটি মূলদ রাশি এবং $\log_2 5=p/q$ যেখানে p এবং q পূর্ণ সংখ্যা; $(q>0)$. তাহা হইলে, $2^{p/q}=5$, বা $2^p=5^q$; $(p>q>0)$; কিন্তু, ইহা অসম্ভব। সুতরাং, $\log_2 5$ একটি অমূলদ রাশি।

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $5+\sqrt{6}$ একটি অমূলদ রাশি।

প্রথমতঃ, $2<\sqrt{6}<3$. $\therefore$ $\sqrt{6}$ পূর্ণসংখ্যা নহে।

যদি সম্ভব হয়, মনে করি, $\sqrt{6}$ একটি মূলদ রাশি এবং $\sqrt{6}=p/q$, যেখানে, p এবং q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও পরস্পর মৌলিক, $q>1$. তাহা হইলে, বর্গ করিয়া পাই, $6=p^2/q^2$, বা $6q=p^2/q$. ....(A)

এখন, যেহেতু, p এবং q পরস্পর মৌলিক, p এবং q এর মধ্যে 1 ভিন্ন অপর কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকিবে না। তাহা হইলে, p^2 এবং q এর মধ্যে 1 ভিন্ন অন্য কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকিবে না। সুতরাং, p^2/q একটি সামান্য ভগ্নাংশ হইবে; কিন্তু $6q$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। তাহা হইলে, (A) এতে একটি পূর্ণসংখ্যা একটি সামান্য ভগ্নাংশের সমান—যাহা অসম্ভব। সুতরাং, $\sqrt{6}$ একটি অমূলদ রাশি।

যদি সম্ভব হয়, এখন ধরি $5+\sqrt{6}=r/s$, যেখানে r এবং s ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

তাহা হইলে, $\sqrt{6}=r/s-5=\dfrac{r-5s}{s}$

অর্থাৎ একটি অমূলদ রাশি একটি মূলদ রাশির সমান—যাহা অসম্ভব। সুতরাং, $5+\sqrt{6}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ 4. $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}=0$ হইলে, যেখানে a এবং b মূলদ রাশি, দেখাও যে, $a=b=0$.

যেহেতু, $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}=0$;

$\therefore$ $a\sqrt{3}\times\sqrt{2}=b\times 2$

বা, $a\sqrt{6}=2b$ ... ... (1)

মনে করি, $a\neq 0$; তাহা হইলে, (1) হইতে, $\sqrt{6}=2b/a$;

অর্থাৎ, একটি অমূলদ রাশি একটি মূলদ রাশির সমান; যাহা অসম্ভব। সুতরাং, অতি অবশ্যই, $a=0$, এবং তখন, (1) হইতে, $b=0$.

প্রশ্নমালা 1

1. (i) p^2 একটি যুগ্ম সংখ্যা হইলে, দেখাও যে, p একটি যুগ্ম সংখ্যা; দেওয়া আছে, p একটি পূর্ণসংখ্যা।

(ii) m একটি যুগ্ম সংখ্যা হইলে, দেখাও যে, m^3 একটি যুগ্ম সংখ্যা হইবে।

(iii) q^3 একটি যুগ্ম সংখ্যা হইলে, দেখাও যে, q একটি যুগ্ম সংখ্যা; দেওয়া আছে, q একটি পূর্ণসংখ্যা।

2. দেখাও যে,

(i) p একটি অযুগ্ম সংখ্যা হইলে, p^2 অযুগ্ম হইবে।

(ii) m^2 যদি 5 এর গুণিতক হয়, তবে m সংখ্যাটি 5 এর গুণিতক; $m=$ পূর্ণসংখ্যা দেওয়া আছে।

(iii) m এবং n দুইটি যুগ্ম সংখ্যা হইলে, $m+n$ একটি যুগ্ম সংখ্যা হইবে।

(iv) m এবং n দুইটি অযুগ্ম সংখ্যা হইলে, $m+n$ একটি যুগ্ম সংখ্যা হইবে।

3. (i) দেখাও যে, 0 (শূন্য) যে কোন ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য।

(ii) দেখাও যে, যে কোন তিনটি অখণ্ড (ধনাত্মক) ক্রমিক সংখ্যার গুণফল 6 দ্বারা বিভাজ্য।

(iii) n যে কোন পূর্ণসংখ্যা হইলে, দেখাও যে, $n(n+1)(2n+1)$ সর্বদাই 6 দ্বারা বিভাজ্য।

4. (i) 50 এবং 100 এর মধ্যবর্তী সমস্ত মৌলিক সংখ্যাগুলি উল্লেখ কর।

(ii) যদি $n=p\times q$ হয় যেখানে, p এবং q পরস্পর মৌলিক এবং $p>q$, দেখাও যে, $p-q$ এবং n পরস্পর মৌলিক।

(iii) $n=pqr$ হইলে যেখানে $p, q, r,$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা তিনটি n এর মৌলিক উৎপাদক, দেখাও যে, p এবং qr পরস্পর মৌলিক।

5. (i) r এবং s দুইটি মূলদ সংখ্যা হইলে, দেখাও যে, $r+s$, $r-s$, rs এবং r/s, $(s\neq 0)$ মূলদ সংখ্যা।

(ii) দেখাও যে, $0{\cdot}4\dot{5}$ এবং $0{\cdot}\dot{4}\dot{5}$ সংখ্যা দুইটি মূলদ।

6. (i) দেখাও যে, যে কোন মূলদ রাশিকে আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ করা যাইবে।

(ii) M/N একটি মূলদ সংখ্যা হইলে, যেখানে N একটি মৌলিক সংখ্যা, দেখাও যে, এই ভগ্নাংশটিকে একটি আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ করা যাইবে যেখানে দশমিক বিন্দুর পর অধিকপক্ষে $N-1$ সংখ্যক অঙ্কের পর ঠিক এই সংখ্যক এই অঙ্কগুলি আবৃত্ত হইতে থাকিবে।

7. (i) দুইটি অমূলদ রাশি উল্লেখ কর, যাহাদের যোগফল এবং গুণফল উভয়েই মূলদ রাশি হইবে।

(ii) $\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{5}$ এর মধ্যবর্তী 5 টি অমূলদ এবং 5 টি মূলদ রাশির উল্লেখ কর।

8. নিম্নোক্ত রাশিগুলির কোন্‌টি মূলদ এবং কোন্‌টি অমূলদ তাহা নির্দেশ কর। এবং তৎসহ কারণ দর্শাও :

(i) $\sqrt{3}$; (ii) $\sqrt{5}$; (iii) $3+\sqrt{2}$; (iv) $\sqrt[3]{5}$; (v) $\log_5 3$; (vi) $0{\cdot}470$; (vii) ${\cdot}\dot{9}$; (viii) ${\cdot}\dot{5}\dot{4}$; (ix) $0{\cdot}48\dot{0}$; (x) $0{\cdot}9\dot{2}5\dot{9}$; (xi) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

9. (i) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ এবং $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ এর মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তর? (মান বাহির করিয়া দেখানো চলিবে না।)

(ii) দেখাও যে, $\sqrt{3}>\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{2}$ এর মধ্যবর্তী চারিটি অমূলদ সংখ্যার উল্লেখ কর।

(iii) 0 এবং 1 এর মধ্যে কি কোন অমূলদ সংখ্যা আছে? যদি থাকে তবে তাদের সংখ্যা কত? এইরূপক্ষেত্রে, 5টি অমূলদ সংখ্যার নাম কর যদি, থাকে।

(iv) $r\sqrt{2}+s\sqrt{3}=0$ হইলে, যেখানে r এবং s মূলদ, দেখাও যে $r=s=0$.

(v) "ধনাত্মক পূর্ণ বর্গ সংখ্যা ভিন্ন অপর কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার বর্গমূল মূলদ সংখ্যা হইতে পারে না"—প্রমাণ কর।

10. নিম্নোক্ত সংখ্যাগুলির মধ্যে যেগুলিকে আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ করা হইয়া থাকে কেবল তাহাদের উল্লেখ কর এবং মান বাহির কর :

(i) $\frac{12}{13}$; (ii) $\frac{13}{14}$; (iii) $\frac{15}{16}$; (iv) $\frac{319}{625}$;

(v) $\frac{36}{37}$; (vi) $\frac{84}{85}$; (vii) $\frac{90}{91}$; (viii) $\frac{3^2 4^2}{2^2 5^3}$;

(ix) $\sqrt{7}$; (x) $\sqrt[3]{9}$; (ix) $3+\sqrt{6}$; (xii) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$.

11. নিম্নোল্লিখিত দশমিক ভগ্নাংশসমূহের যেগুলি মূলদ সংখ্যাকে সূচিত করে তাহাদের নির্দেশ কর :

(i) 1·414525636747858 ;

[দশমিক বিন্দুর পর সসীম সংখ্যক পদ পর্যন্ত] ;

(ii) 5·246246246246··· ··· ··· ;

[এইরূপ 246 অসীমপদ পর্যন্ত আবৃত্ত হইতে থাকিবে]

(iii) 2·103100310003100003··· ··· ··· ;

[এইভাবে 1 এবং 3-এর মধ্যে 0 এর সংখ্যা বাড়িতে থাকিবে]।

12. নিম্নোক্ত উক্তিগুলির সত্যতা নিরূপণ কর :

(i) যে কোন দুইটি বিভিন্ন মূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা আছে।

(ii) যে কোন দুইটি বিভিন্ন অমূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা আছে।

(iii) যে কোন মূলদ সংখ্যাকে অসীম দশমিকে পরিণত করা যাইতে পারে।

(iv) সংখ্যা-অক্ষের উপরিস্থিত প্রতিটি বিন্দু একটি এবং কেবলমাত্র একটি বাস্তব সংখ্যাকে সূচিত করিবে এবং বিভিন্ন বিন্দু বিভিন্ন বাস্তব সংখ্যা সূচিত করিবে।

(v) কোন মূলদ সংখ্যা নাই যাহার বর্গ 2 ; কিন্তু একটি বাস্তব সংখ্যা আছে যাহার বর্গ 2.

দ্বিতীয় অধ্যায়

সেটের মৌলিক উপাদান

(Fundamentals of Sets)

2·1. (1) উপস্থাপন :

আমাদের দৈনন্দিন জীবনে আমরা কয়েকটি প্রাণী বা কতিপয় বস্তুকে সমষ্টিগত-ভাবে বিভিন্ন নামে অভিহিত করিয়া থাকি। যেমন, **এক পাল** ভেড়া, **এক দল** ডাকাত, **এক ঝাঁক** পায়রা, **এক সারি** তালগাছ, **এক সেট** জামা, **এক সেট** বই, ইত্যাদিতে কতগুলি বিশিষ্ট **বিশেষণ** সাধারণতঃ ব্যবহার করিয়া থাকি। এখানে **পাল, দল, ঝাঁক, সারি,** ও **সেট** শব্দগুলি দ্বারা বিভিন্ন প্রাণী বা বস্তুর **সংকলন** (collection)-কে বুঝাইতেছে।

বর্তমান গণিতশাস্ত্রে **সেট** (set) শব্দটি আরও ব্যাপক অর্থে প্রযুক্ত। বিগত কয়েকটি দশকে গণিতের পরিসীমার বিস্তৃতির সঙ্গে বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় উহার প্রয়োগ অপরিহার্য হইয়া উঠিয়াছে। গণিতের যে সমস্ত মূলতত্ত্বের প্রয়োগ আধুনিক বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় পরিলক্ষিত হয়, **সেটতত্ত্ব** তাহাদের মধ্যে অন্যতম। আবার বীজগণিত, জ্যামিতি, ক্যালকুলাস, প্রভৃতি গণিতের বিভিন্ন শাখার মধ্যে এই সেটতত্ত্বের মাধ্যমে একটি যোগসূত্র স্থাপন সম্ভব হইয়াছে। জার্মান গণিতজ্ঞ **জর্জ ক্যাণ্টর** (Georg Cantor, 1845-1918) প্রথম সেটতত্ত্বের উদ্ভাবন করেন।

'সেট' এর যথার্থ সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভবপর নয় ; স্বজ্ঞাত (Intuitive) ধারণা থেকে ইহাকে আলোচনা করা যাইতে পারে। এই পুস্তকে সেটতত্ত্বের বিশদ আলোচনা করা হইবে না ; পরবর্তী আলোচনাতে সেটতত্ত্বের যতটুকু প্রয়োজন হইবে, কেবল সেইটুকুই এখানে আলোচনা করা হইতেছে।

(2) সেট :

বস্তুসমূহের একটি সুনির্দিষ্ট সংকলনকে **সেট** আখ্যা দেওয়া যাইতে পারে, যদি

(i) সংকলনটি **সুসংজ্ঞাত** (well-defined) হয়,

(ii) সংকলনটির অন্তর্গত যে কোন দুইটি বস্তু **স্বতন্ত্র** (different) হয়, এবং

(iii) সংকলনটির অন্তর্গত বস্তুগুলি **ক্রম-নিরপেক্ষ** (independent of order) হয়।

সেইরূপ, সংখ্যা-গোষ্ঠী অথবা বিন্দুসমূহের একটি সুনির্দিষ্ট সংকলনকে একটি সেট বলা যাইতে পারে, যদি ঐ সংকলনটি উপরোক্ত তিনটি শর্তের অধীন হয়।

যে সংকলনটিকে সেট বলা সম্ভবপর হইবে, তাহার অন্তর্গত প্রত্যেকটি বস্তুকে এক একটি **পদ (element বা, member)** বলা হয়।

দৃষ্টান্ত : (a) একটি বাক্সে বিভিন্ন রঙের 5টি মার্বেল আছে। এই 5টি মার্বেলের সংকলনটিকে একটি সেট বলা যাইতে পারে ; কারণ, এই সংকলনের প্রতিটি বস্তু সুনির্দিষ্ট এবং স্বতন্ত্র ; তাহা ছাড়া যে কোন ক্রমে তাহাদের নাম উল্লেখ করা যাইতে পারে।

(b) 1 এবং 15-এর মধ্যবর্তী অখণ্ড যুগ্ম সংখ্যাসমূহের সংকলনটি একটি সেট গঠন করে। কারণ, এই সংকলনের অন্তর্গত সংখ্যাগুলি 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 সুনির্দিষ্ট এবং স্বতন্ত্র ; অধিকন্তু, এই সংখ্যাগুলিকে যে কোন ক্রমে যেমন, 4, 10, 2, 14, 6, 8, 12 এইভাবে লিখিলেও ইহা সেই পূর্বোল্লিখিত সংকলনটিকেই বুঝাইবে। এখানে, এই সংকলনের প্রতিটি সংখ্যা সেটের এক একটি পদ।

(c) 1 এবং 25 এর মধ্যবর্তী 5টি অখণ্ড যুগ্ম সংখ্যা সংকলনকে সেট বলা যাইবে না ; কারণ, এইরূপ ক্ষেত্রে কোন্ 5টি সংখ্যা লইয়া সংকলনটি গঠিত তাহা সুসংজ্ঞাত নহে।

(d) একাদশ শ্রেণীর 50 জন ছাত্রের সংকলনটিকে সেট বলা যায় না ; কারণ, এইক্ষেত্রে, সংকলনটি সুসংজ্ঞাত নয়।

(e) 2, 3, 4, 4, 5—এই পাঁচটি সংখ্যার সংকলনকে সেট বলা যাইবে না ; কারণ, যদিও সংকলনটি সুসংজ্ঞাত, কিন্তু পদগুলি স্বতন্ত্র নয়।

2-2. সেট-এর লিখন পদ্ধতি।

সাধারণতঃ ইংরেজী বর্ণমালার Italic বড় হরফ $A, B, C \cdots\cdots$ দ্বারা সেটকে প্রকাশ করা হয় ; এবং Italic ছোট অক্ষর $a, b, c \cdots\cdots$এর একটি দ্বারা অনুরূপ সেটের অন্তর্গত যে কোন পদকে বুঝানো হয়। যেমন, 1, 3, 5, 7, 9 এই 5টি সংখ্যার সংকলনকে সেট A বলিতে পারি ; এই সংকলনটিকে, B বা C বা অন্য কোন নামেও প্রকাশ করিতে পারি। এই 5টি পদের যে কোনটিকে a বা b বা c বা x দ্বারা সূচিত করিতে পারি।

সেট A-এর অন্তর্গত কোন পদ x_1 হইলে, $x_1 \in A$; এবং y_1, সেট A-এর অন্তর্গত কোন পদ না হইলে, $y_1 \notin A$ এইরূপ লেখা হইয়া থাকে।

যেমন, 1, 3, 5, 7, 9 এই 5টি সংখ্যার সংকলনকে সেট A বলিলে, $1\in A$; $3\in A$; $5\in A$; $7\in A$, $9\in A$, কিন্তু $2\notin A$; $4\notin A$; $6\notin A$, ইত্যাদি।

যখন কোন সেটের পদগুলি সুস্পষ্টভাবে জানা থাকে, তখন তাহাদিগকে সাধারণতঃ দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে একটির পর একটি কমা দিয়া (যে কোন ক্রমে) রাখিয়া প্রকাশ করা হয়। 1, 3, 5, 7, 9—এই 5টি সংখ্যার সংকলনকে সেট A বলিলে,

$$A=\{1, 3, 5, 7, 9\};$$

বা, $$A=\{3, 7, 1, 9, 5\};$$ ইত্যাদি।

অনুরূপভাবে, a, e, i, o, u—এই 5টি স্বরবর্ণ লইয়া গঠিত সেটকে B বলিলে,

$$B=\{a, e, i, o, u\}.$$

কখনও কখনও, সেটের পদগুলিকে প্রথম বন্ধনীর মধ্যে রাখিয়া প্রকাশ করা হইয়া থাকে ; যেমন,

$$B=(a, e, i, o, u);$$

$$C=(2, 4, 6, 0, 5, 7).$$

ইংরেজী মাসসমূহের সেটকে X দ্বারা সূচিত করিলে,

$X=\{$ ইংরেজী মাসসমূহ $\}$.

সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সংকলনকে "সেট N" বলিলে,

$N=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ অসীমপদ পর্য্যন্ত $\}$

বা, $N=\{$ স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহ $\}$।

"সেট A" এর যে কোন পদকে x বলিলে, এবং x পদটি কোন একটি ধর্ম (property) $P(x)$ মানিয়া চলিলে, প্রতীকের সাহায্যে ইহাকে লেখা যাইতে পারে,

$A=\{x \mid P(x)\}$; অথবা ; $A=\{x : P(x)\}$.

যেমন, 10 এবং 50 এর মধ্যবর্তী অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যার সেটকে A বলিলে,

$A=\{x/x=$ অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা ; $10<x<50\}$.

1 এবং 2 এর মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে B বলিলে,

$B=\{x \mid 1<x<2\}$; বা, $B=\{x : 1<x<2\}$.

সমুদয় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N হইলে,

$$X=\{x \in N \mid x<4\}=\{1, 2, 3\};$$

$$Y=\{x \in N \mid x \leqslant 4\}=\{1, 2, 3, 4\}.$$

1 ও 5 এবং উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব রাশির সংকলনকে সেট C বলিলে,

$$C=\{x/1 \leqslant x \leqslant 5\}, \text{ অথবা } C=\{x : 1 \leqslant x \leqslant 5\}.$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \quad \cdots \text{ অসীম পদ পর্যন্ত}$$

সংখ্যাগুলির সংকলনকে সেট X বলিলে,

$$X=\left\{\frac{1}{n} \mid n=1, 2, 3, 4, \cdots\right\}.$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots \text{ অসীমপদ পর্যন্ত}$$

সংখ্যাসমূহের সংকলনকে সেট Y বলিলে,

$$Y=\left\{x \mid x=\frac{1}{2^n};\ n=1, 2, 3, 4, \cdots\right\}$$

2-3. সসীম সেট ও অসীম সেট।

কোনও একটি সেটের পদগুলির সংখ্যা গণনা দ্বারা নির্ণয় করা সম্ভবপর হইলে, অর্থাৎ, উহার পদসংখ্যা সসীম হইলে, ঐ সেটটিকে **সসীম সেট (Finite set)** বলা হইবে; অন্যথায় উহাকে **অসীম সেট (Infinite set)** বলা হইবে। যেমন,

$$A=\{1, 3, 5, 7, 9\};$$

$$B=\{a, e, i, o, u\}$$

সসীম সেটের উদাহরণ; এবং

$$E=\{x \mid 1<x<2\};$$

$$X=\left\{\frac{1}{n} \mid n=1, 2, 3, 4, \cdots\right\};$$

অসীম সেটের উদাহরণ।

মন্তব্য : কোনও সেটের পদসংখ্যা এক হইলে উহাকে **একপদী সেট (unitary set)** বলা হইবে; যেমন, $D=\{5\}$.

2-4. উপসেট।

দুইটি সেট A এবং B যদি এমন হয়, যে B এর প্রতিটি পদ A এর পদ, তাহা হইলে, B কে A এর **উপসেট (Subset)**, বা, B সেট A সেটের অন্তর্ভুক্ত বলা হইবে এবং তখন লেখা হইবে :

$$B \subseteq A, \text{ অথবা, } A \supseteq B.$$

যদি এমন হয় যে B এর প্রতিটি পদ A-তে আছে, কিন্তু A এর অন্ততঃপক্ষে একটি পদ আছে যাহা B-তে নাই, তখন B কে A এর **যথার্থ উপসেট (Proper subset)** এবং A কে B এর **অধিসেট (Superset)** বলা হয়; এবং তখন লেখা হইবে :

$$B \subset A, \text{ অথবা, } A \supset B.$$

A ও B সেট দুইটি যদি এরূপ হয় যে, B এর প্রতিটি পদ A তে আছে, আবার A এর প্রতিটি পদ B তেও আছে, অর্থাৎ, $B \subseteq A$ এবং $A \subseteq B$, তাহা হইলে, A ও B সেট দুইটিকে **সমসেট (Equal sets)** বলা হইবে ; এবং তখন লেখা হইবে : $A = B$.

দৃষ্টান্ত :

(i) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ এবং $B = \{2, 5, 3, 4\}$ হইলে, $B \subset A$.

(ii) $A = \{x : 1 < x < 3\}$ এবং $B = \{x : 1 < x \leqslant 2\}$ হইলে, $B \subset A$.

(iii) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}\right\}$; $B = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$ হইলে $A = B$.

(iv) $A = \{2, 3\}$ এবং $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0$ এর বীজ $\}$ হইলে, $A = B$.

2-5. শূন্য সেট ও সার্বিক সেট।

যে সেটের কোন পদ থাকে না সেই সেটকে **শূন্য সেট (Empty set, or, Null set, or, Void set)** বলে ; এবং ইহাকে ϕ, বা $\{\ \}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন 1 ও 2 এর মধ্যবর্তী পূর্ণ সংখ্যার সেটটি শূন্য সেট। সুতরাং,

$$\{x : x \text{ একটি পূর্ণসংখ্যা, অথচ } 1 < x < 2\} = \phi.$$

সেইরূপ, $\{x \mid x =$ একটি বাস্তব রাশি, অথচ $x^2 + 1 = 0\} = \phi$;

এবং $\{x : x =$ মৌলিক পূর্ণসংখ্যা এবং $24 < x < 28\} = \{\ \}$.

সেট সম্পর্কিত আলোচনায়, আলোচ্য সেটসমূহ যে বিশেষ সেটের উপসেট তাহাকে ঐ সেটগুলির সাপেক্ষে **সার্বিক সেট (Universal set)** বলা হয় ; এবং ইহাকে সাধারণতঃ U দ্বারা সূচিত করা হয়। তবে, ইংরেজী বর্ণমালার অন্য যে কোন বড় হরফ দ্বারা ইহাকে সূচিত করা যাইতে পারে।

দৃষ্টান্ত : (i) নির্দিষ্ট সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সেটগুলি লইয়া আলোচনা করিলে, সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে উহাদের সার্বিক সেট ধরা যাইতে পারে।

(ii) বাস্তব সংখ্যার সেটগুলি লইয়া আলোচনাকালে, উহাদের সাপেক্ষে সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে সার্বিক সেট বলা যাইতে পারে। এইরূপ ক্ষেত্রে, সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেটটি এই সার্বিক সেটের উপসেট হইবে।

মন্তব্য :

(i) যে কোন শূন্য সেট অবশ্যই সসীম সেট।

(ii) একটি শূন্য সেট যে কোন সেটের উপসেট।

(iii) দুইটি শূন্য সেটকে সমসেট বলা যায়।

(iv) প্রতিটি শূন্য সেট সার্বিক সেটের উপসেট।

(v) একটি সার্বিক সেট, সসীম সেট অথবা অসীম সেটও হইতে পারে।

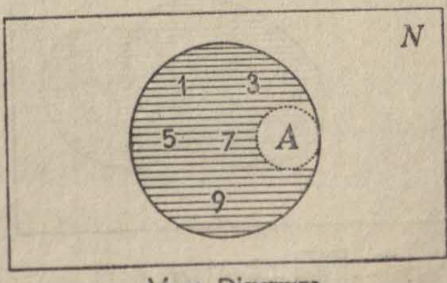
2-6. ভেন চিত্র (Venn Diagram).

উনবিংশ শতাব্দীতে ব্রিটিশ গণিতজ্ঞ **জন্ ভেন** তাঁহার 'Symbolic Logic' পুস্তকে যে চিত্র ব্যবহার করেন, তাহার নাম **ভেন চিত্র**। সেটের বিভিন্ন ধারণা সুস্পষ্ট করার জন্য ভেন চিত্রের ব্যবহার হয়। ভেন চিত্রে, একটি আয়তক্ষেত্রের ভিতরের প্রতিটি বিন্দু দ্বারা সার্বিক সেটের পদ সূচিত করা হয়; এবং সার্বিক সেটের উপসেটগুলিকে ঐ আয়তক্ষেত্রের অন্তর্গত যে কোন সীমিত ক্ষেত্র অথবা বৃত্ত দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

(a). মনে করি,

$N=\{n \mid n=1, 2, 3, \cdots\}$

এবং $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$.



Venn Diagram

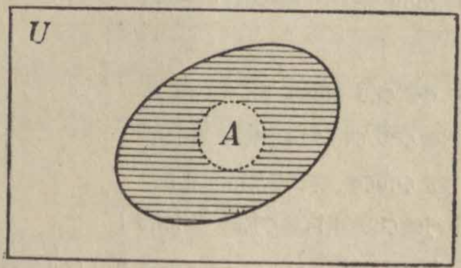
যেখানে A এর সার্বিক সেট N. ইহাদের **ভেন চিত্র** উপরে দেওয়া হইল।

(b) মনে করি,

$U = \{ x \mid x =$ যে কোন বাস্তব রাশি $\}$;

এবং, $A = \{x \mid 2 < x \leqslant 10\}$

এখানে A এর সার্বিক সেট **U.** ইহাদের **ভেন চিত্র** নিম্নে দেওয়া হইল।



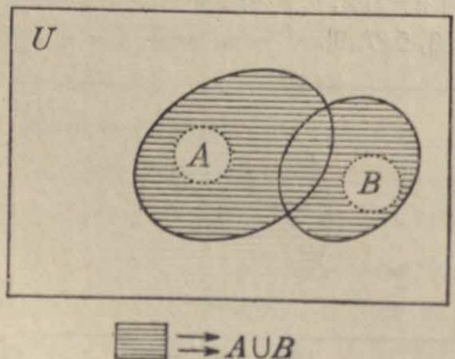
Venn Diagram

2-7. সেটের যোগ, ছেদ, বিচ্ছেদ, পূরক ও অন্তর।

(1) সেটের যোগ :

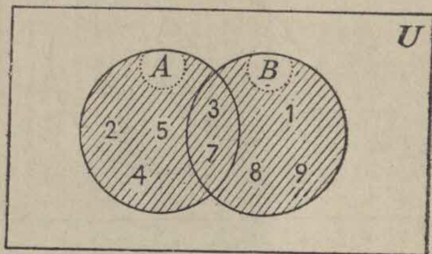
মনে করি, সার্বিক সেট U-এর A এবং B দুইটি উপসেট। A এবং B-এর সকল পদ দ্বারা গঠিত সেটটিকে A ও B-এর **যোগ (Union বা Join)** বলা হয় এবং ইহাকে $A \cup B$ অথবা $A + B$ দ্বারা সূচিত করা হয় ; অর্থাৎ,

$$A \cup B = \{x : x \in A, \text{ বা}, \ x \in B\}.$$



উপরে AUBর এর একটি ভেন চিত্র দেখানো হইয়াছে।

দৃষ্টান্ত ঃ (1) $A=\{2, 3, 4, 5, 7\}$ এবং $B=\{1, 3, 7, 9, 8\}$ হইলে, $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$; যাহার ভেন চিত্র নিম্নে দেওয়া হইল।



⇒ $A \cup B$

(2) $A=\{x : 0<x<2\}$; $B=\{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ হইলে,

$$A \cup B=\{x : 0 \leqslant x<2\}.$$

(3) $X=\{1, 2, 3, 4\}$; $Y=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ হইলে,

$$X \cup Y=\left\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4\right\}.$$

(4) $\{2, 5, 4, 6\} \cup \{1, 5, 3, 4\}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

দ্রষ্টব্য ঃ (i) $A \cup B=B \cup A$; (ii) $A \cup A=A$;

(iii) $A \cup \phi=A$; (iv) $A \cup U=U$;

(v) $A \cup B=B$, যদি $A \subseteq B$.

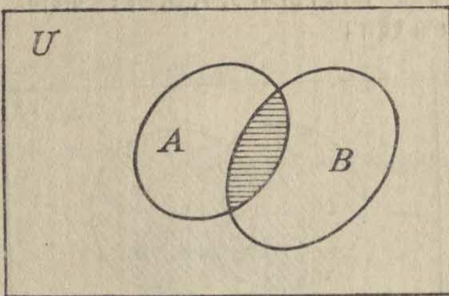
মন্তব্য ঃ অনেক সময় $A \cup B$-এর পরিবর্তে $A+B$ লেখা হয়।

(2) সেটের ছেদ ঃ

A এবং B সেট দুইটি সার্বিক সেট U-এর উপসেট হইলে এবং A ও B-এর মধ্যে সাধারণ পদ থাকিলে, ঐ সাধারণ পদগুলি লইয়া যে সেট গঠন করা যায় তাহাকে A ও B-এর **ছেদ (Meet, বা, Intersection)** বলা হয় ; এবং ইহাকে $A \cap B$ অথবা AB দ্বারা সূচিত করা হয় ; অর্থাৎ,

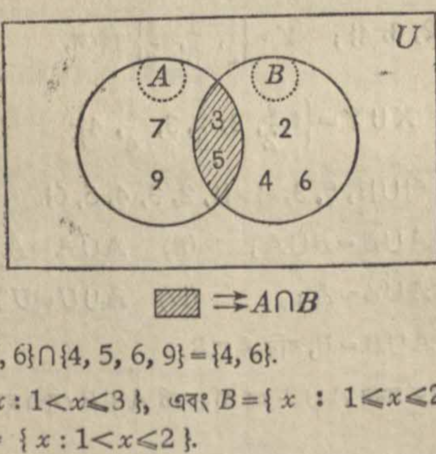
$$A \cap B=\{x : x \in A \text{ এবং } x \in B\}.$$

নিম্নে $A \cap B$ বা $B \cap A$ এর একটি ভেনচিত্র দেখানো হইল।



$\Rightarrow A \cap B$

দৃষ্টান্ত ঃ (1) $A=\{3, 5, 7, 9\}$;
$B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$ হইলে $A \cap B=\{3, 5\}$;
যাহার ভেন চিত্র নিম্নে দেওয়া হইল।



$\Rightarrow A \cap B$

(2) $\{3, 4, 7, 6\} \cap \{4, 5, 6, 9\}=\{4, 6\}$.

(3) $A=\{x : 1<x \leqslant 3\}$, এবং $B=\{x : 1 \leqslant x \leqslant 2\}$ হইলে,
$A \cap B=\{x : 1<x \leqslant 2\}$.

দ্রষ্টব্য ঃ (i) $A \cap B=B \cap A$, (or, $AB=BA$) ;
(ii) $A \cap A=A$; (iii) $A \cap \phi=\phi$;
(iv) $A \cap U=A$; (v) $A \cap B=B$, যদি $B \subseteq A$.

(3) বিচ্ছেদ সেট ঃ

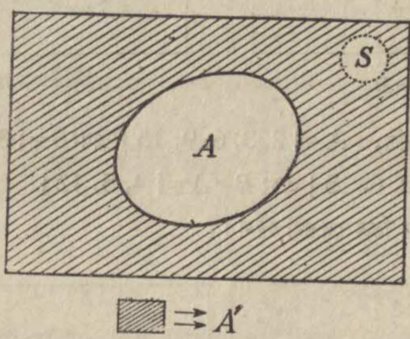
মনে করি, $A \subset U$ এবং $B \subset U$; এবং A ও B এর মধ্যে কোন সাধারণ পদ নাই। তাহা হইলে, $A \cap B=\phi$. এইরূপ ক্ষেত্রে, A এবং B কে **বিচ্ছেদ সেট (Disjoint sets)** বলা হয়। যেমন,

$A=\{1, 3, 5, 7\}$; এবং $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ হইলে, $A\cap B=\phi$. সুতরাং, A ও B বিচ্ছেদ সেটের উদাহরণ।

(4) পূরক সেট :

যদি সেট A, সার্বিক সেট S এর উপসেট হয়, তাহা হইলে S সেটের যে সমস্ত পদ A তে থাকিবে না তাহারা S এর একটি উপসেট গঠন করিবে। সেই উপসেটকে S এর সাপেক্ষে A **সেটের পূরক (Complement)** সেট বলা হয়, এবং ইহাকে A' বা $C(A)$ (বা, $\bar{A}$) দ্বারা সূচিত করা হয়; অর্থাৎ,

$A'\equiv C(A)=\{x/x\in S$, কিন্তু $x\notin A\}$. ইহাকে নিম্নে ভেন চিত্রে দেখানো হইল।



দৃষ্টান্ত : **(1)** মনে করি, সার্বিক সেট S এর উপসেট A; যেখানে, $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A=\{4, 6, 8, 10\}$;
তাহা হইলে, $A'=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$.

(2) ইংরেজী বর্ণমালায় 26টি ছোট অক্ষরের সেটকে সার্বিক সেট U ধরিলে এবং $A=\{$a, e, i, o, u$\}$= সকল ছোট অক্ষরের স্বরবর্ণের সেট হইলে,

$A'=\{$ইংরেজী বর্ণমালার ছোট অক্ষরের সকল ব্যঞ্জনবর্ণ$\}$.

দ্রষ্টব্য : (i) $A\cup A'=U$; (ii) $A\cap A'=\phi$;
(iii) $A'\cup U=U$; (iv) $A'\cap U=A'$;
(v) $(A')'=A$; (vi) $U'=\phi$ এবং $\phi'=U$.

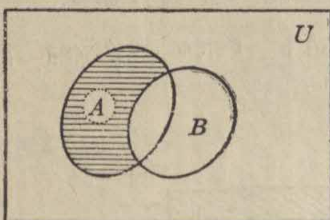
(5) সেটের অন্তর :

মনে করি, সার্বিক সেট U এর A এবং B দুইটি উপসেট। A এবং B এর **অন্তর (Difference)** এমন একটি সেট যাহা $A-B$ দ্বারা সূচিত এবং যাহার সকল পদ A এর মধ্যে আছে, কিন্তু উহার একটি পদও B এর মধ্যে নাই ; অর্থাৎ,

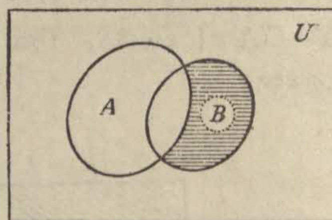
$A-B=\{x: \ x\in A$, কিন্তু $x\notin B\}$.

অনুরূপভাবে, $B-A=\{x: x\in B$, কিন্তু $x\notin A\}$.

নিম্নে উহাদের ভেন চিত্র দেওয়া হইল।



▤ $\rightleftarrows A-B$

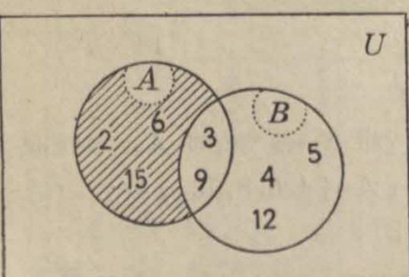


▤ $\rightleftarrows B-A$

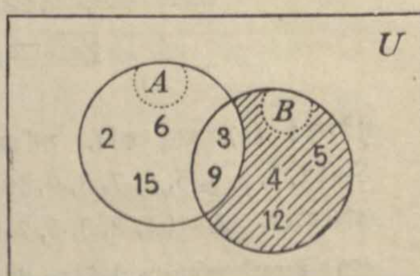
দৃষ্টান্ত : (i) ধরি, $A=\{2, 3, 6, 9, 15\}$ এবং $B=\{3, 4, 5, 9, 12\}$.

$\therefore \ A-B=\{2, 6, 15\}$ এবং $B-A=\{4, 5, 12\}$.

নিম্নে উহাদের ভেন চিত্র দেওয়া হইল।



▨ $\rightleftarrows A-B$



▨ $\rightleftarrows B-A$

(ii) ধরি, $A=\{x \mid 1<x<3\}$; $B=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$.

$\therefore \ A-B=\{x \mid 2<x<3\}$; এবং $B-A=\{1\}$.

দ্রষ্টব্য : (i) $A-A=\phi$; (ii) $A-A'=A$; (iii) $A'-A=A'$;
(iv) $A-B=A$, যদি A ও B পরস্পর বিচ্ছেদ সেট হয়।

2-9. কতিপয় প্রয়োজনীয় ব্যবহারিক চিহ্ন :

(a) ধ্রুবক : বিজ্ঞানের কোন পরীক্ষণে যে রাশির মান অপরিবর্তিত থাকে তাহাকে **ধ্রুবক (Constant)** বলে। যেমন, $2, 5, \pi, e, a, \alpha, \theta$ ইত্যাদির এর প্রত্যেকটি উক্ত পরীক্ষণে এক একটি ধ্রুবক হইতে পারে।

ধ্রুবক দুই শ্রেণীর হইতে পারে। বিজ্ঞানের যে কোন পরীক্ষণের ক্ষেত্রে, কোন একটি রাশির মান একই থাকিলে তাহাকে **নির্দ্দিষ্ট ধ্রুবক (Absolute Constant)** বলা হইবে। যেমন, $2, 5, \pi, e$ ইত্যাদি নির্দ্দিষ্ট ধ্রুবকের উদাহরণ। যে কোন বাস্তব রাশি (real number) মাত্রই নির্দ্দিষ্ট ধ্রুবক।

বিজ্ঞানের কোন এক বিশেষ পরীক্ষণে যে রাশির মান অপরিবর্ত্তিত থাকে, কিন্তু বিভিন্ন পরীক্ষণে উহার মান নির্দ্দিষ্ট অথচ বিভিন্ন, সেই রাশিকে **অনির্দ্দিষ্ট ধ্রুবক (Variable Constant, বা Parameter)** বলা হয়।

$x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের সমীকরণে a অনির্দ্দিষ্ট ধ্রুবক। এখানে a এর বিভিন্ন নির্দ্দিষ্ট মানের জন্য বৃত্তের আকার বিভিন্ন হইবে।

(b) চলরাশি ও অন্তরা :

মনে করি, A কতিপয় বাস্তব রাশির একটি সেট এবং প্রতীক x এই সেটের অন্তর্গত যে কোন রাশিকে সূচিত করে। তাহা হইলে, এইরূপ ক্ষেত্রে, A এর সাপেক্ষে x কে **চলরাশি (Variable)** এবং A এর সকল পদকে সমষ্টিগতভাবে (Collectively) x এর **ব্যাপ্তি (Domain)** বলা হইবে। চলরাশি x **বিশ্লিষ্ট (Discrete)** অথবা **সন্তত (Continuous)** হইতে পারে।

যেমন, $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং প্রতীক x এই A সেটের যে কোন পদকে সূচিত করিলে, (অর্থাৎ, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$ হইলে), A এর সাপেক্ষে x চলরাশিটি **বিশ্লিষ্ট** এবং $1, 2, 3, 4, 5$—এই পাঁচটি সংখ্যা সমষ্টিগতভাবে x এর **ব্যাপ্তি** হইবে।

মনে করি, a এবং b দুইটি নির্দ্দিষ্ট বাস্তব রাশি যেখানে $a<b$. এখন a ও b এর মধ্যবর্ত্তী সকল বাস্তব রাশির সংখ্যাকে B সেট বলিলে, (যাহার মধ্যে a, বা, b, বা, উভয়ে থাকিতে পারে অথবা নাও থাকিতে পারে), এবং x এই B সেটের সাপেক্ষে চলরাশি হইলে, এইরূপক্ষেত্রে, x-কে **সন্তত চলরাশি (Continuous variable)** এবং B সেটের অন্তর্গত বাস্তব রাশিসমূহকে x এর **অন্তরা** বা **অবকাশ (Interval)** বলা হয়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

মনে করি, সকল বাস্তব সংখ্যার সেটটি R; তাহা হইলে বাস্তব রাশির যে কোন সেটের সাপেক্ষে সার্বিক সেট R হইবে। R এর সাপেক্ষে x চলরাশি এবং $a \in R$ ও $b \in R$ হইলে, যেখানে $a<b$, নিম্নলিখিত প্রতীকসমূহের অর্থ প্রকাশ করা হইল :

$[a, b]=\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$; $]a, b[=\{x : a<x<b\}$;

$[a, b[=\{x : a \leqslant x<b\}$; $]a, b]=\{x : a<x \leqslant b\}$;

$[a, \infty[=\{x \in R : a \leqslant x\}$; $]a, \infty[=\{x \in R : a<x\}$;

$]-\infty, a]=\{x \in R : x \leqslant a\}$; $]-\infty, a[=\{x \in R : x<a\}$.

$[a, b]$-কে **বদ্ধ অন্তরা** (Closed interval);

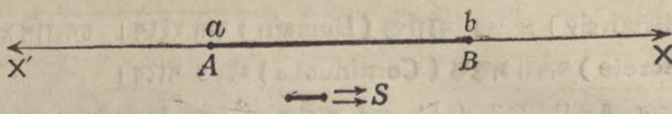
$]a, b[$-কে **মুক্ত অন্তরা** (Open interval) বলা হয়।

$[a, b[$ $x=a$ তে বদ্ধ কিন্তু $x=b$ তে মুক্ত ; এবং

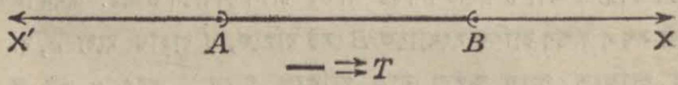
$]a, b]$ $x=a$ তে মুক্ত কিন্তু $x=b$ তে বদ্ধ।

শেষোক্ত অন্তরা দুইটির উভয়েই একদিক কেবল মুক্ত; এজন্য, উভয়কেই **অর্ধমুক্ত** অথবা **অর্ধ-বদ্ধ অন্তরা** বলা হয়।

মনে করি, $X'X$ বাস্তব অক্ষের উপর A এবং B দুইটি বিন্দু যেখানে উহারা যথাক্রমে a ও b-কে সূচিত করে। এখন $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ এর অন্তর্গত সমুদয় সংখ্যা



$X'X$ এর উপর যে সমস্ত বিন্দুকে সূচিত করে সেই সমস্ত বিন্দুগুলির সেট S হইলে উহার জ্যামিতিক প্রকাশ উপরে প্রদত্ত হইল।



এখন $\{x \mid a<x<b\}$ এর অন্তর্গত সমুদয় সংখ্যা $X'X$ এর উপর যে সমস্ত বিন্দুকে সূচিত করে তাহাদের সেট T হইলে, উহার জ্যামিতিক প্রকাশ উপরে প্রদত্ত হইল :

দ্রষ্টব্য : $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$; $a<b<c$ হইলে ;

(i) $[a, b] \cup [b, c] = [a, c]$;

(ii) $[a, b[\cup [b, c] = [a, c]$;

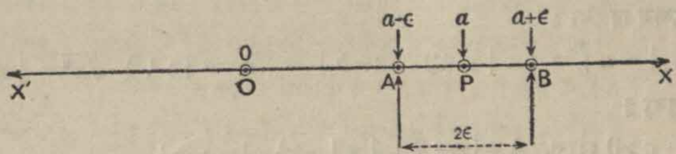
(iii) $]a, b[\cup [b, c[=]a, c[$;

(iv) $]a, b] \cup]b, c[=]a, c[$;

(v) $]a, b] \cup]b, \infty[=]a, \infty[$.

মন্তব্য : $r, s, t, \cdots\cdots, x, y, z$; $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$; θ, ϕ, ψ ;$\cdots\cdots$ এর যে কোনটিকে **চলরাশির প্রতীক** হিসাবে ব্যবহার করা যাইতে পারে।

(c) বিন্দুর সামীপ্য (Neighbourhood of a point) :



মনে করি, $X'X$ **বাস্তব-অক্ষ (Real-axis)** এবং O ও P বিন্দুদ্বয় উহার উপরে অবস্থিত যেখানে O বিন্দু 0 (শূন্য) কে এবং P বিন্দু বাস্তব রাশি a কে সূচিত করে। মনে করি, ঐ সরলরেখার উপর A ও B বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে $a-\epsilon$ এবং $a+\epsilon$ বাস্তব রাশি সূচিত করে, যেখানে ϵ (যত ক্ষুদ্র হউক না কেন) একটি অস্থায়ী ধনাত্মক বাস্তব রাশি। এখন, $S=\{x : a-\epsilon<x<a+\epsilon\}$ এবং এই সেট S এর সকল সংখ্যার অনুরূপ বিন্দুগুলির সেট T হইলে, অর্থাৎ, A ও B এর মধ্যবর্তী সকল বিন্দুর সংকলন T সেট হইলে, এই T সেটকে **P (x = a) বিন্দুর ϵ সামীপ্য (ϵ-neighbourhood of P)** বলা হইবে।

(d) বাস্তব রাশির সাংখ্যমান :

মনে করি, সকল বাস্তব রাশির সেট R এবং ইহার সাপেক্ষে x একটি চলরাশি। তাহা হইলে, $R=\{x \mid x=$ বাস্তব রাশি, এবং $-\infty<x<\infty\}$.

(i) এখন, x এর **সাংখ্যমান (Absolute value, বা, Numerical value)** কে $|x|$ দ্বারা সূচিত করা হয়, এবং সংজ্ঞা দেওয়া হয় :

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ যদি } x>0 ; \\ 0, \text{ যদি } x=0 ; \\ -x, \text{ যদি } x<0. \end{cases}$$

সুতরাং, $|x|$ এর মান কখনই ঋণাত্মক নয় ও $x \leqslant |x|$ এবং $-x \leqslant |x|$.

দ্রষ্টব্য : $|a-b| = +(a-b)$, যদি $a-b \geqslant 0$;

এবং $|a-b| = -(a-b)$, যদি $a-b<0$.

দৃষ্টান্ত : (i) $|5|=5$; $|0|=0$; $|-5|=-(-5)=5$;

$|3|=3$; $|-3|=3$; $\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$; ইত্যাদি।

(ii) $|5-2|=|3|=3$; $|2-5|=|-3|=3$;

$|7-4|=7-4=3$; $|4-7|=-(4-7)=3$;

(iii) $A=\{x \in R \mid |x-3|=5\}=\{-2, 8\}$;

$B=\{x \in R \mid |x+2|=3\}=\{1, -5\}$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(1) $|-x|=|x|$; (2) $|a-b|=|b-a|$; (3) $\sqrt{x^2}=|x|$.

মন্তব্য :

(1) $c>0$ হইলে, $A=\{x \in R \mid |x|=c\}=\{-c, c\}$.

(2) $c<0$ হইলে, $B=\{x \in R \mid |x|=c\}=\{\ \}$.

(ii) $a \in R$ এবং $b \in R$ হইলে ;

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}| \text{ এবং } |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|.$$

সংজ্ঞানুসারে,

$|a|=a$, যখন $a \geqslant 0$ এবং $|a|=-a$ যখন $a<0$.

সুতরাং, $a \leqslant |a|$ এবং $-a \leqslant |a|$.

সেইরূপ, $b \leqslant |b|$ এবং $-b \leqslant |b|$.

এখন, $a+b \geqslant 0$ হইলে,

$|a+b|=a+b \leqslant |a|+|b|$.

কিন্তু, $a+b<0$ হইলে,

$|a+b|=-(a+b)=-a-b \leqslant |a|+|b|$.

সুতরাং, a এবং b এর যে কোন মানের জন্য

$|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

তাহা হইলে,

$$\begin{aligned} |a-b| = |a+(-b)| &\leqslant |a|+|-b| \\ &= |a|+|b| ; \end{aligned}$$

অর্থাৎ, $|a-b| \leqslant |a|+|b|$.

(iii) $a \in R$ এবং $b \in R$ হইলে,

$$|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{a}| \sim |\mathbf{b}|.$$

এখানে, $|a| = |(a+b)+(-b)| \leqslant |a+b| + |b|$.

$\therefore \quad |a+b| \geqslant |a| - |b|$; $|a| > |b|$.

আবার, $|a| = |(a-b)+b| \leqslant |a-b| + |b|$.

$\therefore \quad |a-b| \geqslant |a| - |b|$; $|a| > |b|$.

সুতরাং, $|a \pm b| \geqslant |a| - |b|$; $|a| > |b|$.

এখন, $|b| = |(a+b)+(-a)| \leqslant |a+b| + |a|$.

$\therefore \quad |a+b| \geqslant |b| - |a|$; $|b| > |a|$.

আবার, $|b| = |a-(a-b)| \leqslant |a| + |a-b|$.

$\therefore \quad |a-b| \geqslant |b| - |a|$; $|b| > |a|$.

সুতরাং, $|a \pm b| \geqslant |b| - |a|$; $|b| > |a|$.

অতএব, $|a \pm b| \geqslant |a| \sim |b|$.

(iv) $a \in R$ এবং $b \in R$ হইলে,

$$|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \text{ ; এবং } \left|\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right| = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|},\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}.$$

এখন, $a \geqslant 0$ এবং $b \geqslant 0$ হইলে, $ab \geqslant 0$;

এবং $|a| = a$; $|b| = b$; $|ab| = ab$.

$\therefore \quad |ab| = ab = |a|\ |b|$.

কিন্তু, $a \geqslant 0$ এবং $b < 0$ হইলে, $ab \leqslant 0$;

এবং $|a| = a$; $|b| = -b$; $|ab| = -(ab)$.

$\therefore \quad |ab| = a(-b) = |a|\ |b|$.

$a < 0$ এবং $b \geqslant 0$ হইলে, সেইরূপ দেখানো যায় :

$$|ab| = |a|\ |b|.$$

এখন $a < 0$ এবং $b < 0$ হইলে, $ab > 0$.

এবং $|a| = -a$; $|b| = -b$; $|ab| = ab$.

$\therefore \quad |ab| = ab = (-a)(-b) = |a|\ |b|$.

সুতরাং, a ও b এর যে কোন মানের জন্য $|ab| = |a| . |b|$.

তাহা হইলে,

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a\times\frac{1}{b}\right| = \left|a\right| \left|\frac{1}{b}\right| = \left|a\right| \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}\ ;\ b\neq 0$$

দ্রষ্টব্য : $|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}^2|$; $|\mathbf{x}|^3 = |\mathbf{x}^3|$; ইত্যাদি।

(v) $x\in R$ এবং $k\in R$, $(k>0)$ হইলে,

$|\mathbf{x}| \leqslant \mathbf{k}$ দ্বারা $-\mathbf{k}\leqslant\mathbf{x}\leqslant\mathbf{k}$ কে বুঝাইবে।

এখন $x\geqslant 0$ হইলে, $|x| = x$; $-x\leqslant x$.

সুতরাং, তখন $|x| \leqslant k$ হইতে $x\leqslant k$ এবং $-x\geqslant -k$.

$\therefore\ -k\leqslant -x\leqslant x\leqslant k$; অর্থাৎ, $-k\leqslant x\leqslant k$.

কিন্তু, $x\leqslant 0$ হইলে, $|x| = -x$; $-\mathbf{x}\geqslant\mathbf{x}$.

সুতরাং, তখন, $|x| \leqslant k$ হইতে, $-\mathbf{x}\leqslant\mathbf{k}$; অর্থাৎ, $\mathbf{x}\geqslant -\mathbf{k}$.

$\therefore\ -k\leqslant x\leqslant -x\leqslant k$; অর্থাৎ, $-k\leqslant x\leqslant k$.

দ্রষ্টব্য : **(i)** $|x| < k$ হইলে, $-k<x<k$.

(ii) $|x-a| \leqslant k$ হইলে ;

$-k\leqslant(x-a)\leqslant k$; অর্থাৎ, $a-k\leqslant x\leqslant a+k$.

(iii) $|x-a| < k$ হইলে, $a-k<x<a+k$.

(iv) যদি প্রতিজ্ঞা p (proposition p) হইলে, প্রতিজ্ঞা q হয়, তবে এইরূপক্ষেত্রে সংক্ষেপে $p\Rightarrow q$ লেখা হইবে।

(v) যদি প্রতিজ্ঞা p হইলে প্রতিজ্ঞা q হয় এবং প্রতিজ্ঞা q হইলে প্রতিজ্ঞা p হয়, তবে এইরূপক্ষেত্রে সংক্ষেপে $p\Leftrightarrow q$ লেখা হইবে।

(i) মনে করি, $p : 5>2$ এবং $q : 7>4$.

তাহা হইলে, $p\Rightarrow q$.

(ii) মনে করি, $P=\{x \mid x^2<1\}$ এবং $Q=\{x \mid -1<x<1\}$.

তাহা হইলে $P\Rightarrow Q$.

(iii) মনে করি, $A=\{x \mid |x| = 2\}$; $B=\{x \mid x^2=4\}$.

এখানে, $A\Leftrightarrow B$.

2-10. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ।

উদাহরণ 1. $\{a, b\}$ এর উপসেট কি কি হইতে পারে ?

উত্তর : $\{a, b\}$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{\ \}$—এই চারিটি।

উদাহরণ 2. $A=\{9, 10, 11, 12, 13\}$ এবং
$B=\{x \mid x=$ মৌলিক সংখ্যা ও $9<x<23\}$ হইলে,
$A\cup B, A\cap B, (A-B), (B-A)$ এর পদগুলি উল্লেখ কর।

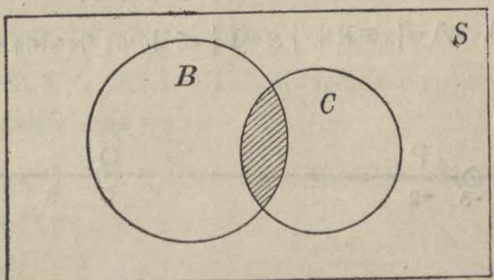
উত্তর ঃ $A=\{9, 10, 11, 12, 13\}$; $B=\{11, 13, 17, 19\}$.

$\therefore$ $A\cup B=\{9, 10, 11, 12, 13, 17, 19\}$;
$A\cap B=\{11, 13\}$;
$(A-B)=\{9, 10, 12\}$;
$(B-A)=\{17, 19\}$.

উদাহরণ 3. সার্বিক সেট S এর সাপেক্ষে B এবং C দুইটি উপসেট, যেখানে ঃ
$S=\{a, e, i, o, u\}$; $B=\{a, o, u\}$; $C=\{e, o, i\}$.
$(B\cap C)'$ এবং $B'\cup C'$ বাহির কর।

উত্তর ঃ $B\cap C=\{o\}$; $\therefore$ $(B\cap C)'=\{a, e, i, u\}$.
$B'=\{e, i\}$ এবং $C'=\{a, u\}$; $\therefore$ $B'\cup C'=\{a, e, i, u\}$.

দ্রষ্টব্য ঃ এখানে, $(B\cap C)'=B'\cup C'$.



$(B\cap C)'=B'\cup C'$

উদাহরণ 4. দেখাও যে, $|x|^3=x^3$, যদি $x\geqslant 0$
এবং $|x|^3=-x^3$ যদি $x<0$.

উত্তর ঃ এখন, $|x^3|=|x^2x|=|x^2|\,|x|$
$=|x|\,|x|\,|x|=|x|^3$

$$\therefore\ |x|^3=|x^3|=\begin{cases} x^3 & \text{যদি } x\geqslant 0,\\ -x^3 & \text{যদি } x<0.\end{cases}$$

উদাহরণ 5. সাংখ্যমানে প্রকাশ কর : $-1\leqslant x\leqslant 5$.

এখানে, $-1\leqslant x\leqslant 5 \Leftrightarrow -3\leqslant x-2\leqslant 3,$

$$\Leftrightarrow |x-2| \leqslant 3.$$

উদাহরণ 6. সমাধান কর : $|2x+3| < 5$.

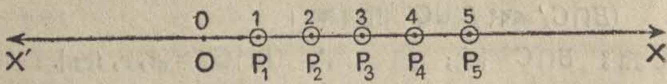
এখানে, $|2x+3| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x+3 < 5,$

$$\Leftrightarrow -8 < 2x < 2,$$

$$\Leftrightarrow -4 < x < 1.$$

উদাহরণ 7. A সেটের পদগুলির জ্যামিতিক প্রকাশ দেখাও যেখানে,

$$A-\{ x\in N \mid x\leqslant 5 \}.$$



এখানে, $A=\{ x\in N \mid x\leqslant 5 \}\Leftrightarrow\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

উদাহরণ 8. $A=\{x\in R \mid |x-1| \leqslant 3\}$ এর পদগুলির জ্যামিতিক চিত্রে প্রদর্শন কর।



এখানে $A\Leftrightarrow\{ x\in R \mid |x-1| \leqslant 3 \}\Leftrightarrow\{ x \mid -2\leqslant x\leqslant 4 \}$.

উদাহরণ 9. $B=\{x\in R \mid |x+1| < 3\}$ এর পদগুলির জ্যামিতিক প্রকাশ প্রদান কর।



এখানে, $B,\Leftrightarrow\{ x\in R \mid |x+1| < 3 \Leftrightarrow\{ x \mid -4 < x < 2 \}$.

উদাহরণ 10. $C=\{x\in R \mid x^2-3x<4\}$ এর জ্যামিতিক প্রকাশ উপস্থাপন কর।



এখানে, $C\Leftrightarrow\{x\in R \mid x^2-3x-4<0\}\Leftrightarrow\{x\in R \mid (x+1)(x-4)<0\}$
$\Leftrightarrow\{x\in R \mid -1<x<4\}$.

প্রশ্নমালা 2

1. নিম্নোল্লিখিত সেটসমূহের প্রত্যেকটিতে কয়টি করিয়া পদ আছে এবং কোন্ কোন্‌টি শূন্য সেট তাহা উল্লেখ কর :

$A=\{0, 1, 2, 3\}$; $B=\{1, 2\}$; $C=\{1\}$; $D=\{0\}$

$E=\{x : 1<x\leqslant 2\}$; $X=\{x \mid x=$ বাস্তব রাশি ; $x^2+2=0\}$.

2. $\{1, 2\}$-এর কয়টি উপসেট থাকিতে পারে এবং কি কি ?

3. $A=\{2, 3, 4\}$ এবং $B=\{1, 2, 5\}$ হইলে, $A\cup B$, $A\cap B$, $(A-B)$, ও $(B-A)$-এর পদগুলি উল্লেখ কর।

4. $A=\{x \mid x=$ যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা এবং $3<x<15\}$ হইলে, A-এর কয়টি পদ আছে এবং কি কি ?

5. $A=\{1, 4, 5, 7\}$; $B=\{2, 4, 6, 7\}$;
এবং $C=\{2, 3, 5, 6, 7\}$ হইলে, $A-(B\cap C)=$?

6. $A=\{x : 0<x\leqslant 2\}$ এবং $B=\{x : 1<x<3\}$ হইলে,
$A\cup B$, $A\cap B$, $A-(B\cap A)$ ও $(A\cup B)-(A\cap B)$ এর পদগুলি উল্লেখ কর।

7. $A=\{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$; $B=\{2, 6, 3, 4\}$ এবং $C=\{5, 4, 2, 3\}$ হইলে,
$A\cup B\cup C$ এবং $A\cap B\cap C$-এর মান কত ?

8. $A=\{2, 6, 7, 4\}$; $B=\{2, 4, 6, 7\}$ হইলে দেখাও যে,
$A=B$; $A\cap B=A\cup B$; এবং বলতো $(A-B)$-এর পদসংখ্যা কত ?

9. সার্বিক সেট U-এর উপসেট X হইলে, যেখানে,

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এবং $X=\{2, 4, 6, 8\}$,

X' ; $X \cap X'$; $X \cup X'$ বাহির কর।

10. সার্বিক সেট S-এর উপসেট B ও C হইলে, যেখানে

$S=\{a, b, c, d, e, f\}$; $B=\{b, d, e, f\}$ এবং $C=\{a, c, d, f\}$,

$B \cap C$ এবং $B' \cup C'$-এর মান কত ?

11. সার্বিক সেট U-এর উপসেট A এবং B হইলে, যেখানে

$U=\{2, 4, 8, 16, 32\}$; $A=\{2, 16\}$ এবং $B=\{4, 8, 16\}$, দেখাও যে,

$(A')'=A$; $(A \cup B)'=A' \cap B'$.

12. সার্বিক সেট S-এর উপসেট P এবং Q হইলে, যেখানে,

$S=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 10\}$; $P=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

এবং $Q=\{x \mid 1<x<3\}$ হইলে,

$(P \cup Q)'$ এবং $(P \cap Q)'$ বাহির কর।

13. $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $B=\{4, 5, 6, 7\}$ হইলে, দেখাও যে,

$$(A \cap B) \cup (A-B)=A.$$

14. $A=\{x : 0 \leqslant x<4\}$ এবং $B=\{x : 1 \leqslant x<3\}$ হইলে, দেখাও যে,

$$(A \cap B) \cup (A-B)=A.$$

15. সার্বিক সেট R-এর সাপেক্ষে X এবং Y দুইটি উপসেট হইলে, যেখানে সকল বাস্তব রাশির সেট R এবং $X=\{x : 1<x<5\}$ এবং $Y=\{x : 2<x \leqslant 6\}$,

$X-Y$ এবং $Y-X$ বাহির কর ; এবং $(X \cup Y)'$ এবং $(X-Y)'$ নির্ণয় কর।

16. (i) $\{a, e, i, o, u\}$ এর উপসেটের সংখ্যা কত ?

(ii) $\{x \mid x=$ যুগ্ম সংখ্যা এবং $0<x \leqslant 100\}$ এর উপসেট কয়টি থাকিতে পারে ?

17. (a) মান নির্ণয় কর।

(i) $|-5| . |-3|$, (ii) $-|-4|^2+|-4^2|$.

(b) সমাধান কর :

(i) $|x-1|=5$; (ii) $|2x+3|=7$.

18. $|x-1|+|x|$ এর সেই সমস্ত মান উল্লেখ কর যাহারা সকলেই $S=\{x \mid -1<x<2\}$ এর পদ।

19. সাংখ্যমানে প্রকাশ কর :

(i) $-2\leqslant x\leqslant 6$, (ii) $-8\leqslant x\leqslant 2$;

(iii) $0<x<4$; (iv) $-1<x<4$;

(v) $-0{\cdot}2\leqslant 3x+2\leqslant +0{\cdot}6$; (vi) $\frac{1}{5}\leqslant x-5\leqslant \frac{1}{3}$.

20. সমাধান কর :

(i) $|x-2|\leqslant 3$; (ii) $|2x+3|<5$;

(iii) $|5-x|<\frac{1}{4}$; (iv) $0<|x+2/3|<1$;

(v) $|x-2|>5$; (vi) $|x+1|<|x|$;

(vii) $|x+3|\leqslant|2x-1|$; (viii) $|x^2-1|<8$.

21. দেখাও যে, $|x^2-1|<3 \Leftrightarrow |x|<2$.

22. $|x-a|<\delta_1$ এবং $|x-b|<\delta_2$ হইলে দেখাও যে,

$$|a-b|<\delta_1+\delta_2.$$

23. দেখাও যে, $|a-b|\geqslant \big|\,|a|-|b|\,\big|$.

24. $E=\{x\in R \mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$ এতে x এর সমুদয় মানের জন্য যদি $|x^3-4x^2-7|\leqslant\delta$ হয় তবে δ এর মান বাহির কর।

25. সমাধান কর হয় এবং পদগুলির জ্যামিতিক প্রকাশ নির্দেশ কর :

(i) $A=\{x\in R \mid |x-1|<3\}$;

(ii) $B=\{x\in R \mid |x|\geqslant 3\}$;

(iii) $C=\left\{x\in R \mid \frac{x-2}{x+3}<0\right\}$;

(iv) $D=\{x\in R \mid (x+2)(x-1)<(x-1)^2\}$.

তৃতীয় অধ্যায়

চিত্রণ

(Mapping)

3-1. উপস্থাপন।

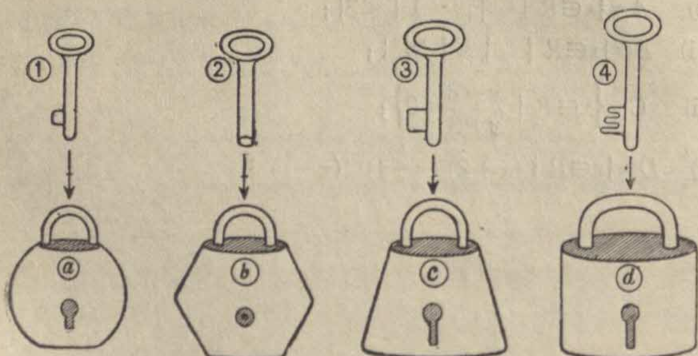
দুইটি সেটের পদগুলির পারস্পরিক সম্পর্ক কয়েকটি দৃষ্টান্তের মাধ্যমে নিম্নে দেওয়া হইল :

(A) দৃষ্টান্ত 1 :

মনে করি, a, b, c, d চিহ্নিত 4টি বিভিন্ন তালা (lock) আছে এবং তাহাদের যথাক্রমে 1, 2, 3, 4 নম্বরযুক্ত চাবি (key) দ্বারা কেবলমাত্র খোলা সম্ভব। এই 4টি চাবির সংকলনকে সেট A এবং পূর্বোক্ত 4টি তালার সংকলনকে সেট B দ্বারা সূচিত করি ; এবং ইহাদের নিম্নোক্তরূপে প্রকাশ করি ;

$$A=\{1, 2, 3, 4\} \text{ এবং } B=\{a, b, c, d\}.$$

এখন, A-এর পদগুলি এবং B অনুরূপ পদগুলির পারস্পরিক সম্পর্ক নিয়ে চিত্র-মাধ্যমে দেখানো হইল :



সুতরাং, চাবি ও তালাগুলির সম্পর্ক সংক্ষেপে লেখা যায় :

$$1 \to a \; ; \quad 2 \to b \; ; \quad 3 \to c \; ; \quad 4 \to d.$$

(B) দৃষ্টান্ত 2 :

মনে করি, K, L, M, N দ্বারা চিহ্নিত 4টি গ্লাস আছে; a, b, c, d, e চিহ্নিত 5টি ঢাকনা আছে। এই 5টি ঢাকনার সংকলনকে সেট X এবং উক্ত 4টি গ্লাসের সংকলনকে সেট Y মনে করি এবং ইহাদের নিম্নোক্তরূপে প্রকাশ করি :

$$X=\{a, b, c, d, e\}; \quad Y=\{K, L, M, N\}.$$

মনে করি, a, b, c, d চিহ্নিত ঢাকনাগুলি যথাক্রমে K, L, M, N চিহ্নিত গ্লাসগুলিকে মানায় (match) ; কিন্তু e চিহ্নিত ঢাকনাটি Y সেটের কোন গ্লাসকে মানায় না। এখন গ্লাসগুলি ও তাহাদের অনুরূপ ঢাকনাগুলির সম্পর্ক নিম্নে চিত্র-মাধ্যমে দেখানো হইল :



সুতরাং, ঢাকনা এবং তাহাদের অনুরূপ গ্লাসের সম্পর্ক সংক্ষেপে লেখা যায় :

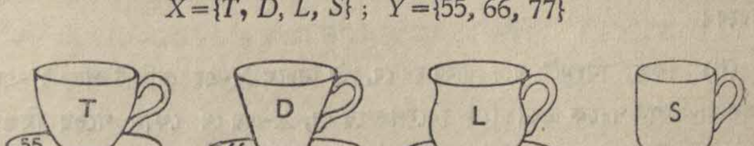
$$a \to K; \quad b \to L; \quad c \to M; \quad d \to N.$$

কিন্তু e চিহ্নিত ঢাকনা কোনও গ্লাসের সহিত মানায় না।

(C) দৃষ্টান্ত 3 :

মনে করি, T, D, L, S চিহ্নিত বিভিন্ন আকারের চারিটি কাপ আছে; এবং T, D, L চিহ্নিত কাপগুলিকে মানায় এইরূপ তিনটি প্লেট আছে, যাহারা 55, 66, 77 নম্বরযুক্ত; কিন্তু S চিহ্নিত কাপের উপযুক্ত কোন প্লেট নাই। এই কাপগুলির সেটকে X এবং প্লেটগুলির সেটকে Y দ্বারা সূচিত করি, এবং নিম্নলিখিত রূপে প্রকাশ করি :

$$X=\{T, D, L, S\}; \quad Y=\{55, 66, 77\}$$



এখন, X ও Y সেটের পদগুলির সম্পর্ক যে প্লেট যে কাপে মানায় তাহা উপরে চিত্র-মাধ্যমে দেখানো হইল :

স্থতরাং; ইহাদের সম্পর্ককে সংক্ষেপে নিম্নোক্তমতে লেখা যায় :

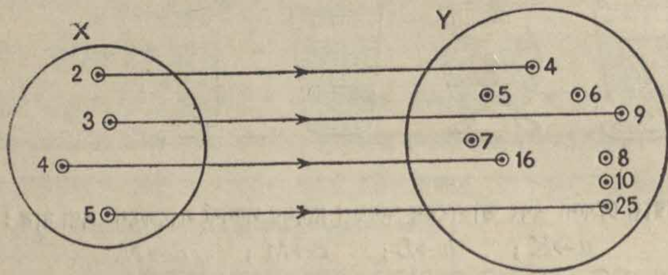
$$T\to 55\ ; \quad D\to 66\ ; \quad L\to 77.$$

(D) দৃষ্টান্ত 4 ;

মনে করি, X এবং Y দুইটি সেট, যেখানে, $X=\{2, 3, 4, 5\}$ এবং $Y=\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 25\}$.

এখন X এর যে কোন পদকে x ও Y-এর যে কোন পদকে y দ্বারা সূচিত করি।

(i) মনে করি, কোন একটি নির্দিষ্ট নিয়মে X-এর প্রতিটি পদ Y-এর কোন না কোন পদকে নির্দেশ করে। ধরিলাম X-এর যে কোন পদের বর্গ Y-এর একটি পদ হইবে। ইহাকে চিত্র-মাধ্যমে নিম্নে দেখানো হইল :

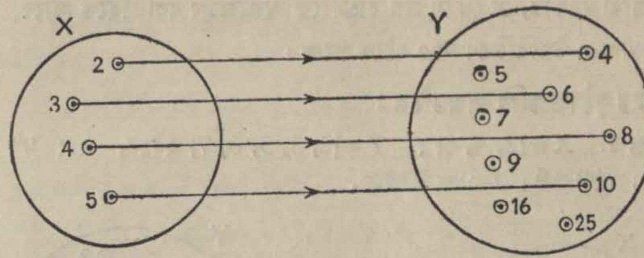


যে নিয়মে X -এর যে কোন পদ Y-এর কোন না কোন পদকে নির্দেশ করে তাহাকে f বলিলে, ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হইবে : $f : X\to Y$; অর্থাৎ $f :\ x\to y$; বা, $f :\ x\to x^2$. ইহার অর্থ X-এর পদ সমুদয়, 2, 3, 4, 5 যথাক্রমে Y-এর বিশিষ্ট পদসমূহ 4, 9, 16, 25-কে কেবলমাত্র নির্দেশ করে ; কিন্তু এই নিয়মে X-এর এমন কোন পদ নাই যাহা Y-এর পদ 5, 6, 7, 8, বা, 10 কে নির্দেশ করিবে।

(ii) কিন্তু, নিয়মটি যদি এমন হয় যে, ঐ নিয়মে X-এর প্রতিটি পদ Y-এর কোন না কোন পদকে এমনভাবে নির্দেশ করে যে, X-এর যে কোন পদের দ্বিগুণ Y-এর একটি পদের সমান হইবে ; সেইক্ষেত্রে ইহাকে পর পৃষ্ঠায় চিত্র-মাধ্যমে দেখানো হইয়াছে।

এখানে, যে নিয়মে X এর প্রতিটি পদ Y এর কোন না কোন পদকে নির্দেশ করে, তাহাকে f দ্বারা সূচিত করিলে, ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হইবে : $f : X\to Y$;

অর্থাৎ, $f: x \to y$; বা, $f: x \to 2x$; যাহার অর্থ : X এর পদ 2, 3, 4, 5 যথাক্রমে Y এর পদ 4, 6, 8, 10 কে নির্দেশ করে ; কিন্তু, এই নিয়মে X এতে এমন পদ নাই যাহা Y এর পদ 5, 7, 9, 16 বা 25 কে নির্দেশ করিবে।



3-2. চিত্রণ (mapping) :

মনে করি, X এবং Y দুইটি সেট, যেখানে, উভয় সেটের অন্ততঃ একটি করিয়া পদ আছে এবং X এর যে কোন পদ x দ্বারা সূচিত।

কোন নির্দিষ্ট 'f'-নিয়মে X এর প্রতিটি পদ Y এর কোন না কোন পদকে যদি নির্দেশ করে **(assign to)** তাহা হইলে, **'f'- নিয়মে Y এতে X এর অন্তশ্চিত্রণ (into mapping)** বলা হইবে এবং ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হইবে,

$$\mathbf{f : X \to Y.}$$

এই নিয়মে চিত্রণকে **'f'-চিত্রণ** বলা হয়।

এখানে মনে রাখা দরকার X ও Y—এই দুইটি নির্দিষ্ট সেটের জন্য বিভিন্ন নিয়মে Y এতে X এর বিভিন্ন চিত্রণ থাকিতে পারে ; আবার কোন একটি বিশেষ নিয়মে Y এতে X এর চিত্রণ নাও থাকিতে পারে।

এখন '$f: X \to Y$' চিত্রণে 'f' নিয়মে X এর যে কোন একটি পদ x, Y এর যে পদ বা পদগুলিকে নির্দেশ করে তাহাদের যে কোনটিকে '$f: x$', বা '$f(x)$' দ্বারা সূচিত করা হয়। সুতরাং $a \in X$ হইলে, এবং 'f'-নিয়মে Y এতে X এর চিত্রণ সম্ভব হইলে $f(a)$ দ্বারা সূচিত প্রতিটি পদ Y এতে থাকিবে, এবং উহাদের প্রতিটিকে 'f'-চিত্রণে a এর **প্রতিবিম্ব (image)** বলা হইবে।

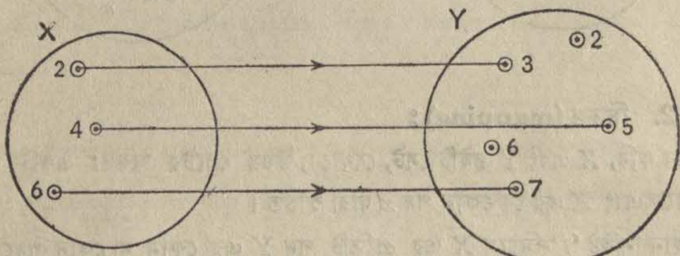
'$f: X \to Y$' চিত্রণে, সেট X কে এই চিত্রণের **ব্যাপ্তি (domain)** এবং 'f' নিয়মে X এর পদগুলি Y এর যে যে পদ নির্দেশ করে তাহাদের সেটটিকে এই চিত্রণের **বিস্তার (range)** বলা হয়।

এখন, '$f: X \to Y$' চিত্রণের বিস্তার Y সেট অথবা Y এর প্রকৃত উপসেট হইতে পারে। যদি এই চিত্রণে, Y সেটটি ইহার বিস্তার হয়, তাহা হইলে, '$f: X \to Y$' কে 'f'-নিয়মে Y-এতে X-এর **উপরিচিত্রণ (onto mapping)** বলা হইবে।

মনে রাখা দরকার, যে কোন উপরিচিত্রণকে অন্তশ্চিত্রণ বলা যাইতে পারে, কিন্তু একটি অন্তশ্চিত্রণ উপরিচিত্রণ নাও হইতে পারে।

নিম্নের দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ্যণীয় :

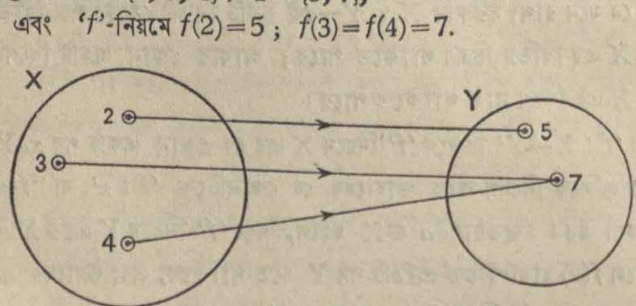
দৃষ্টান্ত 1. $X=\{2, 4, 6\}$; $Y=\{2, 3, 5, 6, 7\}$ হইলে, এবং 'f'-নিয়মে $f(2)=3$; $f(4)=5$; $f(6)=7$ হইলে,



'$f: X \to Y$' চিত্রণ সম্ভব, এবং ইহা একটি অন্তশ্চিত্রণ হইবে। উপরন্তু, ইহাকে লেখা যাইবে :

$$f=\{(2, 3), (4, 5), (6, 7)\}.$$

দৃষ্টান্ত 2. $X=\{2, 3, 4\}$; $Y=\{5, 7\}$,
এবং 'f'-নিয়মে $f(2)=5$; $f(3)=f(4)=7$.



এখানে, '$f: X \to Y$' চিত্রণ সম্ভব, এবং ইহা একটি উপরিচিত্রণ হইবে। অধিকন্তু, ইহাকে লেখা যাইবে :

$$f=\{(2, 5), (3, 7), (4, 7)\}.$$

দৃষ্টান্ত 3. $X=\{2, 3, 4\}$; $Y=\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 16\}$;

(a) 'f'-নিয়মে, $f(2)=4$; $f(3)=6$; $f(4)=8$.

তাহা হইলে, '$f: X \to Y$' চিত্রণ আছে, এবং ইহা একটি অন্তশ্চিত্রণ।

(b) আবার মনে করি, ঐ প্রদত্ত সেট X এবং Y এর জন্য অপর একটি নিয়ম 'ϕ' এতে $\phi(2)=4$; $\phi(3)=9$; $\phi(4)=16$.

তাহা হইলে, এইরূপ ক্ষেত্রেও '$\phi: X \to Y$' চিত্রণ আছে, এবং ইহাও একটি অন্তশ্চিত্রণ।

(c) এবার মনে করি, ঐ একই সেটদ্বয় X এবং Y এর জন্য অপর একটি নিয়ম 'g' এতে $g(2)=4, 6, 8$; $g(3)=5, 7, 9$; $g(4)=16$. তাহা হইলে, এখানে '$g: X \to Y$' চিত্রণ আছে, এবং ইহা একটি উপরিচিত্রণ।

(d) অবশেষে মনে করি, ঐ একই সেটদ্বয় X ও Y এর জন্য 'F'-নিয়মে $F(2)=8$; $F(4)=16$, কিন্তু এই নিয়মে, X এর পদ 3-কে, Y এর কোন পদ নির্দ্দেশ করে না। এইরূপক্ষেত্রে, 'F' নিয়মে Y এতে X এর কোন চিত্রণ নাই।

3·3. এক-এক চিত্রণ (One to one mapping) :

'$f: X \to Y$' চিত্রণে X এর একটি নির্দিষ্ট পদের জন্য উহার প্রতিবিম্ব কেবলমাত্র একটি থাকিলে, এই চিত্রণকে **একমানবিশিষ্ট চিত্রণ (Single-valued mapping)** বলা হইবে। [এখন হইতে কেবলমাত্র একমানবিশিষ্ট চিত্রণের বিভিন্ন দিক্ আলোচিত হইবে]।

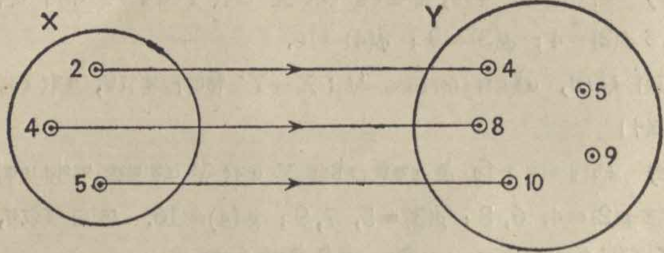
মনে করি, '$f: X \to Y$' একটি একমানবিশিষ্ট চিত্রণ, যেই চিত্রণে X-এর যে কোন দুইটি পদের অনুরূপ প্রতিবিম্বদ্বয় বিভিন্ন। এইরূপ চিত্রণকে **এক-এক চিত্রণ (one-to-one mapping)** বলা হইবে। এই এক-এক চিত্রণ আবার **এক-এক অন্তশ্চিত্রণ (one-to-one mappnig of X into Y)**, বা **এক-এক উপরিচিত্রণ (one-to-one mapping of X onto Y)** হইতে পারে।

'f'-নিয়মে Y এতে X এর এক-এক উপরিচিত্রণ হইলে, X এবং Y এর মধ্যে **এক-এক অনুরূপতা (one-to-one correspondence)** আছে বলা হইবে এবং তখন X ও Y **সমতুল্য (equivalent)** হইবে ; এবং লেখা হইবে $X \leftrightarrow Y$.

দ্রষ্টব্য : দুইটি সমসেট সমতুল্য হইবে ; কিন্তু, দুইটি সমতুল্য সেট সমসেট নাও হইতে পারে।

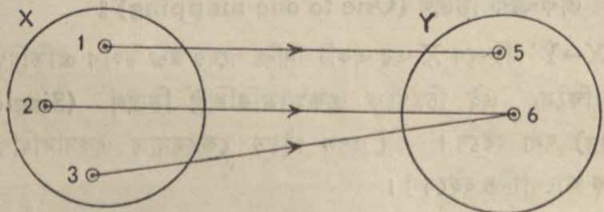
নিম্নোক্ত দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ্যণীয় ঃ

দৃষ্টান্ত 1. $X=\{2, 4, 5\}$ এবং $Y=\{4, 5, 8, 9, 10\}$ এর জন্য 'f'-নিয়মে $f(2)=4$; $f(4)=8$; $f(5)=10$ হইলে, আমরা নিম্নের চিত্রটি পাই ঃ



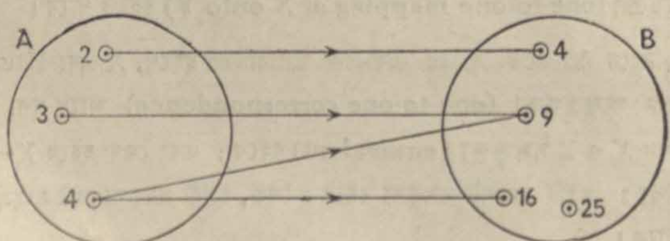
এখানে, '$f : X \to Y$' একটি **এক-এক অন্তশ্চিত্রণ** হইবে ;
এবং $f=\{(2, 4), (4, 8), (5, 10)\}$.

দৃষ্টান্ত 2. $X=\{1, 2, 3\}$ এবং $Y=\{5, 6\}$ এর জন্য 'f'-নিয়মে $f(1)=5$; $f(2)=f(3)=6$ হইলে, আমরা নিম্নস্থ চিত্রটি পাই ঃ



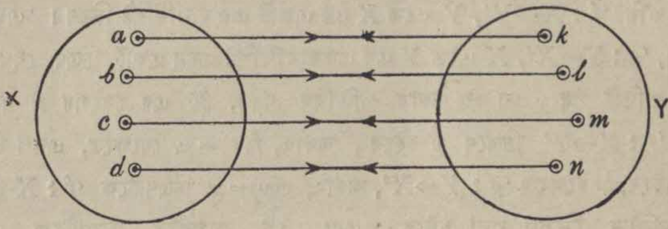
এখানে, '$f : X \to Y$' একটি **একমানবিশিষ্ট উপরিচিত্রণ** হইবে ;
এবং $f=\{(1, 5), (2, 6), (3, 6)\}$.

দৃষ্টান্ত 3. $A=\{2, 3, 4\}$ এবং $B=\{4, 9, 16, 25\}$ এর জন্য 'ϕ'-নিয়মে $\phi(2)=4$; $\phi(3)=9$; $\phi(4)=9, 16$ হইলে, আমরা নিম্নাঙ্কিত চিত্রটি পাই ঃ



এখানে, 'ϕ : $A \rightarrow B$' একটি **অন্তশ্চিত্রণ** হইবে; কিন্তু ইহা একমানবিশিষ্ট অন্তশ্চিত্রণ নহে, কারণ এখানে 4 এর দুইটি বিভিন্ন প্রতিবিম্ব 9 এবং 16 আছে।

দৃষ্টান্ত 4. $X=\{a, b, c, d\}$ এবং $Y=\{k, l, m, n\}$ এবং 'f'-নিয়মে $f(a)=k$; $f(b)=l$; $f(c)=m$; $f(d)=n$ হইলে, আমরা পাই :



এখানে, '$f: X \rightarrow Y$' একটি এক-এক উপরিচিত্রণ হইবে। সুতরাং, এখানে X ও Y এর মধ্যে **এক-এক অনুরূপতা** আছে; অর্থাৎ, $X \leftrightarrow Y$.

3-4. রূপান্তর (Transformation) :

একমানবিশিষ্ট '**f : X→X**' চিত্রণকে 'f'-নিয়মে X এর একটি **রূপান্তর** বলা হইবে।

যদি $f(x)=x$, $(x \in X)$ হয়, তবে '$f: X \rightarrow X$' কে অভেদ চিত্রণ বা অভেদ রূপান্তর (Identity Transformation) বলা হইবে।

দৃষ্টান্ত 1. $X=\{\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3\}$ এর জন্য 'f-নিয়মে' $f(\frac{1}{2})=2$; $f(2)=\frac{1}{2}$; $f(\frac{1}{3})=3$; $f(3)=\frac{1}{3}$ হইলে, '$f: X \rightarrow X$' চিত্রণটি 'f-নিয়মে, X এর একটি রূপান্তর। এখানে, এই চিত্রণের ব্যাপ্তি এবং বিস্তার উভয়েই X.

দৃষ্টান্ত 2. $X=\{1, 2, 3, 4\}$ এর জন্য 'f-নিয়মে' $f(1)=3$; $f(2)=4$; $f(3)=4$; $f(4)=3$ হইলে,

'$f: X \rightarrow X$' চিত্রণটি 'f-নিয়মে' X এর একটি রূপান্তর। এখানে, এই চিত্রণের বিস্তার, X এর প্রকৃত উপসেট।

দৃষ্টান্ত 3. সমুদয় বাস্তব রাশির সেট R হইলে, '$f: x \rightarrow x^2$' চিত্রণটি R এর একটি রূপান্তর হইবে।

দৃষ্টান্ত 4. একটি সমতলে অবস্থিত সমুদয় বিন্দুর সেট Z হইলে, এবং ঐ সমতলে $\overleftrightarrow{LM}$ এর সাপেক্ষে P বিন্দুর প্রতিবিম্ব P' পাওয়ার নিয়মটি হইল '$f : Z \rightarrow Z'$' ; এবং ইহার চিত্রণটি একটি রূপান্তর হইবে।

3-5. বিপরীত চিত্রণ (Inverse mapping) :

মনে করি, '$f : X \rightarrow Y$', Y এতে X এর একটি একমানবিশিষ্ট চিত্রণ। এক্ষণে, মনে করি, '$g : Y \rightarrow X$', X এতে Y এর একমানবিশিষ্ট এমন একটি চিত্রণ, যেখানে, Y -এর প্রতিটি পদ y এর জন্য উহার প্রতিবিম্ব $g(y)$, X এর সেইপদ x যাহার প্রতিবিম্ব '$f : X \rightarrow Y$' চিত্রণে y হইবে ; অর্থাৎ, $f(x)=y$. যেক্ষেত্রে, এরূপ চিত্রণ পাওয়া যাইবে, সেইক্ষেত্রে '$g : Y \rightarrow X$', অর্থাৎ, $g(y)=x$ চিত্রণটিকে '$f : X \rightarrow Y$' এর **বিপরীত চিত্রণ** বলা হইবে ; এবং এই বিপরীত চিত্রণটিকে তখন '$f^{-1} : Y \rightarrow X$'—এইরূপ লিখিয়া প্রকাশ করা হইবে।

সুতরাং, এইক্ষেত্রে, $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$.

দ্রষ্টব্য : 'f^{-1} নিয়ম' $\leftrightarrow$ 'g নিয়ম'।

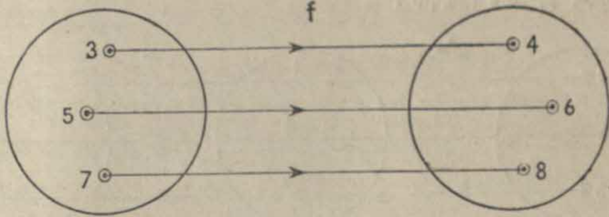
দ্রষ্টব্য 1. মনে করি, $X=\{a, b, c\}$ এবং $Y=\{k, m\}$ এর জন্য $f(a)=k$; $f(b)=f(c)=m$.

এখানে, '$f : X \rightarrow Y$' একটি একমানবিশিষ্ট চিত্রণ। কিন্তু সংজ্ঞানুসারে, '$f : X \rightarrow Y$' এর বিপরীত চিত্রণ থাকিবে না ; কারণ, এখানে, $g(m)=b, c$; অর্থাৎ, '$g : Y \rightarrow X$' একমানবিশিষ্ট নহে। সুতরাং, '$f : X \rightarrow Y$ এর বিপরীত চিত্রণ থাকিতে হইলে, অতি অবশ্যই ইহাকে **একমানবিশিষ্ট এক-এক চিত্রণ** হইতে হইবে।

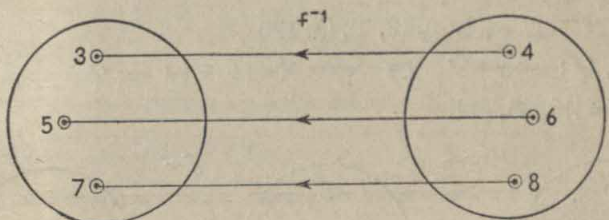
দ্রষ্টব্য 2. আবার, মনে করি, $X=\{a, b, c\}$ এবং $Y=\{k, l, m, n\}$ এর জন্য $f(a)=k$; $f(b)=l$; $f(c)=m$; এখানে, '$f : X \rightarrow Y$' একটি একমানবিশিষ্ট এক-এক চিত্রণ। কিন্তু, সংজ্ঞানুসারে, এই চিত্রণের বিপরীত চিত্রণ থাকিবে না ; কারণ, Y এর পদ n এর জন্য $g(n)$, X এতে নাই।

সুতরাং, '$f : X \rightarrow Y$' চিত্রণটির বিপরীত চিত্রণ '$f^{-1} : Y \rightarrow X$' থাকিবে, যদি '$f : X \rightarrow Y$' একটি একমানবিশিষ্ট (অনুরূপতাযুক্ত) এক-এক উপরিচিত্রণ হয়।

দৃষ্টান্ত 1. $X=\{3, 5, 7\}$ এবং $Y=\{4, 6, 8\}$ দুইটি সেট হইলে, এবং f-নিয়মে Y-এতে X-এর একটি একমানবিশিষ্ট এক-এক উপরিচিত্রণ হইলে, যেমন, $f(3)=4$; $f(5)=6$; $f(7)=8$ হইলে, '$f: X\to Y$'-এর বিপরীত চিত্রণ



'$f^{-1}: Y\to X$' থাকিবে, যেখানে, $f^{-1}(4)=3$; $f^{-1}(6)=5$; $f^{-1}(8)=7$.



দৃষ্টান্ত 2. '$f: x\to x+2$' চিত্রণের **ব্যাপ্তি** $X=\{1, 3, 5, 8\}$ হইলে, f^{-1} যদি থাকে, তাহার শর্ত নির্দেশ কর এবং ইহার **বিস্তার** বাহির কর।

এখানে, $f(1)=3$; $f(3)=5$; $f(5)=7$; $f(8)=10$.

সুতরাং, '$f: X\to Y$' এতে **বিস্তার** $Y=\{3, 5, 7, 10\}$ অতি অবশ্যই হইবে; এবং তখন, '$f: X\to Y$' একটি একমানবিশিষ্ট এক-এক উপরিচিত্রণ।

সুতরাং, '$f^{-1}: Y\to X$', অর্থাৎ '$f^{-1}: x\to x-2$' থাকিবে।

3-6. যৌগিক চিত্রণ (Composite mapping):

'$f: A\to B$' এতে $f(a)=b$, এবং '$g: B\to C$' এতে $g(b)=c$ হইলে, f ও g যৌগিক চিত্রণকে সূচিত করা হইবে '$gf: A\to C$' দ্বারা; এবং সংজ্ঞা দেওয়া হইবে:

$$gf(a)=g\{f(a)\}=g(b)=c.$$

কিন্তু, '$g: A\to B$' এতে $g(a)=k$ এবং '$f: B\to C$' এতে $f(k)=t$ হইলে, এখানে f ও g এর যৌগিক চিত্রণ হইবে:

'$fg: A\to C$'; যেখানে, $fg(a)=f\{g(a)\}=f(k)=t$.

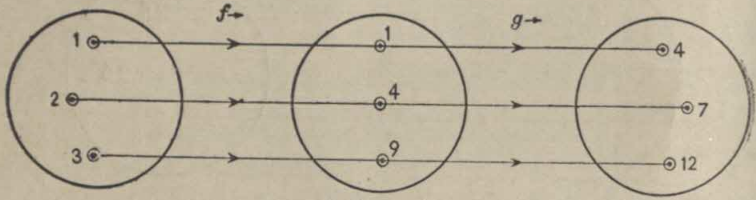
সুতরাং, সাধারণতঃ $fg(a)\neq gf(a)$.

দৃষ্টান্ত ঃ $A=\{1, 2, 3\}$; '$f : x \to x^2$' এবং '$g : x \to x+3$' হইলে,

'$f : x \to x^2$' এতে বিস্তার $P=\{1, 4, 9\}$

এবং '$g : x \to x+3$' এতে বিস্তার $Q=\{4, 7, 12\}$.

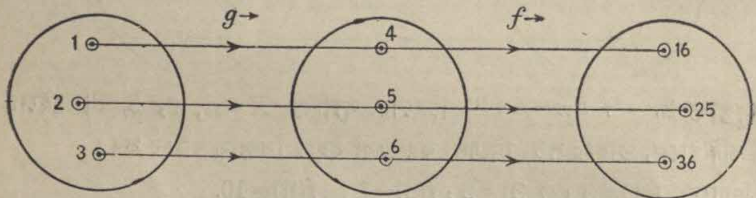
এইক্ষেত্রে 'gf' এর চিত্রণটি ঃ



'gf'- mapping

তাহা হইলে, $gf=\{(1, 4), (2, 7), (3, 12)\}$.

কিন্তু, '$g : x \to x+3$' এতে বিস্তার $X=\{4, 5, 6\}$ এবং '$f : x \to x^2$' এতে বিস্তার $Y=\{16, 25, 36\}$.



'fg'- mapping

এইরূপ ক্ষেত্রে, $fg=\{(1, 16), (2, 25), (3, 36)\}$.

সুতরাং, এই উদাহরণে, $gf \neq fg$.

মন্তব্য ঃ দুই বা ততোধিক চিত্রণের যৌগিক চিত্রণ উপরোক্ত নিয়মে বাহির করা যাইবে।

প্রশ্নমালা 3

1. $A=\{3, 4, 5\}$ এবং $B=\{5, 6, 7, 9\}$ এর জন্য '$f: A\to B$' দ্বারা $f(x)=x+2$ কে বুঝাইলে, এই চিত্রণের বিস্তার কত? ইহা অন্তশ্চিত্রণ না উপরিচিত্রণ? ইহা একমানবিশিষ্ট এক-এক চিত্রণ কি না নির্দেশ কর।

2. $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ এবং $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ এবং '$f: A\to B$' দ্বারা $f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=b_2$; $f(a_3)=b_3, b_4$ হইলে, 'f' দ্বারা কি কোন চিত্রণ প্রকাশ করে? যদি না করে, তবে অতিরিক্ত কি শর্ত দরকার?

3. $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ এবং $T=\{t_1, t_2, t_3\}$ এবং '$f: S\to T$' দ্বারা $f(s_1)=t_1$, $f(s_2)=t_2$, $f(s_3)=t_2$, $f(s_4)=t_1$ হইলে 'f' চিত্রণটি কিরূপ প্রকৃতির?

4. $S=\{a, b, c\}$ এবং $T=\{l, m, n, p\}$ এবং '$g: S\to T$' এতে $g(a)=l, m$; $g(b)=m, n$; $g(c)=n, p$ হইলে, g চিত্রণটি কিরূপ প্রকৃতির?

5. $A=\{3, 6, 9\}$ এবং '$f: A\to Y$' এতে $f=\{(3, 7), (6, 13). (9, 19)\}$ হইলে, 'f-নিয়মে' A এর বিস্তার কত?

6. $X=\{3, 5, 7\}$ হইলে, '$f: x\to x^2+1$' চিত্রণে X-এর বিস্তার বাহির কর।

7. '$f: x\to 2x$' চিত্রণে $f(k)=5$ হইলে, $k=$ কত এবং $f(5)=$ কত?

8. '$f: x\to 2x+3$' চিত্রণে $X=\{2, 3, 5, 6\}$ এর বিস্তার বাহির কর। X এর বিস্তার Y হইলে, '$f^{-1}: Y\to X$' যদি থাকে তাহা বাহির কর।

9. '$g: x\to 3x-1$' চিত্রণে $X=\{2, 4, 6, 8\}$ এর বিস্তার বাহির কর; এবং 'g^{-1}' নির্দেশ কর।

10. $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ এবং $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ এর জন্য '$f: A\to B$' এতে $f(x)=x+1$ হইলে, 'f' চিত্রণটি কি একমানবিশিষ্ট এক-এক চিত্রণ? এখানে f^{-1} কি আছে? যদি থাকে তবে তাহা নির্দেশ কর।

11. $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$; $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$; $C=\{c_1, c_2, c_3\}$; এবং '$f: A\to B$' এতে $f=\{(a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_3), (a_4, b_4)\}$; '$g: B\to C$' এতে $g=\{(b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_3, c_3), (b_4, c_1)\}$ হইলে, '$gf: A\to C$' এর বিস্তার বাহির কর।

12. $X=\{1, 2, 3\}$ হইলে, '$f: x\to x^2$; $(x\in X)$' এর বিস্তার Y বাহির কর এবং '$g: x\to 2x$' চিত্রণে Y এর বিস্তার Z বাহির কর। 'gf' ও 'fg' বাহির কর।

13. '$f: x \to x+3$' এবং $g: x \to x^2$ এর সাহায্যে (i) $gf(4)$, (ii) $fg(4)$, (iii) $fg(-2)$ (iv) $gf(-2)$ বাহির কর।

14. $f: x \to x+3$ এবং $g: x \to 3x$ হইলে (i) f^{-1} এবং g^{-1} নির্দেশ কর। (ii) $fg^{-1}(4)$, $gf^{-1}(4)$, $f^{-1}g^{-1}(4)$, $(fg)^{-1}(4)$ কত ?

15. (i) $N=\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\}$ = স্বাভাবিক সংখ্যার সেট ;

$P=\{x \mid x =$ যে কোন অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $\}$

এবং '$f: N \to P$' দ্বারা $f(n)=(2n-1)$ হইলে 'f' চিত্রণটি কি N হইতে Pএতে এক-এক অনুরূপতা ? যদি হয় তাহা দেখাও।

(ii) $N=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ = স্বাভাবিক সংখ্যার সেট ; এবং $P=\{x \mid x =$ যে কোনও অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $\}$; '$f: N \to P$' হইলে, এবং '$g: N \to Q$' দ্বারা $g(n)=2n$ হইলে, P এবং Q এর মধ্যে কি এক-এক অনুরূপতা আছে ? থাকিলে তাহা দেখাও।

16. $J=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots\}$ = সমুদয় পূর্ণসংখ্যার সেট ;

$N=\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\}$ = স্বাভাবিক সংখ্যার সেট এবং '$f: J \to N$' এতে $f(n)=2n$, যখন $n>0$ এবং $f(n)=-2n+1$, যখন $n \leqslant 0$ হইলে, 'f' চিত্রণটি J হইতে N এতে এক-এক অনুরূপতা কি না নির্দেশ কর।

17. দেখাও যে, যে কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপরিস্থ বিন্দুগুলির সেট ঐ ত্রিভুজের অপর এক বাহুর উপরিস্থ বিন্দুগুলির সেটের সহিত **সমতুল্য**।

18. দেখাও যে, একটি ত্রিভুজের মধ্যে অবস্থিত একটি বৃত্তের পরিধির উপরিস্থিত বিন্দুগুলির সেট ঐ ত্রিভুজের বাহুগুলির উপরিস্থিত বিন্দুগুলির সেটের সহিত **সমতুল্য**।

19. দেখাও যে, সমতলে ঋজুসরণ (Translation) একটি **রূপান্তর**।

20. দেখাও যে, সমতলে ঘূর্ণন (Rotation) একটি **রূপান্তর**।

চতুর্থ অধ্যায়

অপেক্ষক

(Function)

4-1. সংজ্ঞা।

মনে করি, X এবং Y দুইটি সেট, যাহাদের অন্ততঃ একটি করিয়া পদ আছে; এবং উহাদের পদগুলি কেবল বাস্তব রাশি। মনে করি, X এর যে কোন পদ x দ্বারা সূচিত।

কোন নির্দ্দিষ্ট 'f' নিয়মে Y এতে X এর চিত্রণ থাকিলে এবং তাহা একমান-বিশিষ্ট (Single-valued) হইলে, এই চিত্রণকে 'f' নিয়মে Y এতে X এর **অপেক্ষক (function)** বলা হইবে এবং ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হইবে: **'$f: X \to Y$'.** এইরূপ ক্ষেত্রে, 'f' নিয়মে X এর কোন পদ x, Y এর যে পদটিকে নির্দেশ করে **(assigns to)**, তাহাকে $f(x)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। সুতরাং, 'f' নিয়মে x যদি y কে নির্দেশ করে, যেখানে, $x \in X$ এবং $y \in Y$, তাহা হইলে, $y = f(x)$. অতএব, এক্ষণে, '$f: X \to Y$' কে '$f: x \to f(x)$' রূপে প্রকাশ করা যাইবে; যেখানে, $x \in X$ এবং $f(x) \in Y$.

এখানে, $f(x)$ কে x এর **প্রতিবিম্ব (image)**, X কে অপেক্ষক 'f' এর **ব্যাপ্তি (domain)** এবং X এর সমুদয় পদ Y এর যে পদ বা পদগুলিকে নির্দেশ করে তাহাদের সেটকে এই অপেক্ষকের **বিস্তার (range)** বলা হয়।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, মনে করি, $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ এবং '$f: X \to Y$' এতে $f(a_1) = b_1$; $f(a_2) = b_2$; $f(a_3) = b_3$; $f(a_4) = b_4$.

এইরূপ ক্ষেত্রে, X হইতে Y এতে f একটি অপেক্ষক, যাহার

ব্যাপ্তি: $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

এবং **বিস্তার:** $E = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

$$\equiv \{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\}$$

যেখানে. $E \subseteq Y$.

দ্রষ্টব্য: $y = f(x)$ এতে x কে X এর সাপেক্ষে **স্বাধীন চলরাশি (Independent variable)** এবং y কে **অধীন চলরাশি** (Dependent variable) বলা হয়।

মন্তব্য :

(i) '$f : X \to Y$' এতে $c \in X$ হইলে $f(c)$ থাকিবে **(shall exist)** এবং $f(c) \in Y$; কিন্তু $k \notin X$ হইলে, $f(k)$ থাকিবে না (shall not exist).

(ii) '$f : X \to Y$' এতে X এর বিস্তার E হইলে, $E \subseteq Y$ হইবে।

নিম্নোক্ত দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ্যণীয় :

দৃষ্টান্ত 1. $X = \{2, 3, 5, 6\}$; $Y = \{5, 7, 11, 13\}$ এবং '$f : X \to Y$' এর জন্য মনে করি, '$f : x \to 2x+1$', $x \in X$.

এইরূপ ক্ষেত্রে, $f(x) = 2x+1$, $x \in X$.

$\therefore$ $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$; $2 \in X, 5 \in Y$;

$f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$; $3 \in X, 7 \in Y$;

$f(5) = 2 \times 5 + 1 = 11$; $5 \in X, 11 \in Y$;

$f(6) = 2 \times 6 + 1 = 13$; $6 \in X, 13 \in Y$.

এখানে, 'f' নিয়মে X এর প্রতিটি পদের অনুরূপ পদ Y এতে আছে, এবং তাহা একমানবিশিষ্ট। সুতরাং, এখানে, X হইতে Y এতে f অর্থাৎ, $f(x)$ একটি অপেক্ষক যাহার—

ব্যাপ্তি $= \{2, 3, 5, 6\} = X$;

এবং **বিস্তার** $= E = \{f(2), f(3), f(5), f(6)\}$

$= \{5, 7, 11, 13\} = Y$.

মন্তব্য : এইরূপ ক্ষেত্রে, $f(4)$ থাকিবে না ; কারণ $4 \notin X$; সেইরূপ, $f(1)$ থাকিবে না।

দৃষ্টান্ত 2. $X = \{1, 2, 3, 4\}$;

$Y = \{3, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 18, 27\}$

এবং '$f : X \to Y$' এর জন্য মনে করি, '$f : x \to x^2 + 2$, $x \in X$'

এইরূপ ক্ষেত্রে, $f(x) = x^2 + 2$, $x \in X$.

$\therefore$ $f(1) = 1^2 + 2 = 3$; $1 \in X, 3 \in Y$;

$f(2) = 2^2 + 2 = 6$; $2 \in X, 6 \in Y$;

$f(3) = 3^2 + 2 = 11$; $3 \in X, 11 \in Y$;

$f(4) = 4^2 + 2 = 18$; $4 \in X, 18 \in Y$.

এখানে, 'f' নিয়মে Xএর প্রতিটি পদের অনুরূপ পদ Y এতে আছে, এবং তাহা

একমানবিশিষ্ট। সুতরাং, এখানে, X হইতে Y এতে 'f' অর্থাৎ $f(x)$ একটি অপেক্ষক, যাহার

ব্যাপ্তি$=\{1, 2, 3, 4\}=X$;

এবং **বিস্তার**$=E=\{f(1), f(2), f(3), f(4)\}$

$=\{3, 6, 11, 18\}$; $E\subset Y$.

মন্তব্য 1. এইরূপ ক্ষেত্রে, $f(5)$ থাকিবে না ; কারণ, $5\notin X$, যদিও $5^2+2=27\in Y$.

মন্তব্য 2. $X=\{1, 2, 3, 4\}$; $Y=\{3, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 18, 27\}$ এবং '$g : X\to Y$' এর জন্য '$g : x\to 2x+1, x\in X$' হইলে, X হইতে Y এতে $g(x)$ একটি অপেক্ষক হইবে, যাহার,

বিস্তার : $E=\{g(1), g(2), g(3), g(4)\}$

$=\{3, 5, 7, 9\}\subset Y$.

মন্তব্য 3. $X=\{1, 2, 3, 4\}$; $Y=\{3, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 18, 27\}$ এবং '$h : X\to Y$' এর জন্য '$h : x\to 4x+3, x\in X$' হইলে, X হইতে Y এতে 'h' একটি অপেক্ষক হইতে পারে না ; কারণ, এখানে, $f(3)\notin Y$, যেখানে $3\in X$.

দৃষ্টান্ত 3. $X=\{-2, 2, 3, 4\}$, $Y=\{4, 9, 16\}$ এবং '$f : X\to Y$'-এর জন্য '$f : x\to x^2, x\in X$'.

এখানে, $f(x)=x^2, \quad x\in X$.

$\therefore\ f(-2)=(-2)^2=4$; $-2\in X$, $4\in Y$;

$f(2)=2^2=4$; $2\in X$; $4\in Y$;

$f(3)=3^2=9$; $3\in X$; $9\in Y$;

$f(4)=4^2=16$; $4\in X$; $16\in Y$.

সুতরাং, এখানে, X হইতে Y এতে $f(x)$ একটি অপেক্ষক, যাহার **ব্যাপ্তি**$=X$; এবং**বিস্তার**$=Y$.

দৃষ্টান্ত 4. $A\subset R$, যেখানে সমুদয় বাস্তব রাশির সেট R দ্বারা সূচিত এবং '$f : A\to R$' এর জন্য '$f : x\to 2x+3$', $x\in A$ এবং $A=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$.

এইরূপ ক্ষেত্রে, $y\equiv f(x)=2x+3$, $x\in A$.

এখানে, A হইতে R এতে $f(x)$ একটি অপেক্ষক, যাহার '**অবকাশ**$=A$. এবং **বিস্তার :** $E=\{y \mid 5\leqslant y\leqslant 7\}$.

দৃষ্টান্ত 5. $x \in R$, যেখানে x যে কোন বাস্তব রাশি এবং '$f : R \to R'$'-এর জন্য '$f : x \to x^2+1$' হইলে, $f(-2)$, $f(3/2)$ ও $f(0)$ বাহির কর; এবং $f(x)$-এর বিস্তার নির্দেশ কর।

এখানে, $f(x)=x^2+1$; $x \in R$.

$\therefore \; f(-2)=(-2)^2+1=5$;

$f(3/2)=(3/2)^2+1=3\frac{1}{4}$; $f(0)=1$.

নির্ণেয় **বিস্তার** $=\{y \mid 1 \leqslant y < \infty\}$.

দৃষ্টান্ত 6. $R=\{x \mid x=$ যে কোন বাস্তব রাশি$\}$ এবং $S \subset R$ যেখানে, $S=\{t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$; এবং '$\phi : S \to R$' এর জন্য যদি '$\phi : t \to \dfrac{t^2}{t+1}$' হয় তাহা হইলে, $\phi(1/2)$, $\phi(0)$, $\phi(1)$ বাহির কর এবং $\phi(t)$-এর **বিস্তার** নির্দেশ কর।

এখানে, $u \equiv \phi(t)=\dfrac{t^2}{t+1}$, $t \in S$.

$$\therefore \; \phi(1/2)=\frac{1/4}{1/2+1}=\frac{1}{6}; \quad \phi(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}; \quad \phi(0)=0.$$

এখানে, $\phi(t)$-এর **বিস্তার** $=\{u \mid 0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}\}$.

দৃষ্টান্ত 7. "$x \in R$, যেখানে x যে কোন বাস্তব রাশি" হইলে, '$g : x \to \dfrac{2}{x-1}$' এতে $g(x)$-এর **ব্যাপ্তি** ও **বিস্তার** নির্দেশ কর; এবং $g(1)$ না থাকার কারণ দেখাও।

এখানে, '$g(x)=\dfrac{2}{x-1}$, $x \in R$'. $\therefore \; g(1)=\dfrac{2}{0}$ যাহা অনির্ণেয়।

সুতরাং, g-এর **ব্যাপ্তি** $=\{x \mid 1 < x < \infty\,; \; -\infty < x < 1\}$.

এবং **বিস্তার** $=\{y \mid 0 < y < \infty\,; \; -\infty < y < 0\}$.

দৃষ্টান্ত 8. "$f : x \to \sqrt{x-2}$, $x \in R$" হইলে, 'f' এর ব্যাপ্তি ও বিস্তার নির্দেশ কর।

এখানে, $f(x)=\sqrt{x-2}$.

x-এর মান 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, $f(x)$-এর মান কাল্পনিক রাশি হইবে। যেমন, $f(1)=\sqrt{-1}$; $f(0)=\sqrt{-2}$, ইত্যাদি। অপিচ, x-এর মান 2, অথবা, 2 অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, $\sqrt{x-2}$ অর্থাৎ $f(x)$-এর মান বাস্তব রাশি হইবে। সুতরাং $f(x)$-এর **ব্যাপ্তি**: $X=\{x \mid 2 \leqslant x < \infty\}$.

বিস্তার: $E=\{y \mid 0 \leqslant y < \infty\}$.

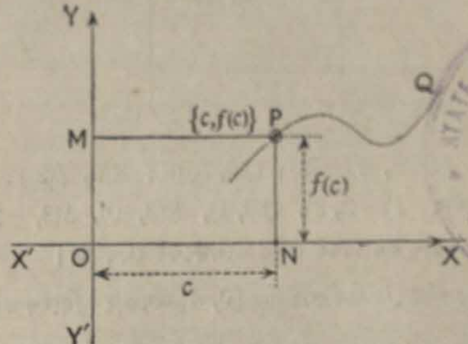
বিশেষ দ্রষ্টব্য : **(1)** x-এর একটি অপেক্ষককে প্রতীকের সাহায্যে $f(x)$ বা, $\phi(x)$ বা, $\psi(x)$ বা, $g(x)$ বা, $h(x)$, বা, $F(x)$, ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে, যেখানে $x \in R$, এবং সমুদয় বাস্তব রাশির সেট R দ্বারা সূচিত।

(2) 'x-এর অপেক্ষক $f(x)$, $x \in R$ হইলে, x কে $f(x)$-এর চলরাশি বলা হয়। একটি অপেক্ষকের চলরাশিকে x, t, θ, ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করা যাইতে পারে।

(3) $f(x)$-এর ব্যাপ্তি E হইলে, যেখানে $E \subseteq R$ এবং $c \in E$-এর জন্য $x = c$ এতে $f(x)$-এর মান থাকিলে, ঐ মান $f(c)$ দ্বারা সূচিত হইবে। কিন্তু $b \notin E$ হইলে, $f(b)$ থাকিবে না।

4-2. অপেক্ষকের লেখ (Graph of a function) :

মনে করি, $y = f(x)$, $x \in E$; $y \in S$, যেখানে $E \subseteq R$ এবং $S \subseteq R$.



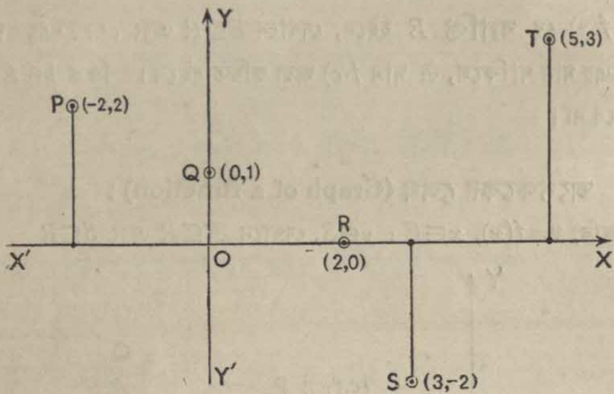
মনে করি, $c \in E$, অর্থাৎ, $f(c)$ নির্ণয়যোগ্য। তাহা হইলে, $f(c) \in S$.

এখন সমতল কাগজে $X'X$ ও $Y'Y$ দুইটি সরলরেখা লইলাম, যাহারা পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। মনে করি, $X'X$ এর উপরিস্থিত N বিন্দুটি c কে সূচিত করে এবং $Y'Y$ এর উপরিস্থিত M বিন্দুটি $f(c)$ কে সূচিত করে। এখন, আয়তক্ষেত্র $ONPM$ সম্পূর্ণ করি। তাহা হইলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $[c, f(c)]$.

এইরূপ x এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর যে সমস্ত মান থাকিবে, x এর সেই সমস্ত মানের অনুরূপ বিন্দু XY—সমতলে পাওয়া যাইবে। এই সমুদয় বিন্দু সমষ্টিগতভাবে $x \in E$ এর জন্য $y = f(x)$ এর **লেখচিত্র (graph)** হইবে।

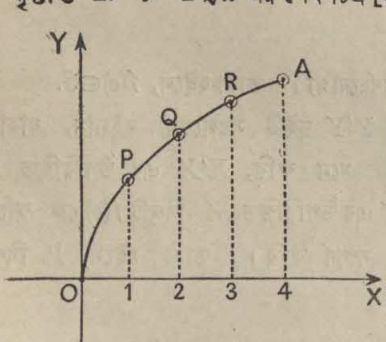
4-3. নিম্নের দৃষ্টান্ত দুইটি লক্ষ্যণীয় ঃ

দৃষ্টান্ত 1. $y=f(x)$ এর লেখচিত্র নির্দেশ কর, যেখানে x এর ব্যাপ্তি $E=\{-2, 0, 2, 3, 5\}$ এবং $f(-2)=2$; $f(0)=1$; $f(2)=0$, $f(3)=-2$; $f(5)=3$.



প্রদত্ত অঙ্কে, $P(-2, f(-2))$; $Q(0, f(0))$; $R(2, f(2))$; $S(3, f(3))$; $T(5, f(5))$; অর্থাৎ $P(-2, 2)$, $Q(0, 1)$, $R(2, 0)$, $S(3, -2)$, $T(5, 3)$ বিন্দুগুলির একই সমতলে সমাবেশই প্রদত্ত অপেক্ষকের লেখচিত্র।

দৃষ্টান্ত 2. $y=2\sqrt{x}$ এর লেখ চিত্র [0, 4] অবকাশে নির্দেশ কর।



প্রদত্ত অপেক্ষক $y=f(x)$ এর লেখচিত্র [0, 4] অবকাশে OA বক্ররেখা, যাহার উপর O, P, Q, R, A বিন্দুগুলি অবস্থিত এবং **O হইতে A পর্যন্ত বক্ররেখাটি কোথাও ভাঙ্গা নহে (no where is the curve broken).**

4-4. অপেক্ষকের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ ঃ

মনে করি, অপেক্ষক $f(x)$ ও $g(x)$ এর ব্যাপ্তি A যেখানে $A \subseteq R$ এবং

$B=\{x\in A\ ;\ g(x)\neq 0\}$. তাহা হইলে, $f(x)$ এবং $g(x)$ এর যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ যথাক্রমে,

$$F : x\to f(x)+g(x),\ x\in A\ ;$$
$$G : x\to f(x)-g(x),\ x\in A\ ;$$
$$\phi : x\to f(x)\ g(x),\ x\in A\ ;$$
$$\psi : x\to f(x)/g(x),\ x\in B\ ;$$

দ্বারা সংজ্ঞা দেওয়া হইবে এবং লেখা হইবে

$$F(x)=f(x)+g(x),\ x\in A\ ;$$
$$G(x)=f(x)-g(x),\ x\in A\ ;$$
$$\phi(x)=f(x)\ g(x),\ x\in A\ ;$$
$$\psi(x)=f(x)/g(x),\ x\in B.$$

দৃষ্টান্ত : $f(x)=x^3\ ;\ g(x)=x^2+1\ ;\ x\in R.$

$$\therefore\ F(x)=f(x)+g(x)=x^3+x^2+1,\ x\in R\ ;$$
$$G(x)=f(x)-g(x)=x^3-x^2-1,\ x\in R\ ;$$
$$\phi(x)=f(x)\ g(x)=x^3(x^2+1),\ x\in R\ ;$$
$$\psi(x)=f(x)/g(x)=x^3/(x^2+1),\ x\in R.$$

4-5. অপেক্ষকের শ্রেণী বিভাগ (Classification of functions) :

(a) বীজগণিতীয় অপেক্ষক (Algebraic functions) :

কোন একটি চলরাশির যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, উদ্বাতন প্রভৃতি প্রক্রিয়া দ্বারা সমন্বিত নির্দিষ্ট সংখ্যক পদযুক্ত একটি রাশিমালাকে ঐ চলরাশির সাপেক্ষে **বীজগণিতীয় অপেক্ষক** বলা হয়।

একটি বীজগণিতীয় অপেক্ষক, আবার একটি মূলদ অপেক্ষক বা একটি অমূলদ অপেক্ষক হইতে পারে।

(1) বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষক :

n একটি নির্দিষ্ট অখণ্ড ধনরাশি এবং a_0, a_1, a_2, ..., a_n নির্দিষ্ট ধ্রুবক হইলে,

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+$ ... ... $+a_{n-1}x+a_n$ কে n-ঘাতবিশিষ্ট (of degree n) x এর একটি **বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষক** (**Polynomial**

function in x, or, **Rational integral function in** x) বলা হয় ; যেখানে $x \in R$; এবং ইহাকে $P(x)$ দ্বারা সাধারণতঃ সূচিত করা হয়। সুতরাং,

$$\mathbf{P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+ \cdots \cdots +a_{n-1}x+a_n \,;\, x\in R.}$$

দৃষ্টান্তস্বরূপ, x^3+2x+5 ; $2x^2-3x+1$; $2x+7$; ইত্যাদি এর প্রত্যেকটি বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষক।

(2) মূলদ অপেক্ষক : (Rational function) :

দুইটি বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষকের ভাগফলকে একটি **মূলদ অপেক্ষক (Rational function)** বলা হয় এবং ইহাকে $R(x)$ দ্বারা সাধারণতঃ সূচিত করা হয়।

মনে করি, $P(x)$ এবং $Q(x)$ দুইটি বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষক যেখানে $x \in R$; এবং $S=\{x\in R \,;\, Q(x)\neq 0\}$. তাহা হইলে, $\mathbf{R(x)=P(x)/Q(x),\ x\in S}$, একটি মূলদ অপেক্ষক যাহার ব্যাপ্তি S।

দৃষ্টান্ত স্বরূপ, $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+1}, x\in R$;

$$\frac{x^2+4}{x^3-1}, x\in S \,;\, S=\{x : 1<x<\infty \,;\, -\infty<x<1\}.$$

(3) অমূলদ অপেক্ষক (Irrational Function) :

যে সমস্ত অপেক্ষক কোন চলরাশির যোগ, বিয়োগ, গুণ ভাগ, উদ্ঘাতন প্রভৃতি প্রক্রিয়া হইতে পাওয়া গিয়াছে অথচ তাহারা কোন মূলদ অপেক্ষক নহে, তাহাদের অমূলদ অপেক্ষক বলা হয়। যেমন,

$$\sqrt{x} \,;\quad \sqrt{x^2+2} \,;\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \,;\quad \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x} \,;$$

অমূলদ অপেক্ষক,

(b) অবীজগণিতীয় অপেক্ষক (Transcendental Function) :

বীজগণিতীয় অপেক্ষক ব্যতীত অপর অপেক্ষকসমূহকে অবীজগণিতীয় অপেক্ষক বলা হয়। তাহারা আবার বিভিন্ন শ্রেণীর হইতে পারে।

(1) ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক (Trigonometric Function) :

sin x, cos x, tan x, cot x, sec x এবং **cosec x**—এই ছয়টি অপেক্ষক যৌথভাবে ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক নামে পরিচিত।

(2) সূচক অপেক্ষক (Exponential function) :

e^x, $(2<e<3\ ;\ x\in R)$ এবং a^x, $(a>0, a\neq 1\ ;\ x\in R)$ এর উভয়কে সূচক অপেক্ষক বলা হয়। e^x কে $\exp(x)$ লেখা হইয়া থাকে।

(3) লগা·রিদ্‌ম্ অপেক্ষক (Logarithmic function) :

$\log_e x$, $(2<e<3\ ;\ x\in R, x>0)$;

$\log_a x$, $(a>0, a\neq 1\ ;\ x\in R, x>0)$;

$\log_a(1+x)$, $(a>0,\ a\neq 1\ ;\ x\in R,\ x>-1)$ এর প্রত্যেকটিকে লগারিদ্‌ম্ অপেক্ষক বলা হয়।

(4) হাইপারবলিক্ অপেক্ষক (Hyperbolic function) :

$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ এবং $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ কে যথাক্রমে সাইন্ হাইপারবলিক অপেক্ষক ও কসাইন্ হাইপারবলিক অপেক্ষক বলা হয়; এবং উহাদের যথাক্রমে $\sinh x$ এবং $\cosh x$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং, $\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$; $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

$\tanh x$, $\coth x$, $\operatorname{sech} x$ ও $\operatorname{cosech} x$ এর সংজ্ঞা দেওয়া হইবে :

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}\ ;\ \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}\ ;$$

$$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}\ ;\ \operatorname{cosech} x=\frac{1}{\sinh x}\cdot$$

দ্রষ্টব্য : (1) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$.

(2) $\cosh 2x+1=2\cosh^2 x$.

(3) $\cosh 2x-1=2\sinh^2 x$.

4-6. অপেক্ষকের অপেক্ষক (Function of a function) :

মনে করি, $f(x)$ ও $g(x)$ অপেক্ষকদ্বয়ের ব্যাপ্তি যথাক্রমে A ও B, যেখানে $A\subseteq R$ এবং $B\subseteq R$.

$f(x)$ ও $g(x)$ এর **যৌগিক অপেক্ষক (Compound function of 'f' and 'g')** কে 'gof' দ্বারা সূচিত করা হয় এবং সংজ্ঞা দেওয়া হয়,

$gof:\ x\to g\{f(x)\}\ ;\ x\in E,\ E\subseteq A.$

এইরূপ ক্ষেত্রে, $g\{f(x)\}$ কে **অপেক্ষকের অপেক্ষক** বলা হয়।

সুতরাং $G(x)=g\{f(x)\}$ হইলে, $G(x)$ কে অপেক্ষকের অপেক্ষক বলা হইবে যাহার ব্যাপ্তি E. সেইরূপ, 'fog' দ্বারা f ও g এর একটি যৌগিক অপেক্ষককে সূচিত করা হইবে, যেখানে

$$fog : x \to f\{g(x)\} ; x \in S, S \subseteq A.$$

সুতরাং, $f\{g(x)\}$ কে **অপেক্ষকের অপেক্ষক** বলা হইবে; এবং $F(x)=f\{g(x)\}$ হইলে, $F(x)$ কেও **অপেক্ষকের অপেক্ষক** বলা হইবে, যাহার ব্যাপ্তি S.

মন্তব্য : সাধারণতঃ, 'fog' $\neq$ 'gof' অর্থাৎ, $F(x) \neq G(x)$.

দৃষ্টান্ত :

(1) '$f : x \to x^2, x \in R$' ; '$g : x \to x+1, x \in R$'.

$\therefore \quad gof : x \to g\{f(x)\} = g(x^2) = x^2+1, x \in R$;

এবং $fog : x \to f\{g(x)\} = f(x+1) = (x+1)^2, x \in R$;

অর্থাৎ, $gof \neq fog$.

এখানে, $F(x) = f\{g(x)\} = (x+1)^2$;

এবং $G(x) = g\{f(x)\} = x^2+1$.

(2) $f(x) = \sin x, x \in R$;

$g(x) = \log x, x \in B, B = \{x \mid x \in R ; x > 0\}$.

$F(x) = f\{g(x)\} = \sin \log x, x \in B ; B \subset R$.

$G(x) = g\{f(x)\} = \log \sin x, x \in S, S = \{x \mid x \in R ; \sin x > 0\}$.

মন্তব্য : একটি অপেক্ষকের অপেক্ষক বীজগণিতীয় অপেক্ষক ও অবীজগণিতীয় অপেক্ষকের মধ্যে যে কোন একটি হইবে।

4-7. বিপরীত অপেক্ষক (Inverse function) :

(a) সংজ্ঞা : মনে করি, $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট অপেক্ষক যাহার ব্যাপ্তি A এবং বিস্তার B যেখানে $A \subseteq R$ ও $B \subseteq R$.

যদি এরূপ একটি একমানবিশিষ্ট অপেক্ষক $g(y)$ পাওয়া সম্ভব হয়, যাহার ব্যাপ্তি B এবং B-এর যে কোন একটি পদ y-এর জন্য A এতে একটি পদ x থাকে, যাহাতে $x=g(y) \Leftrightarrow y=f(x)$ হয়, তাহা হইলে, $g(y)$ কে $f(x)$-এর **বিপরীত অপেক্ষক** বলা হইবে এবং তখন ইহাকে $f^{-1}(y)$ রূপে লেখা হইবে।

সুতরাং, $f(x)$-এর বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}(y)$ থাকিতে হইলে, $f(x)$ কে একটি একমানবিশিষ্ট এক-এক অপেক্ষক হইতে হইবে।

দ্রষ্টব্য : মনে করি, $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট এক এক অপেক্ষক, যাহার ব্যাপ্তি A এবং বিস্তার B; তাহা হইলে $y=f(x)$-এর বিপরীত অপেক্ষক $x=f^{-1}(y)$ থাকিবে, যাহার ব্যাপ্তি B এবং বিস্তার A, $A\subseteq R$ ও $B\subseteq R$. এবং, তখন, $x=f^{-1}(y)\Leftrightarrow y=f(x)$ হইবে। সুতরাং, এইরূপ ক্ষেত্রে, $h\in A$ এবং $f(h)=k$ হইলে, $f^{-1}(k)=h$, অর্থাৎ, $f^{-1}\{f(h)\}=h$ এবং $f\{f^{-1}(k)\}=f(h)=k$.

দৃষ্টান্ত : মনে করি, $f(x)=x-2$. এখানে, R হইতে R-এতে $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট এক-এক অপেক্ষক।

এখন, $y=x-2$ হইতে $x=y+2$ পাওয়া যায়। সুতরাং, $g(y)=y+2$ একটি একমানবিশিষ্ট এক-এক অপেক্ষক যাহার **ব্যাপ্তি** $=f(x)$-এর **বিস্তার** x. সুতরাং, $f^{-1}(y)$ আছে এবং $f^{-1}(y)=y+2$.

মন্তব্য : যদি $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট অপেক্ষক হয়, যাহার **ব্যাপ্তি** A এবং **বিস্তার** B কিন্তু ইহা এক-এক নহে, তাহা হইলে, এইরূপ ক্ষেত্রে, A-এর একটি উপসেট S পাওয়া যাইবে, যখন $k\in B$ হইলে, $f(x)=k$ সমীকরণে x-এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি বীজ h থাকিবে, যেখানে $h\in S$. তখন, $f(x)$ অপেক্ষকটি S হইতে B এতে একমানবিশিষ্ট এক-এক অপেক্ষক হইবে এবং ইহার বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}(y)$ থাকিবে।

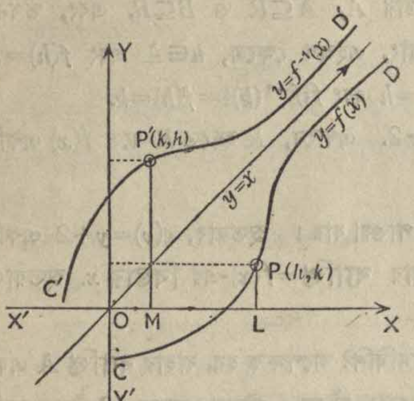
দৃষ্টান্ত : '$f: x\to x^2$, $x\in R$, হইলে, $f(x)=x^2$, $x\in R$. এইরূপ ক্ষেত্রে, $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট অপেক্ষক, যাহার ব্যাপ্তি R এবং বিস্তার S যেখানে $S=\{y \mid 0\leqslant y<\infty\}$; কিন্তু ইহা এক-এক অপেক্ষক নহে; কারণ, $f(-2)=4=f(2)$; সুতরাং এখানে $f(x)$-এর বিপরীত অপেক্ষক থাকিবে না। কিন্তু যদি দেওয়া হয়, $f(x)=x^2$, $x\in S$, $S=\{x \mid 0\leqslant x<\infty\}$, তাহা হইলে, S হইতে S এতে $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট এক-এক অপেক্ষক হইবে এবং তখন $f^{-1}(y)$ থাকিবে।

(b) বিপরীত অপেক্ষকের লেখচিত্র :

মনে করি, $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট এক-এক অপেক্ষক যাহার ব্যাপ্তি A এবং বিস্তার B. সুতরাং, $y=f(x)$ হইতে পাই $x=f^{-1}(y)$, যেখানে $x\in A$ এবং $y\in B$. তাহা হইলে, $h\in A$ এবং $k=f(h)$ হইলে $h=f^{-1}(k)$, $k\in B$ হইবে।

অপেক্ষকের সংজ্ঞানুযায়ী, $y=f(x)$ এতে x স্বাধীন চলরাশি এবং y অধীন চলরাশি; $x=f^{-1}(y)$ এতে y স্বাধীন চলরাশি এবং x অধীন চলরাশি।

সুতরাং উভয়ক্ষেত্রে, স্বাধীন চলরাশি x এবং অধীন চলরাশি y হইলে, $y=f(x)$-এর বিপরীত অপেক্ষক $y=f^{-1}(x)$ হইবে।



এইরূপ ক্ষেত্রে, একই একক এবং একই সমকৌণিক অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে $y=f(x)$ এর লেখচিত্র CD এর উপর $P(h, k)$ অবস্থিত হইলে, $P'(k,h)$ বিন্দুটি $y=f^{-1}(x)$ লেখচিত্রের উপর থাকিবে, যেখানে $y=x$ এর সাপেক্ষে $P(h, k)$ এর প্রতিবিম্ব $P'(k, h)$। সুতরাং, $y=x$ এর সাপেক্ষে $y=f(x)$ এর লেখচিত্র CD এর প্রতিবিম্ব $y=f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র $C'D'$ হইবে।

দৃষ্টান্ত : (1) $y=x^2$, $x\geqslant 0$ হইলে, ইহার বিপরীত অপেক্ষক হইবে $y=\sqrt{x}$, $x\geqslant 0$.

(2) $y=\sin x$, $(-\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2)$ হইলে, ইহার বিপরীত অপেক্ষক হইবে $y=\sin^{-1}x$, $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

(3) $y=e^x$, $(-\infty<x<\infty)$ এর বিপরীত অপেক্ষক $y=\log_e x$, $(x>0)$.

4-8. অপেক্ষকের কয়েকটি বৈশিষ্ট্য :

(1) সীমাবদ্ধ অপেক্ষক (Bounded function) :

মনে করি, $f(x)$ অপেক্ষকের ব্যাপ্তি A. যদি M এবং m দুইটি বাস্তব রাশি থাকে, যাহাদের জন্য $m\leqslant f(x)\leqslant M$ হয়, তাহা হইলে, $f(x)$ একটি **সীমাবদ্ধ অপেক্ষক**। যেমন, $\sin x$ একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক ; কারণ, x এর যে কোন মানের জন্য, $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$.

(2) পর্য্যাবৃত্ত অপেক্ষক (Periodic function) :

যদি $f(x+l)=f(x)$ হয়, তাহা হইলে, $f(x)$ কে x এর **পর্য্যাবৃত্ত অপেক্ষক** এবং l কে উহার **পর্য্যায়মান (Period)** বলা হয়।

যেমন, $\sin x$ একটি পর্য্যাবৃত্ত অপেক্ষক এবং উহার পর্য্যায়মান 2π ; কারণ, $\sin(x+2\pi)=\sin x$.

(3) যুগ্ম ও অযুগ্ম অপেক্ষক (Even and Odd functions) ঃ

$f(-x)=f(x)$ হইলে, $f(x)$ কে যুগ্ম অপেক্ষক; এবং $\phi(-x)=-\phi(x)$ হইলে, $\phi(x)$ কে অযুগ্ম অপেক্ষক বলা হয়।

যেমন, $1, x^2, x^4, \cos x, (x\in R)$ যুগ্ম অপেক্ষক; $x, x^3, x^5, \sin x, (x\in R)$ অযুগ্ম অপেক্ষক।

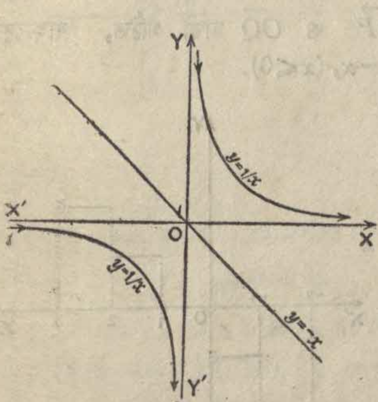
(4) Monotonic functions ঃ

মনে করি, $f(x)$ অপেক্ষকের ব্যাপ্তি A এবং x এর যে কোন দুইটি মান (values) ঃ x_1 ও x_2; যেখানে, $x_1\in A$ ও $x_2\in A$ এবং $x_1<x_2$. যদি $f(x_2)\geqslant f(x_1)$ হয়, তবে A এতে $f(x)$ **monotonic increasing**; এবং $f(x_2)>f(x_1)$ হইলে, A এতে $f(x)$ **strictly monotonic increasing** হইবে।

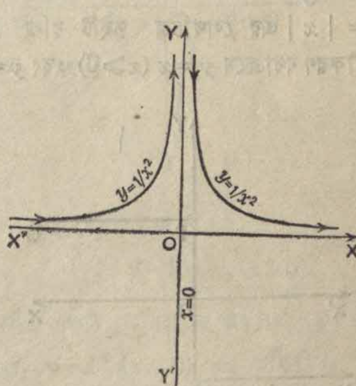
আবার, $f(x_2)\leqslant f(x_1)$ হইলে, A এতে $f(x)$ **monotonic decreasing** এবং $f(x_2)<f(x_1)$ হইলে, A এতে $f(x)$ **strictly monotonic decreasing** হইবে।

যেমন, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ এতে $\sin x$ strictly monotonic increasing; এবং $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$ এতে $\sin x$ strictly monotonic decreasing.

4-9. কতিপয় পরিচিত অপেক্ষকের লেখচিত্র ঃ



1(a). $y=\frac{1}{x}$.

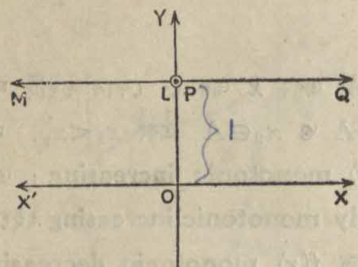


1(b). $y=\frac{1}{x^2}$.

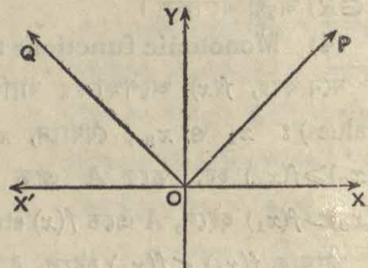
1(a) এতে $\frac{1}{x}$ অপেক্ষকটি $x=0$ এতে অনির্ণেয়; $y=\frac{1}{x}$ এর লেখচিত্র দুইটি অসীম

শাখা (branches) দ্বারা গঠিত ; $y=-x$ এর সাপেক্ষে একটি শাখা অপরটির প্রতিবিম্ব।

1(*b*) এতে $\frac{1}{x^2}$ অপেক্ষকটি $x=0$ এতে অনির্ণেয় ; $y=\frac{1}{x^2}$ এর লেখচিত্র দুইটি অসীম শাখা দ্বারা গঠিত ; $x=0$ এর সাপেক্ষে একটি শাখা অপরটির প্রতিবিম্ব।



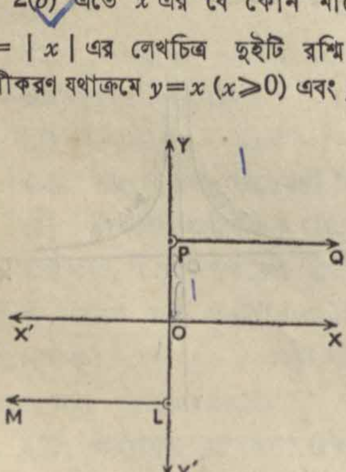
2(*a*). $y=\frac{x}{x}$.



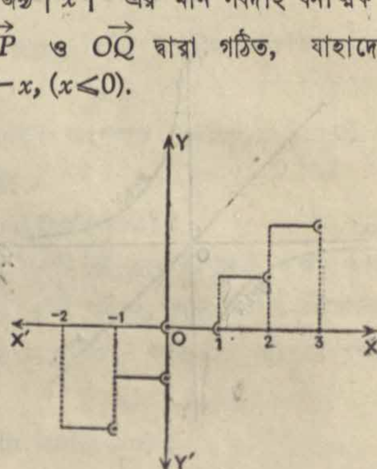
2(*b*). $y=|x|$.

2(*a*) এতে $\frac{x}{x}$ অপেক্ষকটি $x=0$ এতে অনির্ণেয় ; $y=\frac{x}{x}$ এর লেখচিত্র দুইটি রশ্মি $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{LM}$ দ্বারা গঠিত, যাহারা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং ঠিক $(0, 1)$ বিন্দুর পর হইতে আরম্ভ হইয়াছে।

2(*b*) এতে x এর যে কোন মানের জন্য $|x|$ এর মান সর্বদাই ধনাত্মক ; $y=|x|$ এর লেখচিত্র দুইটি রশ্মি $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OQ}$ দ্বারা গঠিত, যাহাদের সমীকরণ যথাক্রমে $y=x$ $(x\geqslant 0)$ এবং $y=-x$, $(x\leqslant 0)$.



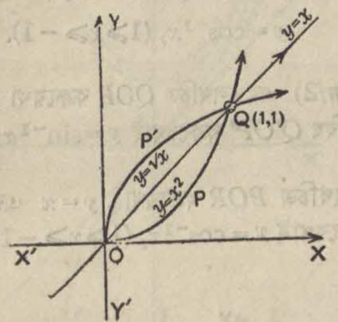
3 (*a*). $y=\frac{|x|}{x}$.



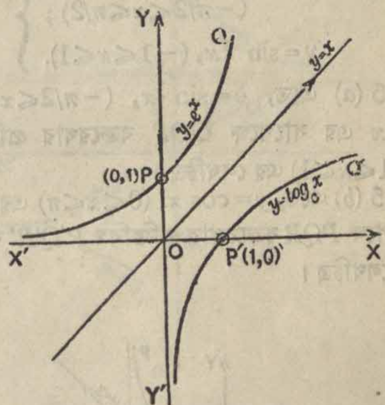
3 (*b*). $y=[x]$.

3 (*a*) এতে $\frac{|x|}{x}$ অপেক্ষকটি $x=0$ এতে অনির্ণেয় ; $y=\frac{|x|}{x}$ এর লেখচিত্র দুইটি রশ্মি $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{LM}$ দ্বারা গঠিত, যাহারা যথাক্রমে প্রথম পাদ ও তৃতীয় পাদে অবস্থিত এবং x-অক্ষের সমান্তরাল ; অপিচ, ঠিক (0, 1) বিন্দুর পর হইতে $\overrightarrow{PQ}$ এবং ঠিক (0, −1) বিন্দুর পর হইতে $\overrightarrow{LM}$ আরম্ভ হইয়াছে।

3(*b*) এতে $[x]$ এর দ্বারা x অপেক্ষা বৃহত্তর নহে অথচ বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যাকে বুঝায় ; সুতরাং, ইহার মান 0, যখন $0\leqslant x<1$; 1, যখন $1\leqslant x<2$; 2, যখন $2\leqslant x<3$; ইত্যাদি। আবার, ইহার মান −1, যখন $-1\leqslant x<0$; −2, যখন $-2\leqslant x<-1$; −3, যখন $-3\leqslant x<-2$; ইত্যাদি। এখানে, $y=[x]$ এর লেখচিত্র $x=0, \pm1, \pm2, \pm3,\cdots\cdots$ এতে ভাঙ্গা ; এবং কতিপয় সর্ব্বসম ও x-অক্ষের সমান্তরাল রেখাংশ দ্বারা এই লেখচিত্র গঠিত।



4 (*a*). $y=x^2$; $(x\geqslant0)$;
$y=\sqrt{x}, (x\geqslant0)$.

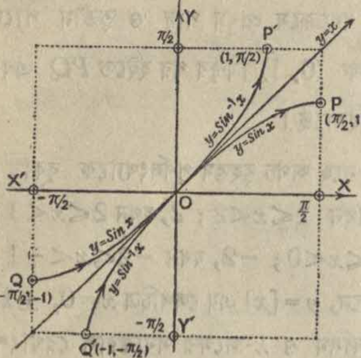


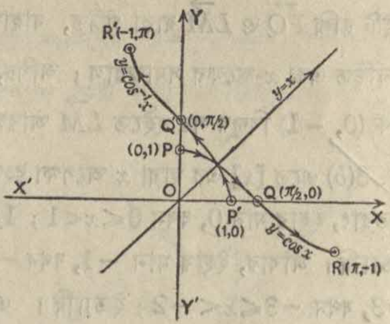
4 (*b*). $y=e^x$;
$y=\log_e x, (x>0)$.

4 (*a*). $y=x^2, (x\geqslant0)$, এর লেখচিত্র একটি অধিবৃত্তের অর্ধাংশ ; $y=x$ এর সাপেক্ষে $y=\sqrt{x}$ $(x\geqslant0)$ এর লেখচিত্র, $y=x^2$ $(x\geqslant0)$ এর প্রতিবিম্ব, অর্থাৎ, $y=x^2(x\geqslant0)$ এর বিপরীত অপেক্ষকের লেখচিত্র।

4 (*b*). x-এর যে কোন মানের জন্য e^x এর মান আছে এবং ইহা সর্বক্ষেত্রেই ধনাত্মক ; $x=0$ হইলে $\log_e x$ এর মান অনির্ণেয় ; $x<0$ হইলে $\log_e x$ এর মান

কাল্পনিক ; এবং $y=e^x$ এর বিপরীত অপেক্ষক $y=\log_e x$, $(x>0)$. সুতরাং, $y=x$ এর সাপেক্ষে $y=\log_e x$, এর লেখচিত্র, $y=e^x$ এর লেখচিত্রের প্রতিবিম্ব হইবে।



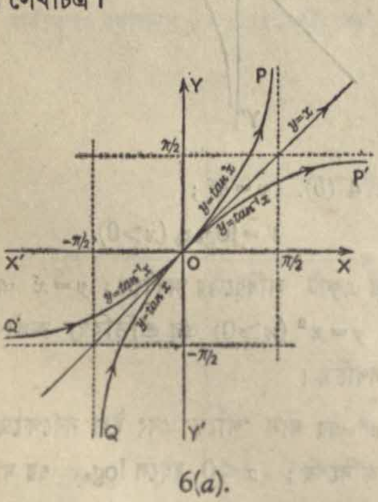


5 (*a*). $y=\sin x$, $(-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2)$; $y=\sin^{-1}x, (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

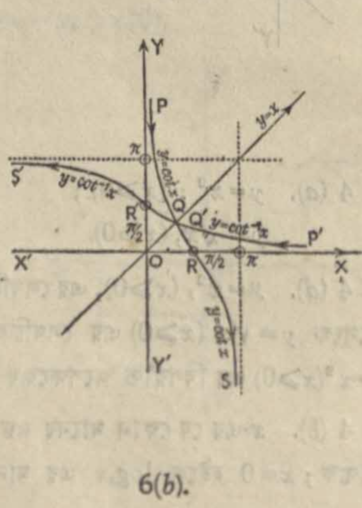
5 (*b*). $y=\cos x$, $(0\leqslant x\leqslant\pi)$; $y=\cos^{-1}x, (1\geqslant x\geqslant -1)$.

5 (*a*) এতে, $y=\sin x$, $(-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2)$ এর লেখচিত্র QOP বক্ররেখা ; $y=x$ এর সাপেক্ষে QOP বক্ররেখার প্রতিবিম্ব $Q'OP'$ বক্ররেখাই $y=\sin^{-1}x$, $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ এর লেখচিত্র।

5 (*b*) এতে, $y=\cos x$, $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ এর লেখচিত্র PQR বক্ররেখা ; $y=x$ এর সাপেক্ষে PQR বক্ররেখার প্রতিবিম্ব $P'Q'R'$ বক্ররেখাই $y=\cos^{-1}x$, $(1\geqslant x\geqslant -1)$ এর লেখচিত্র।



6(*a*).



6(*b*).

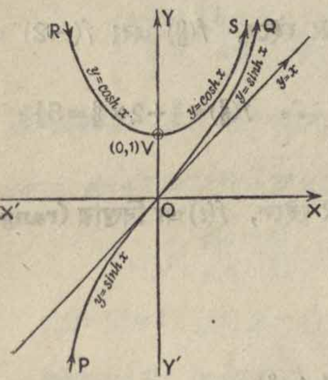
6 (*a*). $y=\tan x$, $(-\pi/2<x<\pi/2)$; $y=\tan^{-1}x, (-\infty<x<\infty)$.

6 (*b*). $y=\cot x, (0<x<\pi)$; $y=\cot^{-1}x, (\infty>x>-\infty)$.

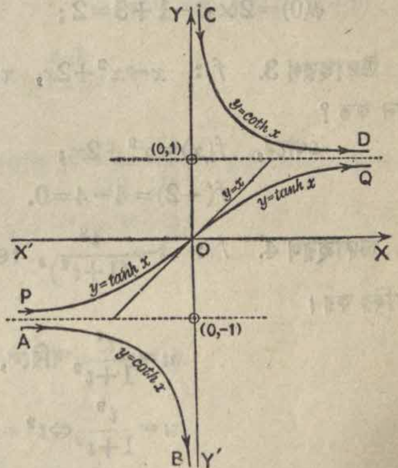
6 (*a*) $y=\tan x, (-\pi/2<x<\pi/2)$ এর বিপরীত অপেক্ষক $y=\tan^{-1}x$, $(-\infty<x<\infty)$. সুতরাং, $y=x$ এর সাপেক্ষে একটি অপরটির প্রতিবিম্ব।

6 (*b*). $y=\cot x$, $(0<x<\pi)$ এর বিপরীত অপেক্ষক $y=\cot^{-1}x$, $(\infty>x>-\infty)$. সুতরাং, $y=x$ এর সাপেক্ষে একটির লেখচিত্র অপরটির প্রতিবিম্ব।

দ্রষ্টব্য: $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, etc. কে যথাক্রমে $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ etc. লেখা হয়।



7(*a*). $y=\sinh x$; $y=\cosh x$.



7(*b*). $y=\tanh x$; $y=\coth x$.

7(a). x এর সকল মানের জন্য $\sinh x$ এর মান আছে; এবং $y=\sinh x$ এর লেখচিত্র কোথাও ভাঙ্গা নহে। x এর সকল মানের জন্য $\cosh x$ এর মান আছে; এবং $y=\cosh x$ এর লেখচিত্র কোথাও ভাঙ্গা নহে।

7 (b). x এর সকল মানের জন্য $\tanh x$ এর মান আছে; এবং $y=\tanh x$ এর লেখচিত্র কোথাও ভাঙ্গা নহে।

$x=0$ ভিন্ন, অপর সকল মানের জন্য $\coth x$ এর মান আছে। $y=\coth x$ এর লেখচিত্রের দুইটি শাখা আছে।

4·10. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. $f(x)=x^3-2x^2+5$ হইলে, $f(2)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-3)$ এর মান বাহির কর।

$$f(2)=2^3-2\times2^2+5=\mathbf{5}\,; \qquad f(0)=\mathbf{5}\,;$$
$$f(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{2}+5=\mathbf{4\tfrac{5}{8}}\,; \qquad f(-3)=-27-18+5=\mathbf{-40}.$$

উদাহরণ 2. $\phi(\theta)=2\sin^2\theta-\cos2\theta+3$ হইলে, $\phi\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $\phi(0)$; $\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ এর মান কত ?

$$\phi\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin^2\frac{\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}+3=2\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+3=\mathbf{5}\,;$$
$$\phi(0)=2\times0-1+3=\mathbf{2}\,; \qquad \phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2+1+3=\mathbf{6}.$$

উদাহরণ 3. $f:\ x\to x^2+2x,\ x\in R$ হইলে, $f(\frac{3}{2})$ এবং $f(-2)$ এর মান কত ?

এখানে, $f(x)=x^2+2x\,;$ $\quad\therefore\quad f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}+2\times\frac{3}{2}=\mathbf{5\frac{1}{4}}\,;$

$f(-2)=4-4=\mathbf{0}.$

উদাহরণ 4. $f:\ t\to\dfrac{t^2}{(1+t^2)},\ t\in R$ হইলে, $f(t)$ এর **বিস্তার (range)** বাহির কর।

$u=\dfrac{t^2}{1+t^2}$ ধরিলে,

$$u=\frac{t^2}{1+t^2}\Leftrightarrow t^2=u(1+t^2)\,;$$
$$\Leftrightarrow(1-u)\,t^2-u=0\,;$$
$$\Leftrightarrow1-u\neq0 \text{ এবং } u(1-u)\geqslant0\,;$$
$$\Leftrightarrow0\leqslant u<1.$$

সুতরাং, নির্ণেয় বিস্তার : $\{u\mid0\leqslant u<1\}$, অর্থাৎ, $[0,1[$.

উদাহরণ 5. $\phi:\ x\to\sqrt{x^2-3x+2}$ হইলে, ϕ এর ব্যাপ্তি বাহির কর।

$$\phi:\ x\to\sqrt{x^2-3x+2}\Leftrightarrow\phi(x)=\sqrt{x^2-3x+2}\,;$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x+2\geqslant0\,;$$
$$\Leftrightarrow(x-1)(x-2)\geqslant0\,;$$
$$\Leftrightarrow x\leqslant1\,;\text{ বা } x\geqslant2.$$

সুতরাং নির্ণেয় ব্যাপ্তি : $\{x\mid-\infty<x\leqslant1\,;\,2\leqslant x<\infty\}$.

উদাহরণ 6. $f(x)=0$, যখন x মূলদ এবং $f(x)=1$ যখন x অমূলদ হইলে, $f(0), f(\frac{1}{2}), f(\sqrt{3}), f(\sqrt{2}-1)$ এর মান বাহির কর।

$$f(0)=0\ ;\quad f(\tfrac{1}{2})=0\ ;\quad f(\sqrt{3})=1\ ;\quad f(\sqrt{2}-1)=1.$$

উদাহরণ 7. $f(x)=\dfrac{x-a}{x}+\dfrac{x}{x-b}$ হইলে,

$f(a+b)$ এবং $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ এর মান বাহির কর।

$$f(a+b)=\frac{a+b-a}{a+b}+\frac{a+b}{a+b-b}=\frac{b}{a+b}+\frac{a+b}{a}$$
$$=(a^2+3ab+b^2)/a(a+b)\ ;$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{b-a}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

উদাহরণ 8. $g(x)=3^x$ হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{g(a+1)}{g(a-1)}=9\ ;\ g(x).\ g(-x)=g(o)$.

এখানে, $g(a+1)=3^{a+1}=3^a\times 3\ ;\ g(a-1)=3^a\times\frac{1}{3}$.

$$\therefore\ \frac{g(a+1)}{g(a-1)}=9\ ;$$

$g(o)=3^0=1\ ;\ g(x)\ g(-x)=3^x.\ 3^{-x}=1=g(o).$

উদাহরণ 9. দেওয়া আছে,

$$F(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{যখন } x<0\ ; \\ 2, & \text{যখন } x=0\ ; \\ 2x+3, & \text{যখন } x>0. \end{cases}$$

$F(-2), F(0), F(3)$ এর মান বাহির কর।

যেহেতু, $F(x)=x^2+1$, যখন $x<0$;

$$\therefore\ F(-2)=(-2)^2+1=5.$$

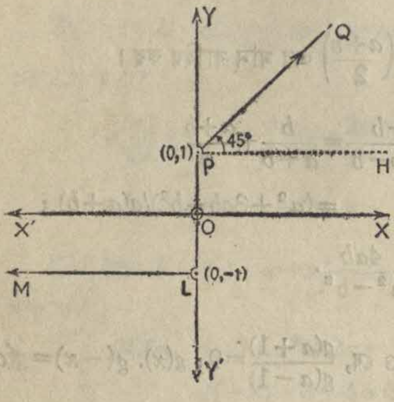
যেহেতু, $F(x)=2$, যখন $x=0$, $\quad\therefore\ F(0)=2.$

যেহেতু, $F(x)=2x+3$, যখন $x>0$,

$$\therefore\ F(3)=2\times 3+3=9.$$

উদাহরণ 10. $y=f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর ; দেওয়া আছে :

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{যখন } x>0\,; \\ 0, & \text{যখন } x=0\,; \\ -1, & \text{যখন } x<0. \end{cases}$$



এখানে $y=f(x)$ এর লেখচিত্র, $\overrightarrow{PQ}$ $(y=x+1)$ ও $\overrightarrow{LM}$ $(y=-1)$ রশ্মি এবং $O(0, 0)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত। $\overrightarrow{LM}$ তৃতীয় পাদে অবস্থিত x-অক্ষের সমান্তরাল এবং ঠিক $(0, -1)$ বিন্দুর পর হইতে আরম্ভ হইয়াছে।

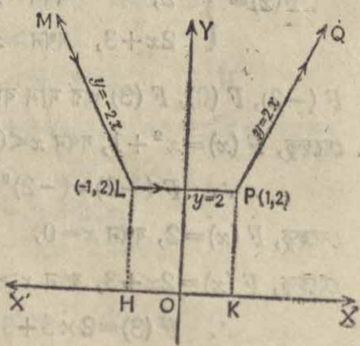
$\overrightarrow{PQ}$ রশ্মি প্রথম পাদে অবস্থিত ; x-অক্ষের সহিত 45° কোণে নত এবং ঠিক (0, 1) বিন্দুর পর হইতে আরম্ভ হইয়াছে।

উদাহরণ 11. $y=\phi(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর ; দেওয়া আছে :

$$\phi(x)=|x-1|+|x+1|.$$

$$\text{এখানে, } \phi(x)=\begin{cases} (x-1)+(x+1), & \text{যদি } x\geqslant 1\,; \\ -(x-1)+(x+1), & \text{যদি } -1\leqslant x\leqslant 1\,; \\ -(x-1)-(x+1), & \text{যদি } x\leqslant 1\,; \end{cases}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \phi(x)=\begin{cases} 2x, & \text{যদি } x\geqslant 1\,; \\ 2, & \text{যদি } -1\leqslant x\leqslant 1\,; \\ -2x, & \text{যদি } x\leqslant -1. \end{cases}$$



$y=\phi(x)$ এর লেখচিত্র $\overrightarrow{PQ}$ $(y=2x)$, $\overrightarrow{LM}$ $(y=-2x)$ রশ্মিদ্বয় এবং $\overline{LP}$ $(y=2)$ রেখাংশ দ্বারা গঠিত।

উদাহরণ 12. দেখাও যে, (a) $\frac{x-4}{3x+2}$, $(x \geqslant 0)$, (b) $\sin x$, $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$,

(c) $\log_e x$, $(x>0)$ এর প্রত্যেকটি strictly monotonic increasing.

(a) মনে করি, $f(x)=\frac{x-4}{3x+2}$; এবং x এর যে কোন দুইটি মান x_1 ও x_2 যেখানে, $x_2>x_1 \geqslant 0$.

$$\therefore \quad f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2-4}{3x_2+2}-\frac{x_1-4}{3x_1+2}$$
$$=\frac{14(x_2-x_1)}{(3x_2+2)(3x_1+2)}>0 \text{ ;}$$

অর্থাৎ, $f(x_2)>f(x_1)$ যখন $x_2>x_1 \geqslant 0$

$\therefore$ $f(x)$, strictly monotonic increasing $(x \geqslant 0)$.

(b) মনে করি, $f(x)=\sin x$; এবং x এর যে কোন দুইটি মান x_1 ও x_2 যেখানে $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi/2$.

$$\therefore \quad f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1$$
$$=2\cos \tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\sin \tfrac{1}{2}(x_2-x_1)>0 \text{ ;}$$

অর্থাৎ, $f(x_2)>f(x_1)$, যখন $x_2>x_1$.

$\therefore$ $\sin x$, strictly monotonic increasing $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.

(c) ধরি, $f(x)=\log_e x$; $x_2>x_1>0$.

$$\therefore \quad f(x_2)-f(x_1)=\log_e x_2-\log_e x_1=\log (x_2/x_1)$$
$$=\log_e \alpha > 0, \quad (\because \quad \alpha=x_2/x_1>1).$$

$$\therefore \quad f(x_2)>f(x_1).$$

সুতরাং, $\log_e x$, strictly monotonic increasing $(x>0)$.

উদাহরণ 13. $P(x)$ একটি দ্বিতীয় ঘাতের x এর বহুপদ অপেক্ষক। $P(1)=0$; $P(2)=3$, $P(-2)=15$ হইলে, $P(3)$ এর মান কত ?

মনে করি, $P(x)=ax^2+bx+c$.

তাহা হইলে, $P(1)=a+b+c=0$;

$P(2)=4a+2b+c=3$;

$P(-2)=4a-2b+c=15$.

ইহাদের সমাধান করিয়া পাই, $a=2$; $b=-3$; $c=1$.

$\therefore$ $P(x)=2x^2-3x+1$.

সুতরাং, $P(3)=2\times 9-3\times 3+1=10$.

উদাহরণ 14. $f: x \to \frac{1}{x}, x \in E = \{x \mid 0 < x \leqslant 2\}$ হইলে, $f(x)$ কি সীমাবদ্ধ (bonnded)? $f(x)$ এর নিম্নস্থ সীমা (lower bound) কত?

$$0 < x \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

সুতরাং, $\frac{1}{x}$, অর্থাৎ, $f(x)$ এর নিম্নস্থ সীমা (lower bound) $= \frac{1}{2}$.

$f(x)$ এর উর্ধ্বস্থ সীমা নাই ; যদি থাকে, তবে, মনে করি, তাহা $M > 0$. তাহা হইলে, $0 < \frac{1}{x} \leqslant M \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{M} \leqslant x, \left(\frac{x}{M} > 0\right.$ দ্বারা গুণ করিয়া$\left.\right)$। কিন্তু, 0 ও $\frac{1}{M}$ এর মধ্যে x এর অসংখ্য মান আছে যাহাদের অনুরূপ $f(x)$, অর্থাৎ, $\frac{1}{x}$ এর মান আছে, এবং তাহাদের প্রত্যেকটি M অপেক্ষা বৃহত্তর। সুতরাং, $\frac{1}{x}$ এর উর্দ্ধস্থ সীমা থাকিতে পারে না। অতএব, অপেক্ষকটি সীমাবদ্ধ নহে।

উদাহরণ 15. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির বিপরীত অপেক্ষক বাহির কর এবং লেখচিত্র নির্দেশন কর।

(a) $y = x - 3$; (b) $y = 2\sqrt{x}$

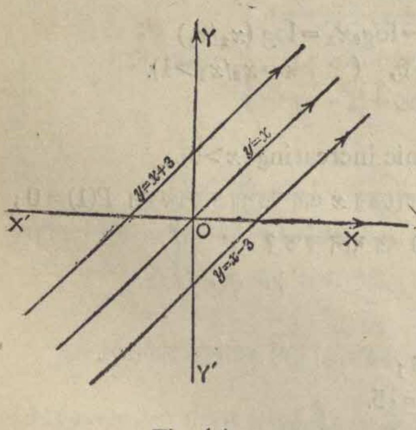


Fig. (a)

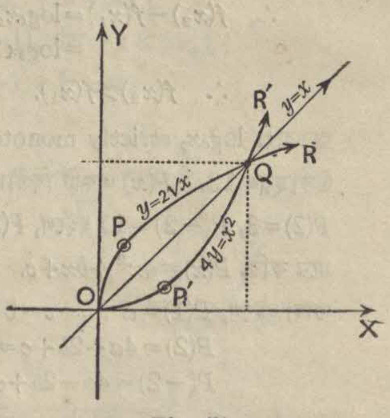


Fig. (b)

(a). $y = x - 3$ এর বিপরীত অপেক্ষক $y = x + 3$.

(b) $y = 2\sqrt{x}$ এর বিপরীত অপেক্ষক $y = \frac{1}{4}x^2$, $(x \geqslant 0)$.

প্রশ্নমালা 4

1. $f: x \to x^2+3$ হইলে, $x=1, 3, -2$ এতে অপেক্ষকের মান কত ?

2. $\phi: x \to 2x^3-4x+3$ হইলে, $x=0, 2, -1$ এতে $\phi(x)$ এর মান কত ?

3. $g: x \to 2x^4+3x^2-1$ হইলে, $g(-2), g(3), g(\frac{1}{2})$ এর মান বাহির কর।

4. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2+\sqrt{x}$ হইলে, $f(0), f(4), f(2)$ এর মান বাহির কর।

5. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}$ হইলে, $f(0), f(2), f(-1)$ এর মান লিখ, যদি থাকে।

6. $\phi(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-9)}{(x-1)(x+3)}$ হইলে $\phi(0)$, $\phi(2)$, $\phi(-3)$ এর মান নির্দেশ কর, যদি থাকে।

7. $F(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$ হইলে, $F(0), F(1), F(3), F(4), F(6)$ এর মান বাহির কর, যদি থাকে।

8. যদি $F(x)=4^x$ হয়, তবে $F(0), F(-1), F(\frac{1}{2})$ এর মান বাহির কর।

9. $\phi: t \to (t^3-3t^2+3t+7), t \in R$, হইলে, $\phi(a+1)=?$ $(a \in R)$.

10. $\phi(x)=2x^4-5x^2+2$ হইলে, $\phi(\sin \pi/4)$ এর মান কত ?

11. $F(\theta)=4\cos^2\theta-3\sin\theta$, $\theta \in R$ হইলে, $F(0)$, $F(\pi/3)$, $F(-\pi/4)$, $F(-\pi)$ এর মান নির্ণয় কর।

12. $f(x)=\dfrac{1-\tan x}{1+\cot x}$ হইলে, $f(\pi/6)$ ও $f(-\pi/4)$ এর মান বাহির কর।

13. দেওয়া আছে, $f(x)=\begin{cases} 3+x, & \text{যখন } x<3; \\ 5, & \text{যখন } x=3; \\ 3-x; & \text{যখন } x>3. \end{cases}$

$f(2), f(3), f(4), f(5)$ এর মান বাহির কর।

14. দেওয়া আছে, $\phi(x)=\begin{cases} x^2+3, & \text{যখন } x \geqslant 0; \\ 3x-2, & \text{যখন } x<0. \end{cases}$

$\phi(0), \phi(3), \phi(-2)$ এর মান নির্ণয় কর।

15. দেওয়া আছে, $F(x)=\begin{cases} 2, & \text{যখন } x>1; \\ -3, & \text{যখন } x=1; \\ x+2, & \text{যখন } x<1. \end{cases}$

$F(1), F(0), F(-2), F(\sqrt{2})$ এর মান বাহির কর।

16. $f(x)=|x-1|+|x+3|$ হইলে, $f(0)$, $f(-5)$, $f(-3)$, $f(4)$ এর মান বাহির কর।

17. $f(x)=5$, $x\in R$ হইলে, $f(-1)$, $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(5/2)$ এর মান নির্ণয় কর।

18. দেওয়া আছে, $\phi(x)=2$, যখন x যে কোন মূলদ রাশি এবং $\phi(x)=-2$, যখন x যে কোন অমূলদ রাশি। $\phi(3)$, $\phi(0)$, $\phi(\sqrt{3})$, $\phi(1+\sqrt{2})$ এর মান কত ?

19. $f(x)=\begin{cases} 2, & x \text{ যে কোন মূলদ রাশি হইলে,} \\ x, & x \text{ যে কোন অমূলদ রাশি হইলে।} \end{cases}$

$f(5)$, $f(\cdot5)$, $f(-3)$, $f(\sqrt{2})$, $f(0)$, $f(e)$, $f(\pi)$, $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$, এর মান নির্ণয় কর।

20. $\phi(x)=\begin{cases} x, & \text{যখন } x \text{ যে কোন মূলদ রাশি,} \\ x+1, & \text{যখন } x \text{ যে কোন অমূলদ রাশি।} \end{cases}$

$\phi(0)$, $\phi(3)$, $\phi(\cdot3)$, $\phi(\sqrt{3})$, $\phi(\sqrt{5}+1)$, $\phi(e)$, $\phi(\log_e 2)$ এর মান নির্ণয় কর।

21. $f(x)=3\sqrt{1-x^3}+5$ এবং $g(x)=x^4-2x^2+4$ হইলে দেখাও যে, $f(-2)>g(-2)$.

22. $\phi(x)=4^x$ হইলে, $\dfrac{\phi(a+1)}{\phi(a-1)}$ এর মান কত ?

23. $f(x)=x^2+1$ হইলে, $\dfrac{f(2\cdot001)-f(2)}{0\cdot001}=$ কত ?

24. $\phi(x)=a\cdot\dfrac{x-b}{a-b}+b\cdot\dfrac{x-a}{b-a}$ হইলে দেখাও যে, $\phi(a)+\phi(b)=\phi(a+b)$.

25. $g(x)=2^x$ হইলে, দেখাও যে $g(a)\cdot g(b)=g(a+b)$.

26. $\phi(x)=a^x$, $(a>0)$ হইলে, দেখাও যে, $\phi(y)\times\phi(z)=\phi(y+z)$.

27. $\phi(x)=\log\dfrac{1-x}{1+x}$ হইলে, দেখাও যে, $\phi(a)+\phi(b)=\phi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$

28. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, এবং $g(x)=x-\dfrac{1}{x}$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $\{f(x)\}^2=f(x^2)+2$; (ii) $\{g(x)\}^2=f(x^2)-2$;
(iii) $f(x)\,g(x)=g(x^2)$.

29. $f(x)=\frac{1}{x}$, $(x>0)$ হইলে, দেখাও যে,

$$f(x+h)-f(x)=-\frac{h}{x^2+xh}, \quad (x+h)>0.$$

30. $y=f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ হইলে, দেখাও যে, $f(y)=\frac{2x+3}{3x+5}$.

31. যদি $y=\phi(x)=\frac{2x+3}{5x-a}$ হয় তবে a এর মান কত হইলে, $x=\phi(y)$ হইবে ?

32. $\phi(x)=\log_e x$ এবং $f(x)=e^x$ হইলে, দেখাও যে, $f\{\phi(x)\}=\phi\{f(x)\}$.

33. যদি $P(x)=ax^2+bx+c$ এবং $P(0)=1$, $P(1)=2$; $P(-1)=6$, হয়, তবে $P(3)$ এর মান বাহির কর।

34. $P(x)$ দ্বিঘাতবিশিষ্ট x এর একটি বহুপদ অপেক্ষক হইলে, এবং

$P(1)=\frac{1}{c}$, $P(2)=\frac{1}{c+1}$, $P(3)=\frac{1}{c+2}$ হইলে, দেখাও যে,

$P(c+2)=\frac{1}{c+2}$.

35. $P(x)$ দ্বিঘাতবিশিষ্ট x এর একটি বহুপদ অপেক্ষক হইলে, এবং $P(a)=\alpha$, $P(b)=\beta$, $P(c)=\gamma$ হইলে, $P(x)$ নির্ণয় কর।

36. x এর কোন্ কোন্ মানের জন্য নিম্নোক্ত অপেক্ষকগুলির মান থাকিবে না তাহা উল্লেখ কর :

(i) $\frac{x+1}{x-2}$; (ii) $\sqrt{x-2}$;

(iii) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$; (iv) $\sqrt{5x-6-x^2}$;

(v) $\sec x$; (vi) $\cot x$; (vii) $\log_{10} x$;

(viii) $\frac{1}{\sin x-\cos x}$; (ix) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

37. নিম্নলিখিত অপক্ষকসমূহের বিস্তার (range) নির্দেশ কর :

(i) $\frac{x^2}{1+x^2}$; (ii) $\frac{x^2+1}{x}$, $(x\neq0)$;

(iii) $\frac{x^2+3}{x-1}$, $(x\neq1)$; (iv) $\sqrt{9-x^2}$, $(-3\leqslant x\leqslant3)$;

(v) $\frac{x}{x^2-3x+2}$, $(x \neq 1, 2)$;

(vi) $\sin x$, $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$; (vii) $\tan x$, $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

38. $y = f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর, যখন :

(i) $f(x) = (x-1)$; (ii) $f(x) = 5$;

(iii) $f(x) = x^2$, $x \geqslant 0$; $f(x) = 0$, $x < 0$;

(iv) $f(x) = 4$, $x > 0$; $f(0) = 2$; $f(x) = -x$, $x < 0$;

(v) $f(x) = |\sin x|$, $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$;

(vi) $f(x) = \log_e (1+x)$, $(x+1 > 0)$; (vii) $f(x) = e^{-x}$.

39. নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের কোন্‌টি যুগ্ম অপেক্ষক এবং কোন্‌টি অযুগ্ম অপেক্ষক তাহা নির্দেশ কর :

(i) $x^4 + 5$, (ii) $x^3 - 3x$, (iii) $ax^4 + bx^2 + c$,

(iv) $5x^3 - 2x + \tan x$, (v) $5^x + 5^{-x}$,

(vi) $x \sin x - 2 + 2 \cos x$, (vii) $\sin x + \operatorname{cosec} x$,

(viii) $\sec x + \cos x - 2$.

40. (*a*) নিম্নোক্ত অপেক্ষকগুলির কোন্‌টি monotonic increasing এবং কোন্‌টি monotonic decreasing তাহা উল্লেখ কর, এবং কারণ দেখাও :

(i) $\frac{x}{x+1}$, $(x > 0)$, (ii) $\log_e x$, $(x > 0)$,

(iii) $\cos x$, $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, (iv) $\tan x$, $\left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right)$,

(v) e^x.

(*b*) দেখাও যে, $\frac{x+4}{3x+2}$, $(0 \leqslant x < \infty)$ strictly monotonic decreasing

(*c*) দেখাও যে, $\phi(x)$, $(x > 0)$ strictly monotone decreasing, যেখানে,

$$\phi(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots \cdots \cdots + \frac{1}{x+n}.$$

(*d*) দেখাও যে, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $(x > 0)$ monotone ascending.

41. (*a*) দেখাও যে, $2x^2+4x+6$, $(x^2 \leqslant 9)$ একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক। ইহার উর্ধ্বস্থ ও নিম্নস্থ সীমা নির্ণয় কর।

(*b*) দেখাও যে, $\sin x$ একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক।

(*c*) $\log_e x$, $(x>0)$ কি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক?

(*d*) $\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-3)}$, $(x\neq 1,\ x\neq 3)$ কি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক?

(*e*) দেখাও যে, $\dfrac{x}{x^2-5x+9}$ একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক। উহার উর্ধ্বস্থ সীমা কত?

42. নিম্নোক্ত অপেক্ষক সমূহের বিপরীত অপেক্ষক যদি থাকে, তবে তাহা নির্ণয় কর:

(i) $y=x-2$; (ii) $y=x^2$;

(iii) $y^2=4x$; (iv) $y=10^x$;

(v) $y=\log_{10}x$, $(x>0)$; (vi) $y=\sin x$, $(\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi)$;

(vii) $y=\dfrac{3+x}{2-x}$, $(x\neq 2)$.

পঞ্চম অধ্যায়

সীমাস্থ মান

(Limiting Values)

5-1. $x \to a+$; $x \to a-$ এবং $x \to a$ এর অর্থ।

(A) প্রথম দৃষ্টান্ত :

স্বজ্ঞাত প্রবেশনা (Intuitive approach) :

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \cdots \cdots \cdots$ —এই অসীম গুণোত্তর শ্রেণী হইতে এই ক্রমে একটির পর একটি সংখ্যাকে চলরাশি x লইতে থাকিলে, যদি x এর গৃহীত মান এবং 0 (শূন্য) এর মধ্যে যে পার্থক্য, সাংখ্যমানে তাহা যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্রতর হইতে ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, তাহা হইলে, বলা যায় যে, x সর্বদা ধনাত্মক মান লইয়া ক্রমশঃ 'শূন্য' এর দিকে অগ্রসর হইতেছে ; এবং এইরূপ ক্ষেত্রে, লেখা হইয়া থাকে : $x \to 0+0$, অথবা, $x \to 0+$.

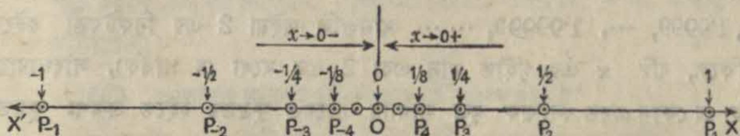
$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots \cdots$ —এই অসীম গুণোত্তর শ্রেণী হইতে এই ক্রমে একটির পর একটি সংখ্যাকে চলরাশি x লইতে থাকিলে, যদি x এর গৃহীত মান এবং 0 (শূন্য) এর মধ্যে যে পার্থক্য, সাংখ্যমানে তাহা যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্রতর হইতে ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, তাহা হইলে, বলা যায় যে, x সর্বদা ঋণাত্মক মান লইয়া ক্রমশঃ 'শূন্য' এর দিকে অগ্রসর হইতেছে ; এবং এইরূপ ক্ষেত্রে, লেখা হইয়া থাকে : $x \to 0-0$, অথবা, $x \to 0-$.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots \cdots$ —এই অসীম গুণোত্তর শ্রেণী হইতে এই ক্রমে একটির পর একটি সংখ্যা, এবং

$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{32} \cdots \cdots$ —এই অসীম গুণোত্তর শ্রেণী হইতে এই ক্রমে একটির পর একটি সংখ্যাকে চলরাশি x লইতে থাকিলে, যদি x এর গৃহীত মান এবং 0 (শূন্য) এর মধ্যে যে পার্থক্য, সাংখ্যমানে তাহা যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্রতর হইতে ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে

থাকে, তাহা হইলে, বলা যায় যে x ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান লইয়া ক্রমশঃ শূন্য এর দিকে অগ্রসর হইতেছে ; এবং তখন লেখা হইয়া থাকে : $x \to 0$.

উপরোক্ত উদাহরণের জ্যামিতিক ধারণা (Geometrical Concept) :



$X'X$ বাস্তব-অক্ষের উপর 'O' বিন্দু 0 (শূন্য) কে ; $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, \cdots\cdots$ বিন্দুগুলি যথাক্রমে $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots\cdots$ সংখ্যাগুলিকে $P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, P_{-4}, P_{-5}, P_{-6}, \cdots\cdots$ বিন্দুগুলি যথাক্রমে $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots\cdots$ সংখ্যাগুলিকে এবং P বিন্দু চলরাশি x এর যে কোন মানকে সূচিত করে।

এখানে, $x \to 0+$ এর অর্থ : P বিন্দুটি বাস্তব অক্ষ $X'X$ বরাবর $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots\cdots$ বিন্দুগুলি হইয়া O বিন্দুর ডান দিক হইতে O বিন্দুর নিকটবর্তী হইতে থাকিবে ; কিন্তু, কখনই ইহা O বিন্দুতে আসিবে না।

সেইরূপ, এখানে, $x \to 0-$ এর অর্থ : P বিন্দুটি বাস্তব অক্ষ বরাবর $P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, P_{-4}, \cdots\cdots$ বিন্দুগুলি হইয়া O বিন্দুর বাম দিক হইতে O বিন্দুর নিকটবর্তী হইতে থাকিবে ; কিন্তু, কখনই ইহা O বিন্দুতে আসিবে না।

এবং $x \to 0$ এর অর্থ P বিন্দুটি বাস্তব অক্ষ বরাবর O বিন্দুর উভয় পার্শ্ব হইতে O বিন্দুর নিকটবর্তী হইতে থাকিবে ; কিন্তু, কখনই ইহা O বিন্দুতে আসিবে না।

(B). দ্বিতীয় দৃষ্টান্ত :

স্বজ্ঞাত ধারণা (Intuitive Concept) :

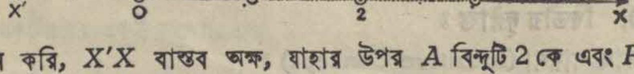
চলরাশি x পর্য্যায়ক্রমে (একটির পর একটি) $2{\cdot}1, \cdots, 2{\cdot}01, \cdots, 2{\cdot}001, \cdots, 2{\cdot}0001, \cdots, 2{\cdot}00001, \cdots\cdots$ মানগুলি লইয়া 2 এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে, যদি x এর গৃহীত মান এবং 2 এর মধ্যে যে পার্থক্য, সংখ্যমানে তাহা যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্রতর হইতে ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, অর্থাৎ, $0<(x-2)<\epsilon$, যেখানে ϵ যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা,

তাহা হইলে, বলা হয় যে, x সর্বদা 2 অপেক্ষক বৃহত্তর মান লইয়া ক্রমশঃ 2 এর দিকে অগ্রসর হইতেছে; এবং এইরূপ ক্ষেত্রে, লেখা হইয়া থাকে : $x \to 2+0$, অথবা, $x \to 2+$.

চলরাশি x পর্য্যায়ক্রমে (একটির পর একটি) 1·9, ···, 1·99, ···, 1·999, ···, 1·9999, ···, 1·99999, ··· ··· মানগুলি লইয়া 2 এর নিকটবর্ত্তী হইতে থাকিলে, যদি x এর গৃহীত মান এবং 2 এর মধ্যে যে পার্থক্য, সাংখ্যমানে তাহা যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্রতর হইতে ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, অর্থাৎ, $0<(2-x)<\epsilon$, যেখানে ϵ যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা, তাহা হইলে, বলা যায় যে, x সর্বদা 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মান লইয়া ক্রমশঃ 2 এর দিকে অগ্রসর হইতেছে; এবং এইরূপক্ষেত্রে, লেখা হইয়া থাকে : $x \to 2-0$, অথবা, $x \to 2-$.

চলরাশি x পর্য্যায়ক্রমে (একটির পর একটি) 2·1, ···, 2·01, ···, 2·001, ···, 2·0001, ···, 2·00001, ··· ···, এবং 1·9, ···, 1·99, ···, 1·999, ···, 1·9999, ···, 1·99999, ··· ··· মানগুলি লইয়া 2 এর নিকটবর্ত্তী হইতে থাকিলে, যদি x এর গৃহীত মান এবং 2 এর মধ্যে যে পার্থক্য, সাংখ্যমানে তাহা যে কোন প্রদত্ত ক্ষুদ্র সংখ্যার চেয়েও ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, অর্থাৎ, যদি $0<|x-2|<\epsilon$ হয়, যেখানে ϵ যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা, তাহা হইলে, বলা যায় যে x সর্বদা 2 অপেক্ষা বৃহত্তর বা 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মানগুলি লইয়া ক্রমশঃ 2 এর দিকে অগ্রসর হইতেছে; এবং তখন লেখা হইয়া থাকে : $x \to 2$, যাহার অর্থ : যুগপৎ $x \to 2+$ এবং $x \to 2-$.

উপরোক্ত উদাহরণের জ্যামিতিক প্রকাশ (Geometrical Interpretation) :



মনে করি, $X'X$ বাস্তব অক্ষ, যাহার উপর A বিন্দুটি 2 কে এবং P বিন্দুটি 2·1, ···, 2·01, ···, 2·001, ···, 2·0001, ······, বা, 1·9, ···, 1·99, ···, 1·999, ···, 1·9999, ······এর যে কোনটিকে সূচিত করে।

এখানে, $x \to 2+$ এর অর্থ : P বিন্দুটি বাস্তব অক্ষ $X'X$ বরাবর A বিন্দুর ডানদিক হইতে A বিন্দুর নিকটবর্ত্তী হইতে থাকিবে, কিন্তু কখনই A বিন্দুতে আসিবে না।

সেইরূপ, $x \to 2-$এর অর্থ : P বিন্দুটি বাস্তব অক্ষ $X'X$ বরাবর A বিন্দুর বামদিক হইতে A বিন্দুর নিকটবর্তী হইতে থাকিবে, কিন্তু কখনই A বিন্দুতে আসিবে না।

$x \to 2$ এর অর্থ : P বিন্দুটি বাস্তব অক্ষ $X'X$ বরাবর A বিন্দুর দিকে উহার উভয় পার্শ্ব হইতে ক্রমাগত অতিশয় নিকটবর্তী হইতে থাকিবে, অথচ, কখনই A বিন্দুতে আসিবে না।

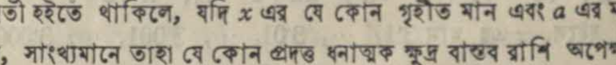
(C) সাধারণ ধারণা (General Concept) :

মনে করি, a একটি নির্দিষ্ট বাস্তব রাশি। চলরাশি x সর্বদা a অপেক্ষা বৃহত্তর মান লইয়া ক্রমশঃ a এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে, যদি x এর যে কোন গৃহীত মান এবং a এর মধ্যে যে পার্থক্য, সাংখ্যমানে তাহা যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যার চেয়েও ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, অর্থাৎ, $0 < |x-a| < \epsilon$ যেখানে ϵ যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা, তাহা হইলে, তখন লেখা যাইবে : $x \to a+0$, অথবা, $x \to a+$.

আবার চলরাশি x সর্বদা a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মান লইয়া ক্রমশঃ a এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে, যদি x এর যে কোন গৃহীত মান এবং a এর মধ্যে যে পার্থক্য সাংখ্যমানে তাহা যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যার চেয়েও ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, অর্থাৎ $0 < |x-a| < \epsilon$, যেখানে ϵ যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা, তাহা হইলে, তখন লেখা হইবে : $x \to a-0$, অথবা $x \to a-$.

অপিচ, চলরাশি x সর্বদা a অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর মান লইয়া ক্রমশঃ a এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে, যদি x এর যে কোন গৃহীত মান এবং a এর মধ্যে, যে পার্থক্য, সাংখ্যমানে তাহা যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র বাস্তব রাশি অপেক্ষা ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, অর্থাৎ, $0 < |x-a| < \epsilon$, যেখানে ϵ যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র বাস্তব রাশি, (তাহা যতই ছোট হউক না কেন), তাহা হইলে, তখন লেখা হইবে : $x \to a$.

উপরোক্তের জ্যামিতিক প্রকাশ (Geometrical Interpretation) :



মনে করি, $X'X$ বাস্তব অক্ষের উপর A বিন্দুটি a কে এবং ঐ অক্ষের উপর P বিন্দুটি x কে সূচিত করে। $x \to a+$ এর অর্থ : P বিন্দুটি $X'X$ বরাবর A বিন্দুর ডান দিক হইতে A বিন্দুর ক্রমশঃ নিকটবর্তী হইতে থাকিবে, কিন্তু, কখনই A বিন্দুতে

আসিবে না। $x\to a-$ এর অর্থ : P বিন্দুটি $X'X$ বরাবর A বিন্দুর বাম দিক হইতে A বিন্দুর নিকটবর্তী হইতে থাকিবে, কিন্তু, কখনই A বিন্দুতে আসিবে না।

$x\to a$ এর অর্থ : P বিন্দুটি বাস্তব অক্ষ $X'X$ বরাবর A বিন্দুর দিকে উহার উভয় পার্শ্ব হইতে ক্রমশঃ অতিশয় নিকটবর্তী হইতে থাকিবে, অথচ, কখনই উহা A বিন্দুতে আসিবে না।

5-2. অপেক্ষকের সীমাস্থ মান (Limiting Value of a Function) :

[a] $\underset{x\to a+}{\text{Lt}} f(x)$, বা, $f(a+0)$ এর অর্থ :

মনে করি, $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট x এর অপেক্ষক, $x \in R$, এবং a একটি নির্দ্দিষ্ট বাস্তব রাশি।

চলরাশি x সর্বদা a অপেক্ষা বৃহত্তর মান লইয়া ক্রমশঃ a এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে, যদি $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি থাকে এবং সেইগুলি ক্রমশঃ একটি নির্দ্দিষ্ট ধ্রুবক l_1 এর অতিশয় নিকটবর্তী হইতে থাকে, অথবা সর্বদা l_1 হয়, অর্থাৎ, যখন $x\to a+$, $f(x)$ এর গৃহীত মান ও l_1 এর মধ্যে যে পার্থক্য, সাংখ্যমানে তাহা যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্রতর হইতে ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, তাহা হইলে, বলা হইবে যে, **'f(x) এর সীমাস্থ মান l_1, যখন $x\to a+$'** ; এবং তখন ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হইয়া থাকে :

$$\underset{x\to a+}{\text{Lt}} f(x)=l_1, \quad \text{অথবা}, \quad f(a+0)=l_1.$$

দৃষ্টান্ত : (i) মনে করি, $f(x)=2x+1$ এবং $x\to 3+$.

তাহা হইলে, x এর মান 3·1, ···, 3·01, ···, 3·001, ···, 3·0001, ···, 3·00001, ··· হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে :

7·2, ···, 7·02, ···, 7·002, ···, 7·0002, ···, 7·00002, ···

সুতরাং, এখানে দেখা যাইতেছে যে, $f(x)\to 7$, যখন $x\to 3+$. তাহা হইলে, এখানে $f(x)$ এর সীমাস্থ মান 7, যখন $x\to 3+$, অর্থাৎ $\underset{x\to 3+}{Lt} f(x)=7$, বা, $f(3+0)=7$.

(ii) মনে করি, $f(x)=5$, এবং $x\to 3+$.

তাহা হইলে, x এর মান 3·1, ···. 3·01, ··, 3·001, ···, 3·0001, ···, 3·00001, ···, হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি সর্বদা 5 হইবে। সুতরাং, এখানে $f(x)$ এর সীমাস্থ মান 5, যখন $x\to 3+$, অর্থাৎ, $\underset{x\to 3+}{Lt} f(x)=5$, বা, $f(3+0)=5$.

(iii) মনে করি, $f(x) = \sqrt{2-x}$ এবং $x \to 2+$.

তাহা হইলে, x এর মান 2·1, ⋯, 2·01, ⋯, 2·001, ⋯, 2·0001, ⋯, 2·00001, ⋯, হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি বাস্তব নহে ; অর্থাৎ $f(x)$ এর মান থাকে না। সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে, $\underset{x \to 2+}{Lt} f(x)$, বা, $f(2+0)$ থাকে না।

(b) $\underset{x \to a-}{Lt} f(x)$, বা, $f(a-o)$ এর অর্থ :

মনে করি, $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট x এর অপেক্ষক, $x \in R$, এবং a একটি নির্দ্দিষ্ট বাস্তব রাশি।

চলরাশি x সর্বদা a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মান লইয়া ক্রমশঃ a এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে, যদি $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি থাকে এবং সেইগুলি ক্রমশঃ একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক l_2 এর অতিশয় নিকটবর্তী হইতে থাকে, অথবা, সর্বদা l_2 হয়, অর্থাৎ, যখন $x \to a-$, $f(x)$ এর গৃহীত মান ও l_2 এর মধ্যে যে পার্থক্য, সাংখ্যমানে তাহা যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্রতর হইতে ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, তাহা হইলে, বলা হইবে যে, **'$f(x)$ এর সীমাস্থ মান l_2, যখন $x \to a-$'** ; এবং তখন ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হইবে :

$$\underset{x \to a-}{Lt} f(x) = l_2, \quad \text{অথবা,} \quad f(a-o) = l_2.$$

দৃষ্টান্ত : (i) মনে করি, $f(x) = 2x+1$, এবং $x \to 3-$.

তাহা হইলে, x এর মানগুলি 2·9, ⋯, 2·99, ⋯, 2·999, ⋯, 2·9999, ⋯, হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে : 6·8, ⋯, 6·98, ⋯' 6·998, ⋯, 6·9998, ⋯

সুতরাং, এখানে দেখা যাইতেছে যে, $f(x) \to 7$, যখন $x \to 3-$. তাহা হইলে, এখানে $f(x)$ এর সীমাস্থ মান 7, যখন $x \to 3-$; অর্থাৎ, $\underset{x \to 3-}{Lt} f(x) = 7$, বা, $f(3-0) = 7$.

(ii) মনে করি, $f(x) = 5$ এবং $x \to 3-$.

তাহা হইলে, x এর মান 2·9, ⋯, 2·99, ⋯, 2·999, ⋯, 2·9999, ⋯, হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি সর্বদা 5 হইবে। সুতরাং, এখানে $f(x)$ এর সীমাস্থ মান 5, যখন $x \to 3-$; অর্থাৎ, $\underset{x \to 3-}{Lt} f(x) = 5$, বা, $f(3-0) = 5$.

(iii) মনে করি, $f(x)=\sqrt{x-3}$ এবং $x \to 3-$.

তাহা হইলে x এর মান 2·9···, 2·99,···, 2·999,···, 2·9999,···হইলে, $f(x)$ এর মান থাকে না। সুতরাং, এইরূপ ক্ষেত্রে, $\underset{x\to 3-}{Lt} f(x)$; বা, $f(3-0)$ থাকে না।

(c) $\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x)=l$ এর অর্থ :

মনে করি, $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট x এর অপেক্ষক, $x \in R$, এবং a একটি নির্দিষ্ট বাস্তব রাশি। চলরাশি x সর্বদা a অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর মান লইয়া ক্রমশঃ a এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে, যদি $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি থাকে এবং সেইগুলি ক্রমশঃ একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক l এর অতিশয় নিকটবর্তী হইতে থাকে, অথবা, সর্বদা l হয় ; অর্থাৎ, যখন $x \to a$, $f(x)$ এর গৃহীত মান ও l এর মধ্যে যে পার্থক্য, সাংখ্যমানে তাহা যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্রতর হইতে ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, তাহা হইলে, বলা হইবে যে, **'$f(x)$ এর সীমাস্থ মান l, যখন $x \to a$'** ; এবং তখন ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হইয়া থাকে : $\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x)=l$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(i) $\underset{x\to a+}{Lt} f(x)=l$ এবং $\underset{x\to a-}{Lt} f(x)=l$, অর্থাৎ, $f(a+o)=l$ এবং $f(a-o)=l$ যখন হইবে, যেখানে l একটি নির্দিষ্ট বাস্তব রাশি, তখন $\underset{x\to a}{Lt} f(x)$ থাকিবে এবং $\underset{x\to a}{Lt} f(x)=l$.

(ii) $f(a+o)$ এবং $f(a-o)$ সমান না হইলে, অথবা, উহাদের যে কোনটি না থাকিলে $\underset{x\to a}{Lt} f(x)$ থাকিবে না।

(iii) $\underset{x\to a}{Lt} f(x)$ এর মান নির্ণয়, $f(a)$ এর মান আছে কিনা তাহার উপর নির্ভর করে না। অনেক ক্ষেত্রে দেখা যাইবে $\underset{x\to a}{Lt} f(x)$ আছে অথচ $f(a)$ অনির্ণেয়, অথবা $f(a)$ আছে, কিন্তু $\underset{x\to a}{Lt} f(x) \neq f(a)$.

(iv) সংক্ষেপে $f(a+o)$ এবং $f(a-o)$ কে যথাক্রমে $f(a+)$ এবং $f(a-)$ রূপে লেখা যাইতে পারে।

দৃষ্টান্ত : (1). মনে করি, $f(x)=x^2$, এবং $x \to 2$.

এখন, $x \to 2+$ হইলে, অর্থাৎ, x এর মান$\cdots$, $2{\cdot}1, \cdots, 2{\cdot}01, \cdots, 2{\cdot}001, \cdots, 2{\cdot}0001, \cdots \cdots$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে : $\cdots, 4{\cdot}41, \cdots, 4{\cdot}0401, \cdots, 4{\cdot}004001, \cdots, 4{\cdot}00040001, \cdots \cdots$

স্পষ্টতঃই, $f(2+0)=4$, অর্থাৎ, $f(x) \to 4$, যখন $x \to 2+0$.

আবার, $x \to 2-$ হইলে, অর্থাৎ, x এর মান $\cdots, 1{\cdot}9, \cdots, 1{\cdot}99, \cdots, 1{\cdot}999, \cdots, 1{\cdot}9999, \cdots \cdots$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে : $\cdots, 3{\cdot}61, \cdots, 3{\cdot}9601, \cdots, 3{\cdot}996001, \cdots, 3{\cdot}99960001, \cdots \cdots$.

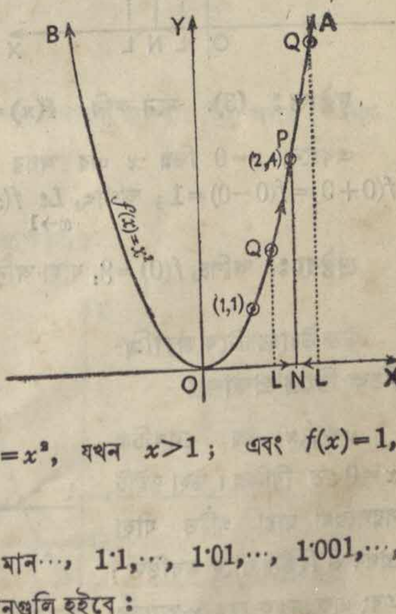
স্পষ্টতঃই, $f(2-0)=4$, অর্থাৎ $f(x) \to 4$, যখন $x \to 2-0$.

সুতরাং, এখানে, $f(x) \to 4$, যখন $x \to 2$; অর্থাৎ, $\underset{x \to 2}{Lt} (x)=4$.

দ্রষ্টব্য : এখানে, $f(2)=4$; সুতরাং $f(2)$ আছে এবং $\underset{x \to 2}{Lt} f(x)=f(2)=4$

উক্ত উদাহরণটিকে **জ্যামিতিক চিত্রে প্রকাশ :**

$y=x^2$ এর লেখচিত্র BOA বক্ররেখা (অধিবৃত্ত) ; P ও Q উহার উপরে অবস্থিত, যেখানে $ON=2$, $PN=4$; $OL=x$, $QL=y$, বা, $f(x)$. x-অক্ষ বরাবর L বিন্দুটি N এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে অর্থাৎ, $x \to 2$ হইলে, বক্ররেখা বরাবর Q বিন্দু P এর নিকটবর্তী হইতে থাকে ; এবং তখন, $QL \to PN$, অর্থাৎ, $y \to 4$, বা, $f(x) \to 4$.



দৃষ্টান্ত : (2). মনে করি, $f(x)=x^2$, যখন $x>1$; এবং $f(x)=1$, যখন $x \leq 1$; $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} f(x)=$ কত ?

$x \to 1+$ হইলে, অর্থাৎ, x এর মান$\cdots$, $1{\cdot}1, \cdots, 1{\cdot}01, \cdots, 1{\cdot}001, \cdots, 1{\cdot}0001, \cdots\cdots$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে :

$\cdots, 1{\cdot}21, \cdots, 1{\cdot}0201, \cdots, 1{\cdot}002001, \cdots, 1{\cdot}00020001, \cdots \cdots$

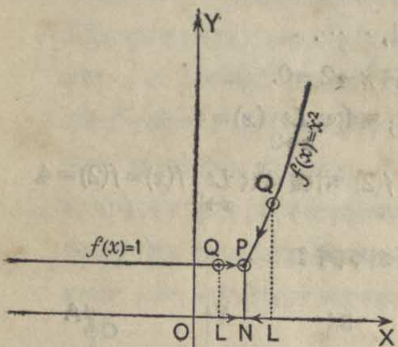
স্পষ্টতঃই, $f(x) \to 1$, যখন $x \to 1+$, অর্থাৎ, $f(1+0)=1$.

$x \to 1-0$ হইলে, অর্থাৎ x এর মান…, ·9, …, ·99, …, ·999, …, ·9999,… …হইলে, $f(x)$ এর মান সকল ক্ষেত্রে 1. সুতরাং, $f(x)=1$, যখন $x \to 1-0$, অর্থাৎ, $f(1-0)=1$.

সুতরাং, এখানে $f(x)$ এর সীমাস্থ মান 1, যখন $x \to 1$; অর্থাৎ, $\underset{x \to 1}{Lt} f(x)=1$.

দ্রষ্টব্য : এখানে $f(1)=1$, অর্থাৎ, $f(1)$ আছে এবং $\underset{x \to 1}{Lt} f(x)=f(1)=1$.

উক্ত উদাহরণটিকে **জ্যামিতিক চিত্রে প্রকাশ :**



$y=f(x)$ এর লেখচিত্রের উপর P ও Q অবস্থিত ; $ON=PN=1$; $OL=x$; $QL=f(x)$ $(=y)$. x অক্ষ বরাবর L বিন্দু N এর নিকটবর্ত্তী হইতে থাকিলে, অর্থাৎ, $x \to 1$ হইলে, QL এর মান 1, বা, 1 এর নিকটবর্ত্তী হইতে থাকে ; অর্থাৎ $f(x) \to 1$, যখন $x \to 1$.

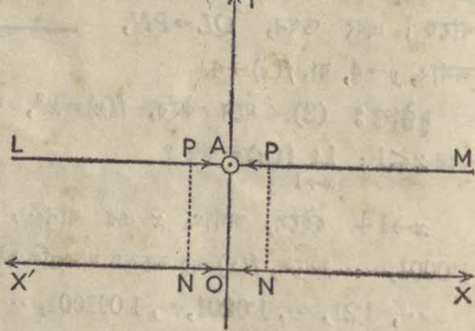
দৃষ্টান্ত : (3). মনে করি, $\mathbf{f(x)=\frac{x}{x}}$; এবং $\mathbf{x \to 0}$.

এখানে, $x=0$ ভিন্ন x এর অপর সকল মানের জন্য $f(x)=1$. সুতরাং, $f(0+0)=f(0-0)=1$; অর্থাৎ, $\underset{x \to 1}{Lt} f(x)=1$.

দ্রষ্টব্য : অপিচ, $f(0)=\frac{0}{0}$, যাহা অনির্ণেয়। কিন্তু, $\underset{x \to 0}{Lt} f(x)$ আছে এবং তাহা 1.

উক্ত উদাহরণটিকে **জ্যামিতিক চিত্রে প্রকাশ :**

$y=f(x)$ এর লেখচিত্র $x=0$ তে বিচ্ছিন্ন। উহা দুইটি সরলরেখা দ্বারা গঠিত যাহা প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত ; এবং এক একক দূরে x-অক্ষের সমান্তরাল।



$A(0, 1)$ বিন্দুটি লেখচিত্রের উপর অবস্থিত নহে। P বিন্দুটি লেখচিত্রের উপর

অবস্থিত, $ON=x$; $PN=f(x)$ $(=y)$. x-অক্ষ বরাবর N বিন্দু মূলবিন্দু O এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে, P বিন্দু A এর নিকটবর্তী হইতে থাকে।

সুতরাং, $\underset{x\to 0}{Lt}\ f(x)=1.$

দৃষ্টান্ত : (4). মনে করি, $\mathbf{f(x)=2}$ **যখন** $\mathbf{x>0}$; $\mathbf{f(x)=x^2}$ যখন $\mathbf{x<0}$; $\mathbf{f(0)=1}$; এবং $\mathbf{x\to 0}$.

x এর সকল ধনাত্মক মানের জন্য $f(x)=2$ বলিয়া, $f(0+0)=2$; অর্থাৎ, $\underset{x\to 0+}{Lt}\ f(x)=2.$

$x\to 0-$ হইলে, অর্থাৎ, x এর মান $\cdots, -0{\cdot}1, \cdots, -0{\cdot}01, \cdots, -0{\cdot}001, \cdots \cdots$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে $\cdots, 0{\cdot}01, \cdots, 0{\cdot}0001, \cdots, 0{\cdot}000001, \cdots$.

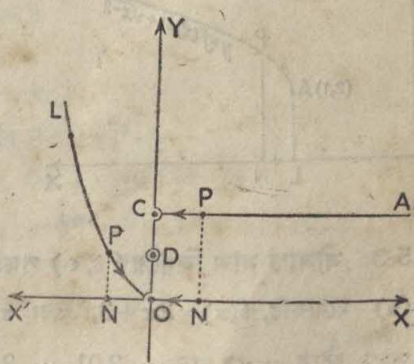
স্পষ্টতঃই, $f(0-0)=0$; অর্থাৎ $\underset{x\to 0-}{Lt}\ f(x)=0.$ সুতরাং, $f(0+0)\neq f(0-0)$.

তাহা হইলে $\underset{x\to 0}{Lt}\ f(x)$ থাকছে না।

দ্রষ্টব্য : আবার, দেওয়া আছে : $f(0)=1$. এখানে, সুতরাং $f(0)$ আছে ; অথচ $\underset{x\to 0}{Lt}\ f(x)$ থাক্‌ছে না।

উক্ত উদাহরণটিকে **জ্যামিতিক চিত্রে প্রকাশ :**

$y=f(x)$ এর লেখচিত্র $x=0$ এতে বিচ্ছিন্ন। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 2). P বিন্দু লেখ-চিত্রের উপর অবস্থিত, $ON=x$, $PN=f(x)$ $(=y)$. x-অক্ষ বরাবর N বিন্দু মূলবিন্দু 0 এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে, PN এর মান 2 বা, 0 (শূন্য) এর নিকটবর্তী হয় ; অর্থাৎ, $f(0+0)=2$ এবং $f(0-0)=0$. কিন্তু, $f(0)=1$.



দৃষ্টান্ত : (5). মনে করি, $\mathbf{f(x)=1+\sqrt{x-2}}$ এবং $\mathbf{x\to2}$.

$x\to2+$ হইলে, অর্থাৎ, x এর মান…, 2·01, …, 2·0001, …, 2·000001, … … হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে : …, 1·1, …, 1·01, …, 1·001,… …

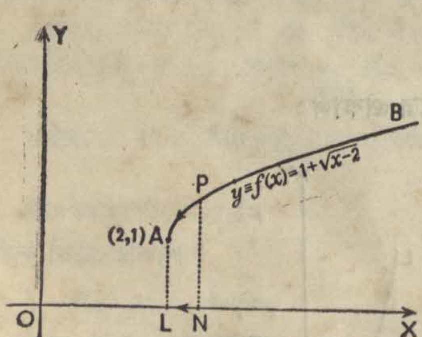
স্পষ্টতঃই, $f(2+0)=1$; অর্থাৎ, $\underset{x\to2+}{Lt}\ f(x)=1$.

কিন্তু, $x\to2-$ হইলে, অর্থাৎ, x এর মান …, 1·99, …, 1·9999, …, 1·999999, …… হইলে, $\sqrt{x-2}$ এর অনুরূপ মানগুলি বাস্তব নহে। সুতরাং, তখন $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি থাকে না। সুতরাং, এখানে $f(2-0)$, অর্থাৎ, $\underset{x\to2-}{Lt}\ f(x)$ থাকছে না।

অতএব, এইরূপ ক্ষেত্রে, $\underset{x\to2}{Lt}\ f(x)$ থাকছে না।

দ্রষ্টব্য : এখানে, $f(2)=1$; অর্থাৎ $f(2)$ আছে, অথচ $\underset{x\to2}{Lt}\ f(x)$ থাকছে না।

উক্ত উদাহরণটিকে জ্যামিতিক চিত্রে প্রকাশ :



$y=f(x)$ এর লেখচিত্র AB বক্ররেখা। $x\geqslant2$ এর মধ্যে বক্ররেখা আছে ; কিন্তু, $x<2$ হইলে, কোনও লেখচিত্র নাই। চিত্রে $OL=2$, $AL=1$; $ON=x$, $PN=y$. $N\to L$ হইলে, $PN\to AL$; অর্থাৎ, $x\to2+$ হইলে, $f(x)\to1$; অর্থাৎ, $f(2+0)=1$.

5·3. সীমান্থ মান নির্ণয়ে (δ, ϵ) পদ্ধতি :

(a) মনে করি, $\mathbf{f(x)=2x+3}$, এবং $\mathbf{x\to2}$.

তাহা হইলে, x এর মান …, 2·01, …, 2·001, …, 2·0001, …, … হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে : …, 7·02, …, 7·002, …, 7·0002, …, ….

আবার, x এর মান $\cdots, 1{\cdot}99, \cdots, 1{\cdot}999, \cdots, 1{\cdot}9999, \cdots, \cdots$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মান হইবে : $\cdots,\ 6{\cdot}98, \cdots,\ 6{\cdot}998, \cdots,\ 6{\cdot}9998, \cdots, \cdots$ সুতরাং, স্পষ্টতঃই $f(x) \to 7$, যখন $x \to 2$; অর্থাৎ, $\underset{x\to 2}{Lt}\ f(x)=7$.

এখন, $\quad |f(x)-7|, \quad (x \neq 2)$

$$= |(2x+3)-7| = 2|x-2|\,.$$

মনে করি, ϵ যে কোন ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা ; তাহা হইলে,

$$|f(x)-7| < \epsilon, \text{ যখন } 0 < 2|x-2| < \epsilon,$$

অর্থাৎ, $0 < |x-2| < \frac{\epsilon}{2}$.

সুতরাং, $\quad |f(x)-7| < 0{\cdot}01$, যখন $0 < |x-2| < 0{\cdot}005$;

$|f(x)-7| < 0{\cdot}001$, যখন $0 < |x-2| < 0{\cdot}0005$;

$|f(x)-7| < 0{\cdot}0004$, যখন $0 < |x-2| < 0{\cdot}0002$; ইত্যাদি।

তাহা হইলে, $|f(x)-7| < \epsilon$, যখন $0 < |x-2| < \delta$; যেখানে $\delta \equiv \frac{\epsilon}{2}$.

(b) মনে করি, $\mathbf{f(x)=x^2}$ এবং $\mathbf{x \to 0}$.

এখানে, x এর মান $\cdots, 0{\cdot}1, \cdots, 0{\cdot}01, \cdots, 0{\cdot}001, \cdots$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মান : $\cdots, 0{\cdot}01, \cdots, 0{\cdot}0001, \cdots, 0{\cdot}000001, \cdots\cdots$

এবং x এর মান $-0{\cdot}1, \cdots, -0{\cdot}01, \cdots, -0{\cdot}001, \cdots$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মান : $\cdots, 0{\cdot}01, \cdots, 0{\cdot}0001, \cdots, 0{\cdot}000001, \cdots$.

এখানে, স্পষ্টতঃই, $f(x) \to 0$, যখন $x \to 0$; অর্থাৎ, $\underset{x\to 0}{Lt}\ f(x)=0$.

এখন, $\quad |f(x)-0|, \quad (x \neq 0)$

$$= |x^2-0| = |x|^2.$$

মনে করি, ϵ যে কোন ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা।

$\therefore \quad |f(x)-0| < \epsilon$, যখন $0 < |x|^2 < \epsilon$

অর্থাৎ, $0 < |x-0| < \sqrt{\epsilon}$.

সুতরাং, $\quad |f(x)-0| < 0{\cdot}01$, যখন $0 < |x-0| < 0{\cdot}1$;

$|f(x)-0| < 0{\cdot}0001$, যখন $0 < |x-0| < 0{\cdot}01$;

$|f(x)-0| < 0{\cdot}000004$, যখন $0 < |x-0| < 0{\cdot}002$;

ইত্যাদি।

তাহা হইলে, $|f(x)-0| < \epsilon$, যখন $0 < |x-0| < \delta$, যেখানে $\delta \equiv \sqrt{\epsilon}$.

সংজ্ঞা : মনে করি, $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট x এর অপেক্ষক, $x \in R$, এবং $x=a$ বিন্দুর সাপেক্ষে $f(x)$ এর মান নির্ণেয় এবং সসীম ; কিন্তু, $f(a)$ থাকিতে পারে, অথবা, নাও থাকিতে পারে, যেখানে a একটি নির্দিষ্ট সসীম সংখ্যা।

এখন, যে কোন প্রদত্ত ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ϵ এর জন্য যদি কোন ধনাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যায়, যেখানে δ টি ϵ এর উপর নির্ভরশীল ; এবং যদি একটি নির্দিষ্ট সসীম সংখ্যা l থাকে, যাহাতে $|f(x)-l|<\epsilon$, যখন $0<|x-a|<\delta$, তাহা হইলে, বলা হইবে : $x \to a$ হইলে, $f(x)$ এর সীমাস্থমান l ; অর্থাৎ $\underset{x \to a}{Lt} f(x)=l$.

দৃষ্টান্ত : (1). (δ, ϵ) পদ্ধতিতে দেখাও যে,

$$\underset{x \to 4}{Lt} (2x-3)=5 ;$$

এখানে, $f(x)=2x-3$; $l=5$;

মনে করি, ϵ যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা।

এখন, $|f(x)-5|$, $(x \neq 4)$

$$=|(2x-3)-5|=2|x-4|.$$

$\therefore$ $|f(x)-5|<\epsilon$, যখন, $0<|x-4|<\delta$, যেখানে, $\delta \equiv \frac{\epsilon}{2}$.

$\therefore$ $\underset{x \to 4}{Lt} f(x)=5$; অর্থাৎ, $\underset{x \to 4}{Lt} (2x-3)=5$.

দৃষ্টান্ত : (2). (δ, ϵ) নিয়মে দেখাও যে, $\underset{x \to 2}{Lt} x^2=4$.

মনে করি, ϵ যে কোন ধনাত্মক ক্ষুদ্রসংখ্যা।

যখন $x \to 2$, তখন $x+2<5$.

এখন, $|x^2-4|$, $(x \to 2)$,

$=|x+2|\ |x-2|$, $(x \to 2)$,

$<5|x-2|$, $(x \to 2)$.

$\therefore$ $|x^2-4|<\epsilon$, যখন, $0<|x-2|<\delta$, যেখানে, $\delta \equiv \epsilon/5$.

$\therefore$ $\underset{x \to 2}{Lt} x^2=4$.

দৃষ্টান্ত : (3). (δ, ϵ)-নিয়মে দেখাও যে, $\underset{x \to 2}{Lt} \frac{x^2-4}{x-2}=4$.

মনে করি, ϵ যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা।

এখন, $\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|$, $(x\to2)$

$= |(x+2)-4|$, ($\because$ $x\neq2$, কারণ, $x\to2$)

$= |x-2|$.

$\therefore$ $\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right| < \epsilon$, যখন, $0<|x-2|<\epsilon$.

$\therefore$ $\underset{x\to2}{Lt}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$

5-4*. মৌলিক উপপাদ্যসমূহ (Fundamental Theorems) :

[A] $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ এবং $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=m$ হইলে,

যেখানে a, l, m নির্দ্দিষ্ট সসীম বাস্তব রাশি,

(1) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+\phi(x)\}=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=l+m$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-\phi(x)\}=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=l-m$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\times\phi(x)\}=\lim\limits_{x\to a} f(x)\times\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=lm$;

(4) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)/\phi(x)\}=\lim\limits_{x\to a} f(x)/\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=l/m, (m\neq0).$

দ্রষ্টব্য : $\underset{x\to a}{Lt}\frac{1}{\phi(x)}=1/\underset{x\to a}{Lt}\phi(x)=1/m, (m\neq0).$

*[ইহাদের প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া এখানে তাহা দেওয়া হইল না

দৃষ্টান্ত : $f(x)=x^2$ এবং $\phi(x)=2x$ হইলে,

স্পষ্টতঃই, $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2} x^2=4$; এবং $\lim\limits_{x\to2}\phi(x)=\lim\limits_{x\to2}(2x)=4.$

(1) $\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x)=\lim\limits_{x\to2}x^2+\lim\limits_{x\to2}2x=4+4=8$;

(2) $\lim\limits_{x\to2}(x^2-2x)=\lim\limits_{x\to2}x^2-\lim\limits_{x\to2}2x=4-4=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to2}(x^2\times2x)=\lim\limits_{x\to2}x^2\times\lim\limits_{x\to2}2x=4\times4=16$;

(4) $\lim\limits_{x\to2}(x^2/2x)=\lim\limits_{x\to2}x^2/\lim\limits_{x\to2}(2x)=4/4=1.$

[B]* যদি $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ \phi(x)=l$ এবং $\underset{y\to l}{\mathrm{Lt}}\ F(y)=F(l)$ হয়, যেখানে $y=\phi(x)$ এবং a, l, F(l) নির্দ্দিষ্ট সসীম বাস্তব রাশি, তাহা হইলে, $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ F\{\phi(x)\}$ থাকিবে, এবং তখন $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ F\{\phi(x)\}=F\{\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ \phi(x)\}=F(l)$.

*[ইহার প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া এখানে দেওয়া হইল না।]

দৃষ্টান্ত 1. মনে করি, $\phi(x)=3x+2$; $F\{\phi(x)\}=\log_e(3x+2)$.

এখন, $\underset{x\to 2}{Lt}\ \phi(x)=\underset{x\to 2}{Lt}\ (3x+2)=3\times2+2=8$;

$\underset{y\to 8}{Lt}\ \log_e y=\log_e 8$; $y=\phi(x)=3x+2$.

$$\therefore\ \underset{x\to 2}{Lt}\ \log_e(3x+2)=\log_e\{\underset{x\to 2}{Lt}\ (3x+2)\}$$
$$=\log_e 8=3\log_e 2.$$

দৃষ্টান্ত 2. $\underset{x\to 1}{Lt}\ \cos(x^2+2x-3)=\cos\{\underset{x\to 1}{Lt}\ (x^2+2x-3)\}$
$$=\cos(1^2+2.1-3)=\cos 0=1.$$

দৃষ্টান্ত 3. $\underset{x\to 0}{Lt}\ e^{x^2+3x+1}=e^{\underset{x\to 0}{Lt}(x^2+3x+1)}=e^{0+0+1}=e.$

দৃষ্টান্ত 4. $\underset{x\to 2}{\lim}\sqrt[3]{x^2+2x+8}=\sqrt[3]{\underset{x\to 2}{\lim}(x^2+2x+8)}$
$$=\sqrt[3]{4+4+8}=\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}.$$

দ্রষ্টব্য : (i) $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ e^x=e^a$; (ii) $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ \log x=\log a,\ (a>0)$;

(iii) $\underset{x\to \alpha}{\mathrm{Lt}}\ \sin x=\sin\alpha$; (iv) $\underset{x\to \alpha}{\mathrm{Lt}}\ \cos x=\cos\alpha$.

[C]* x = a এর সামীপ্যে, সম্ভবতঃ x = a ভিন্ন, x এর অপর সকল মানের জন্য $\phi(x)<f(x)<\psi(x)$ এবং $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ \phi(x)=l$; $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ \psi(x)=l$ হইলে, $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ f(x)=l$ হইবে, যেখানে a, l নির্দিষ্ট সসীম বাস্তব রাশি।

*[ইহার প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া এখানে উহা দেওয়া হইল না।]

দৃষ্টান্ত : $\phi(x)=x^2+5$; $f(x)=2x^2+5$; $\psi(x)=3x^2+5$ হইলে, $x=0$ এর সামীপ্যে, $\phi(x)<f(x)<\psi(x)$, $(x\neq 0)$.

এবং $\underset{x\to 0}{Lt}\ \phi(x)=\underset{x\to 0}{Lt}\ (x^2+5)$

$=\underset{x\to 0}{Lt}\ x^2+\underset{x\to 0}{Lt}\ 5=0+5=5$;

$\underset{x\to 0}{Lt}\ \psi(x)=\underset{x\to 0}{Lt}\ (3x^2+5)$

$=\underset{x\to 0}{Lt}\ (3x^2)+\underset{x\to 0}{Lt}\ 5=0+5=5$;

$\underset{x\to 0}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to 0}{Lt}\ (2x^2+5)$

$=\underset{x\to 0}{Lt}\ (2x^2)+\underset{x\to 0}{Lt}\ 5=0+5=5.$

[D]* $x=a$ এর সামীপ্যে, সম্ভবতঃ $x=a$ ভিন্ন, x এর অপর সকল মানের জন্য $f(x)<g(x)$ হইলে, $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)\leqslant\underset{x\to a}{Lt}\ g(x)$ হইবে।

*[ইহার প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া এখানে উহা দেওয়া হইল না।]

দৃষ্টান্ত 1. ধরি, $f(x)=x^2+3$; $g(x)=2x^2+3.$

এখানে, $x=0$ এর সামীপ্যে, $f(x)<g(x)$, $(x\neq 0)$;

এবং $\underset{x\to 0}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to 0}{Lt}\ (x^2+3)$

$=\underset{x\to 0}{Lt}\ x^2+\underset{x\to 0}{Lt}\ 3=0+3=3$;

$\underset{x\to 0}{Lt}\ g(x)=\underset{x\to 0}{Lt}\ (2x^2+3)$

$=\underset{x\to 0}{Lt}\ (2x^2)+\underset{x\to 0}{Lt}\ 3=0+3=3.$

সুতরাং, এখানে, $\underset{x\to 0}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to 0}{Lt}\ g(x).$

দৃষ্টান্ত 2. ধরি, $f(x)=x^2+3$; $g(x)=2x^2+5.$

এখানে, $x=0$ এর সামীপ্যে, $f(x)<g(x)$;

এবং $\underset{x\to 0}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to 0}{Lt}\ (x^2+3)=3$;

$\underset{x\to 0}{Lt}\ g(x)=\underset{x\to 3}{Lt}\ (2x^2+5)=5.$

সুতরাং, এখানে, $\underset{x\to 0}{Lt}\ f(x)<\underset{x\to 0}{Lt}\ g(x).$

5-5. $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$

যেখানে, $P(x)$ একটি বহুপদ অপেক্ষক।

মনে করি, $f(x) = x$ এবং $x \to a$.

এখানে স্পষ্টতঃই, $f(a+0) = a$; $f(a-0) = a$; $f(a) = a$.

সুতরাং, $\lim_{x\to a} f(x) = a$; অর্থাৎ, $\lim_{x\to a} x = a$

এখন, মনে করি, $\phi(x) = x^n$, যেখানে $n =$ নির্দ্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। তাহা হইলে,

$$\lim_{x\to a} \phi(x) = \lim_{x\to a} x^n = \lim_{x\to 0} (x \cdot x \cdot x \cdots\cdots n \text{ সংখ্যক উৎপাদক})$$

$$= \lim_{x\to a} x \times \lim_{x\to a} x \times \cdots\cdots n \text{ সংখ্যক উৎপাদক}$$

$$= a \times a \times a \times \cdots\cdots n \text{ সংখ্যক উৎপাদক}$$

$$= a^n = \phi(a).$$

ধরা যাক্, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n$ যেখানে $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_{n-1}, a_n$ নির্দ্দিষ্ট ধ্রুবক এবং $n =$ নির্দ্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। তাহা হইলে,

$$\lim_{x\to a} P(x) = \lim_{x\to a} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)$$

$$= \lim_{x\to a} a_0x^n + \lim_{x\to a} a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + \lim_{x\to a} a_{n-1}x + \lim_{x\to a} a_n$$

$$= a_0a^n + a_1a^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}a + a_n$$

$$= P(a).$$

দৃষ্টান্ত (i) $\mathop{Lt}_{x\to 2} (x^2 + 3x - 2) = 2^2 + 3 \times 2 - 2 = 8$;

(ii) $\mathop{Lt}_{x\to -3} (2x^2 - 2x + 1) = 2 \times (-3)^2 - 2 \times (-3) + 1 = 25.$

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (i) $\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} x = 0$;

(ii) $\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} x^n = 0$, ($n =$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)।

5·6. $\mathbf{\underset{x\to a}{Lt}\ \dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}}$,

যেখানে n = যে কোন মূলদ সংখ্যা।

(i) n = ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$\underset{x\to a}{Lt}\ \frac{x^n-a^n}{x-a},\quad (x\neq a)$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\ (x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots\cdots+a^{n-1}),\ \text{পদসংখ্যা}=n$$

$$=a^{n-1}+a^{n-2}\cdot a+a^{n-3}\cdot a^2+\cdots\cdots+a^{n-1}$$

$$=na^{n-1}.$$

(ii) n = ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, মনে করি, $n=-m$; তাহা হইলে m = ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। তখন,

$$\underset{x\to a}{Lt}\ \frac{x^n-a^n}{x-a}=\underset{x\to a}{Lt}\ \frac{x^{-m}-a^{-m}}{x-a}$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\left\{-\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{x^m}\cdot\frac{x^m-a^m}{x-a}\right\}$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\left\{-\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{x^m}\right\}\times\underset{x\to a}{Lt}\ \frac{x^m-a^m}{x-a}$$

$$=-\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^m}\times ma^{m-1}$$

$$=(-m)\cdot a^{-m-1}=na^{n-1}.$$

(ii) n = মূলদ সংখ্যা $=\dfrac{p}{q}$, যেখানে q = ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং p ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

ধরা যাক, $x^{\frac{1}{q}}=y$ (বাস্তব) এবং $a^{\frac{1}{q}}=b$ (বাস্তব)। তাহা হইলে $x=y^q$ এবং $a=b^q$; সুতরাং, $y\to b$ যখন $x\to a$.

$$\therefore\ \underset{x\to a}{Lt}\ \frac{x^n-a^n}{x-a}=\underset{y\to b}{Lt}\ \frac{y^p-b^p}{y^q-b^q}$$

$$=\underset{y\to b}{Lt}\left\{\frac{y^p-b^p}{y-b}\times\frac{y-b}{y^q-b^q}\right\}$$

$$=\underset{y\to b}{Lt}\left(\frac{y^p-b^p}{y-b}\right)\Big/\underset{y\to b}{Lt}\left(\frac{y^q-b^q}{y-b}\right)$$

$$=\frac{pb^{p-1}}{qb^{q-1}}=\frac{p}{q}\cdot b^{p-q}=\frac{p}{q}\cdot a^{\frac{p}{q}-1}=na^{n-1}.$$

দৃষ্টান্ত : (i) $\underset{x\to 3}{Lt}\dfrac{x^2-9}{x-3}=2\times 3^{2-1}=6.$

(ii) $\underset{x\to 3}{Lt}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}.$

দ্রষ্টব্য : $\underset{x\to 0}{\mathbf{Lt}}\dfrac{\mathbf{(1+x)^n-1}}{\mathbf{x}}=\mathbf{n}$, ($n=$ মূলদ রাশি)।

[ইঙ্গিত : $\underset{y\to a}{Lt}\dfrac{y^n-a^n}{y-a}$ এতে $y=1+x$ এবং $a=1$ ধরা যাক।]

5-7. (a)* $\underset{x\to 0}{\mathbf{Lt}}\dfrac{\mathbf{e^x-1}}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}.$

আমরা জানি (একাদশ শ্রেণীর বীজগণিতে সূচক উপাপাদ্যের একটি চলনসই প্রমাণ দেওয়া হইয়াছে) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য,

$$e^x=1+\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\quad\cdots\text{to }\infty.$$

সুতরাং, $0<x<1$ হইলে, এখান হইতে পাই,

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{\underline{|2}}+\frac{x^2}{\underline{|3}}+\frac{x^3}{\underline{|4}}+\cdots\quad\cdots\text{to }\infty$$

$$<1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\cdots\quad\cdots\text{to }\infty$$

$$=\frac{1}{1-x/2}=\frac{2}{2-x}$$

$$\therefore\quad \frac{e^x-1}{x}<\frac{2}{2-x},\quad (0<x<1).$$

$$\therefore\quad \frac{e^x-1}{x}-1<\frac{x}{2-x}<x,\quad (0<x<1).$$

---

* ইহার পরিশুদ্ধ (rigorous) প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত।

সুতরাং, বলা যাইতে পারে যে,

$$\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right|<\epsilon,$$

যেখানে ϵ= যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা এবং $0<x-0<\epsilon$.

$$\therefore \quad \underset{x\to 0+}{Lt}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

এখন, $$\underset{x\to 0-}{Lt}\frac{e^x-1}{x}=\underset{t\to 0+}{Lt}\frac{e^{-t}-1}{-t},\ (t=-x)$$

$$=\underset{t\to 0+}{Lt}\frac{e^t-1}{t}\times\underset{t\to 0+}{Lt}\frac{1}{e^t}=1\times 1=1.$$

$$\therefore \quad \underset{x\to 0}{Lt}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

5-7. (b) $\underset{x\to 0}{\mathbf{Lt}}\ \frac{1}{\mathbf{x}}\log_e(1+\mathbf{x})=1.$

ধরা যাক, $\log_e(1+x)=z$;

$$\therefore \quad x=e^z-1;\ \text{এবং},\ z\to 0,\ \text{যখন}\ x\to 0.$$

$$\therefore \quad \underset{x\to 0}{Lt}\frac{1}{x}\log_e(1+x)=\underset{z\to 0}{Lt}\frac{z}{e^z-1}$$

$$=1\Big/\underset{z\to 0}{Lt}\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{1}=1.$$

দ্রষ্টব্য : 1. $\underset{x\to 0}{\mathbf{Lt}}\ (1+\mathbf{x})^{\frac{1}{x}}=\mathbf{e},\ (2<\mathbf{e}<3).$

[**ইঙ্গিত :** আমরা জানি, $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{1}{x}\log_e(1+x)=1.$

$$\therefore \quad \underset{x\to 0}{Lt}\log_e(1+x)^{\frac{1}{x}}=1;$$

বা, $\log_e\left\{\underset{x\to 0}{Lt}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=1,\ \therefore\ \underset{x\to 0}{Lt}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$]

দ্রষ্টব্য : 2. $\underset{x\to\infty}{\mathbf{Lt}}\left(1+\frac{1}{\mathbf{x}}\right)^x=\mathbf{e}.$

দ্রষ্টব্য : 3. $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a,\ (a>0).$

[ইঙ্গিত : $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{a^x-1}{x}=\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{e^{x\log_e a}-1}{x}$

$=\underset{y\to 0}{Lt}\ \dfrac{e^y-1}{y}\times\log_e a,\quad (y=x\log_e a)$

$=1\times\log_e a=\log_e a.$]

দৃষ্টান্ত 1. $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{e^{2x}-1}{x}=\underset{y\to 0}{Lt}\ \dfrac{e^y-1}{y}\times 2;\quad y=2x$

$=2\times\underset{y\to 0}{Lt}\ \dfrac{e^y-1}{y}=2\times 1=2.$

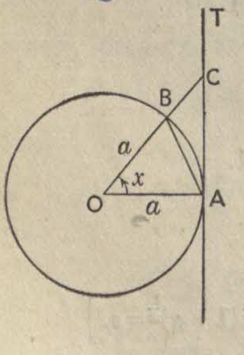
দৃষ্টান্ত 2. $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{\log_e(1+2x)}{x}=\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{2\times\log_e(1+2x)}{(2x)};\ y=2x$

$=2\times\underset{y\to 0}{Lt}\ \dfrac{\log_e(1+y)}{y}=2\times 1=2.$

দৃষ্টান্ত 3. $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{3^x-1}{x}=\log_e 3.$

দৃষ্টান্ত 4. $\underset{x\to 0}{Lt}\ (1+2x)^{1/x}=\underset{y\to 0}{Lt}\ (1+y)^{2/y}=\{\underset{y\to 0}{Lt}\ (1+y)^{1/y}\}^2=e^2.$

***5·8. $\underset{x\to 0}{\mathbf{Lt}}\ \dfrac{\sin x}{x}=1.$**



a একক ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি, যাহার কেন্দ্র O। মনে করি, $\angle AOB=x$ রেডিয়ান্, $(0<x<\pi/2)$; যেখানে A এবং B বৃত্তের উপর অবস্থিত। এখন এই বৃত্তের A বিন্দুতে AT স্পর্শক অঙ্কন করি। তাহা হইলে, $\angle OAT=90°$. মনে করি, বর্ধিত OB, AT কে C বিন্দুতে ছেদ করে। AB জ্যা অঙ্কন করি।

এখন, $\triangle AOB=\frac{1}{2}OA.\ OB.\sin x$

$=\frac{1}{2}a^2.\ \sin x.$

AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $=\dfrac{\pi a^2}{2\pi}\times x=\frac{1}{2}a^2x$;

এবং $\triangle AOC=\frac{1}{2}\ OA.\ AC=\frac{1}{2}a^2\tan x.$

* ইহার প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত।

স্পষ্টতঃই, $\triangle AOB <$ বৃত্তকলা $AOB < \triangle AOC$;

বা, $\frac{1}{2}a^2 \sin x < \frac{1}{2}a^2 x < \frac{1}{2}a^2 \tan x$,

$$\therefore \quad \sin x < x < \tan x, \ (0 < x < \pi/2). \quad \cdots \quad (1)$$

$$\therefore \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \sec x, \ (0 < x < \pi/2).$$

$$\therefore \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{1}{\sec x} = \cos x, \ (0 < x < \pi/2). \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, $\underset{x\to 0+}{Lt} (\cos x) = 1. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

$$\therefore \quad 1 = \underset{x\to 0+}{Lt} 1 \geqslant \underset{x\to 0+}{Lt} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \geqslant \underset{x\to 0+}{Lt} (\cos x) = 1.$$

$$\therefore \quad \underset{x\to 0+}{Lt} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

অপিচ, $x < 0$ হইলে, মনে করি, $x = -y$; $y > 0$.

তখন, $\underset{x\to 0-}{Lt} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = \underset{y\to 0+}{Lt} \left\{\frac{\sin(-y)}{-y}\right\}$

$= \underset{y\to 0+}{Lt} \left(\frac{\sin y}{y}\right) = 1$, (4) হইতে।

$\therefore \quad \underset{x\to 0}{Lt} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$, (x রেডিয়ানে প্রকাশিত)।

দৃষ্টান্ত 1. $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2 \underset{(2x)\to 0}{Lt} \dfrac{\sin 2x}{(2x)} = 2 \times 1 = 2.$

দৃষ্টান্ত 2. $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{\sin^2 x}{x^2} = \underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{\sin x}{x} \times \underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \times 1 = 1.$

দৃষ্টান্ত 3. $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2} = \underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{2 \sin^2 x}{x^2}$

$$= 2 \underset{x\to 0}{Lt} \frac{\sin x}{x} \times \underset{x\to 0}{Lt} \frac{\sin x}{x} = 2 \times 1 \times 1 = 2.$$

দ্রষ্টব্য : 1. $\underset{x\to 0}{\mathbf{Lt}} \dfrac{\tan x}{x} = 1.$

[ইঙ্গিত : $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\tan x}{x}=\underset{x\to 0}{Lt}\left\{\frac{\sin x}{x}\cdot\sec x\right\}$

$$=\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin x}{x}\times\underset{x\to 0}{Lt}\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1].$$

দ্রষ্টব্য : 2. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \sin x=0.$

এখানে, $|\sin x-0|=|\sin x|<|x|$;

বা, $|\sin x-0|<\epsilon$, যখন $0<|x-0|<\epsilon.$

$$\therefore\ \underset{x\to 0}{Lt}\ \sin x=0.$$

দ্রষ্টব্য : 3. $\underset{x\to\alpha}{\text{Lt}}\ \sin x=\sin\alpha.$

$$|\sin x-\sin\alpha|=2\left|\cos\frac{x+\alpha}{2}\right|\left|\sin\frac{x-\alpha}{2}\right|$$

$$<2.1.\left|\sin\frac{x-\alpha}{2}\right|<|x-\alpha|\cdot$$

$\therefore$ $|\sin x-\sin\alpha|<\epsilon$, যখন $0<|x-x|<\epsilon.$

$$\therefore\ \underset{x\to\alpha}{Lt}\ \sin x=\sin\alpha.$$

দ্রষ্টব্য : 4. $\underset{x\to\alpha}{\text{Lt}}\ \cos x=\cos\alpha.$

5-9*. সীমাস্থ মান নির্ণয়ে Cauchy's principle :

মনে করি, $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট x এর অপেক্ষক এবং $x=a$ বিন্দুর সামীপ্যে, সম্ভবতঃ $x=a$ বাদে, x এর অপর সকল মানের জন্য $f(x)$ নির্ণেয় এবং সসীম।

এখন, যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা ϵ এর পরিপ্রেক্ষিতে একটি ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা δ নির্ণয় করা সম্ভব হইলে, যাহাতে $|f(x_2)-f(x_1)|<\epsilon$ হয়, যেখানে x_1 এবং x_2, x এর যে কোন দুইটি মান এবং $0<|x_1-a|<\delta$ এবং $0<|x_2-a|<\delta$, তাহা হইলে, $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)$ থাকিবে ; এবং বিপরীতক্রমে।

*[ইহার প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত।]

দৃষ্টান্ত 1. (i) $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}} \sin\frac{1}{x}$; (ii) $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}} \cos\frac{1}{x}$.

(i) যদি $\underset{x\to 0}{Lt} \sin\frac{1}{x}$ থাকে, তবে যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা ϵ এর পরিপ্রেক্ষিতে একটি ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা δ নির্ণয় করা সম্ভব হইবে, যাহাতে

$\left|\sin\frac{1}{x_2}-\sin\frac{1}{x_1}\right|<\epsilon$ হয়, যেখানে $0<|x_1|<\delta$ এবং $0<|x_2|<\delta$.

এখন δ এর মান যেমন ক্ষুদ্রই হউক না কেন, একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n লওয়া যাইতে পারে, যেখানে $x_1=\frac{2}{(4n+1)\pi}$ এবং $x_2=\frac{2}{(4n-1)\pi}$, যাহাতে $0<|x_1|<\delta$ এবং $0<|x_2|<\delta$ হয়।

তখন, $\left|\sin\frac{1}{x_2}-\sin\frac{1}{x_1}\right|=\left|\sin(4n+1)\frac{\pi}{2}-\sin(4n-1)\frac{\pi}{2}\right|$

$=2$, যাহা নির্দিষ্ট ও সসীম, কিন্তু ক্ষুদ্র নহে।

সুতরাং, ইহা প্রদত্ত ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ϵ এর চেয়ে ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না। সুতরাং, $\underset{x\to 0}{Lt} \sin\frac{1}{x}$ থাকিবে না।

(ii) যদি $\underset{x\to 0}{Lt} \cos\frac{1}{x}$ থাকে, তবে যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা ϵ এর পরিপ্রেক্ষিতে একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা যাইবে, যাহাতে

$\left|\cos\frac{1}{x_2}-\cos\frac{1}{x_1}\right|<\epsilon$ হয়, যেখানে $0<|x_1|<\delta$ এবং $0<|x_2|<\delta$.

এখন, δ এর মান যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন, একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n লওয়া যাইতে পারে, যেখানে $x_1=\frac{1}{2n\pi}$ এবং $x_2=\frac{1}{(2n+1)\pi}$, যাহাতে $0<|x_1|<\delta$; $0<|x_2|<\delta$ হয়।

তখন, $\left|\cos\frac{1}{x_2}-\cos\frac{1}{x_1}\right|=|\cos(2n+1)\pi-\cos 2n\pi|$

$=2$, যাহা নির্দিষ্ট ও সসীম, কিন্তু ক্ষুদ্র নহে।

সুতরাং, ইহা প্রদত্ত ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ϵ এর চেয়ে ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না। সুতরাং, $\underset{x\to 0}{Lt} \cos\frac{1}{x}$ থাকিবে না।

দৃষ্টান্ত 2. দেখাও যে, $\underset{x\to\alpha}{\mathrm{Lt}}\ \sin x$ আছে।

$$|\sin x_1-\sin x_2|=2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|$$

$$\leqslant 2.1.\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|<|x_1-x_2|;$$

$$\therefore\quad |\sin x_1-\sin x_2|<\epsilon,$$

যখন $0<|x_1-\alpha|<\epsilon/2$ এবং $0<|x_2-\alpha|<\epsilon/2$.

সুতরাং, $\underset{x\to\alpha}{Lt}\ \sin x$ আছে।

দৃষ্টান্ত 3. দেখাও যে, $\underset{x\to\sqrt{2}}{Lt}(x^2+3)$ আছে।

ধরি, $f(x)=x^2+3$.

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1^2-x_2^2|=|x_1+x_2|\,|x_1-x_2|$$

$$<4|x_1-x_2|,\quad (\because\ x\to\sqrt{2};1<\sqrt{2}<2)$$

$$\therefore\quad |f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$$

যখন $0<|x_1-\sqrt{2}|<\epsilon/8$ এবং $0<|x_2-\sqrt{2}|<\epsilon/8$.

সুতরাং, $\underset{x\to\sqrt{2}}{Lt}(x^2+3)$ আছে।

5-10. (1) $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\,\mathrm{f}(x)=+\infty$; **(2)** $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\,\mathrm{f}(x)=-\infty$.

মনে করি, $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট x এর অপেক্ষক, $x\in R$.

(1) $x\to a$ হইলে, অর্থাৎ, x সর্বদা a অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর মান লইয়া ক্রমশঃ a এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে, যদি $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি ক্রমশঃ বাড়িতে থাকে এবং যে কোন প্রদত্ত বড় সংখ্যার চেয়েও বৃহত্তর হইতে থাকে, তাহা হইলে, বলা হইবে $f(x)\to+\infty$, যখন $x\to a$; এবং তখন ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হইবে : $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)=+\infty$.

(2) $x\to a$ হইলে, অর্থাৎ, x সর্বদা a অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর মান লইয়া ক্রমশঃ a এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে, যদি $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি ক্রমশঃ কমিতে থাকে এবং সাংখ্যমানে তাহাদের মান যে কোন প্রদত্ত বড় সংখ্যার চেয়েও বৃহত্তর হইতে থাকে, তাহা হইলে, বলা হইবে $f(x)\to-\infty$, যখন $x\to a$; এবং তখন ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হইবে : $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)=-\infty$.

দৃষ্টান্ত 1. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1}{x^2} = +\infty.$

ধরি, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; এখানে $x=0$ ভিন্ন x এর অপর সকল মানের জন্য, $f(x)$ এর নির্দিষ্ট মান থাকিবে।

$x \to 0+$ হইলে, অর্থাৎ, x এর মান $\cdots, 0{\cdot}1, \cdots, 0{\cdot}01, \cdots, 0{\cdot}001, \cdots, 0{\cdot}0001, \cdots\cdots$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে $\cdots, 10^2, \cdots, 10^4, \cdots, 10^6, \cdots, 10^8, \cdots \quad \cdots$। সুতরাং, $f(0+0) = +\infty$.

আবার, $x \to 0-$ হইলে, অর্থাৎ, x এর মান $\cdots, -0{\cdot}1, \cdots, -0{\cdot}01, \cdots, -0{\cdot}001, \cdots, -0{\cdot}0001, \cdots$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে : $\cdots, 10^2, \cdots, 10^4, \cdots, 10^6, \cdots, 10^8, \cdots, \quad \cdots$। সুতরাং, $f(0-0) = +\infty$.

সুতরাং, $f(0+0) = f(0-0) = +\infty$;

অর্থাৎ, $\underset{x \to 0}{Lt} f(x) = +\infty$; বা, $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1}{x^2} = \infty.$

দৃষ্টান্ত 2. $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{-1}{(x-2)^2} = -\infty.$

ধরি, $f(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$. এখানে, $x=2$ ভিন্ন, x এর অপর সকল মানের জন্য, $f(x)$ এর মান আছে।

$x \to 2+$ হইলে, অর্থাৎ, x এর মান $\cdots, 2{\cdot}1, \cdots, 2{\cdot}01, \cdots, 2{\cdot}001, \cdots, 2{\cdot}0001, \cdots$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে : $\cdots -10^2, \cdots, -10^4, \cdots, -10^6, \cdots, -10^8, \cdots \quad \cdots$। সুতরাং, $f(2+0) = -\infty$.

$x \to 2-$ হইলে, অর্থাৎ, x এর মান $\cdots, 1{\cdot}9, \cdots, 1{\cdot}99, \cdots, 1{\cdot}999, \cdots, 1{\cdot}9999, \cdots$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে : $\cdots, -10^2, \cdots, -10^4, \cdots, -10^6, \cdots, -10^8, \cdots \quad \cdots$। সুতরাং, $f(2-0) = -\infty$.

সুতরাং, $f(2+0) = f(2-0) = -\infty$;

অর্থাৎ, $\underset{x \to 2}{Lt} f(x) = -\infty$; বা, $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{-1}{(x-2)^2} = -\infty.$

5-11. (1) $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}} f(x)=l$; (2) $\underset{x\to-\infty}{\text{Lt}} f(x)=l$.

(1) চলরাশি x পর পর…, 10, …, 10^2, …, 10^3, …, 10^4, …, 10^5,…, মানগুলি লইতে থাকিলে, যাহাতে x এর মান যে কোন প্রদত্ত বড় সংখ্যার চেয়েও বৃহত্তর হইতে থাকে, তাহা হইলে, বলা হয় $x\to\infty$.

এখন, $x\to\infty$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি যদি একটি নির্দিষ্ট সসীম বাস্তব রাশি l এর নিকটবর্তী হইতে থাকে, তাহা হইলে, বলা হইবে: $f(x)\to l$, যখন $x\to\infty$; এবং তখন ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হইবে:

$$\underset{x\to\infty}{Lt} f(x)=l.$$

(2) চলরাশি x পর পর …-10, …-10^2, …-10^3, …-10^4, …-10^5, ……মানগুলি লইতে থাকিলে, যাহাতে x এর মান সাংখ্যমানে যে কোন প্রদত্ত বড় সংখ্যার চেয়েও বৃহত্তর হইতে থাকে, তাহা হইলে, বলা হইবে $x\to-\infty$.

এখন, $x\to-\infty$ হইলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি যদি একটি নির্দিষ্ট সসীম বাস্তব রাশি l এর নিকটবর্তী হইতে থাকে, তাহা হইলে, বলা হইবে: $f(x)\to l$, যখন $x\to-\infty$; এবং তখন ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হইবে: $\underset{x\to-\infty}{Lt} f(x)=l$.

দৃষ্টান্ত 1. দেখাও যে, $2+\frac{1}{x^2}\to 2$, যখন $x\to\infty$.

$x\to\infty$ হইলে, অর্থাৎ, x এর মান …, 10, …, 10^2, …, 10^3, …, … হইলে, $\frac{1}{x^2}$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে …, ·01, …, ·0001, …, ·000001, …, … এবং তখন $2+\frac{1}{x^2}$ এর অনুরূপ মানগুলি হইবে …, 2·01, …, 2·0001, …, 2·000001, … ….

সুতরাং, $2+\frac{1}{x^2}\to 2$, যখন $x\to\infty$.

দৃষ্টান্ত 2. $2+\frac{1}{x^2}\to 2$, যখন $x\to-\infty$. [প্রমাণ প্রায় পূর্বের ন্যায়।]

5-12. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ:

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+5}{x^2+2}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+5}{x^2+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2)}=\frac{2^2-3\times 2+5}{2^2+2}=\frac{1}{2}.$$

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 4}{Lt}\dfrac{x^2-16}{x-4}$.

$$\underset{x\to 4}{Lt}\frac{x^2-16}{x-4}=\underset{x\to 4}{Lt}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)}=\underset{x\to 4}{Lt}(x+4),\quad (\because\ x\neq 4)$$

$$=8.$$

উদাহরণ 3. প্রমাণ কর যে, $\underset{x\to 4}{Lt}\left(\dfrac{x^2-16}{x-4}\right)=8.$

এখানে, $\left|\dfrac{x^2-16}{x-4}-8\right| = |(x+4)-8|$, (যখন $x\neq 4$)

$= |x-4|$, (যখন $x\neq 4$),

$\therefore\ \left|\dfrac{x^2-16}{x-4}-8\right| < \epsilon$, যখন $0<|x-4|<\epsilon$,

যেখানে ϵ = যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা।

$$\therefore\ \underset{x\to 4}{Lt}\frac{x^2-16}{x-4}=8.$$

উদাহরণ 4. মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}(x-1),\quad (\because\ x\neq -1)$$

$$=-2.$$

উদাহরণ 5. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}$.

$$\underset{x\to 0}{Lt}\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}=\underset{x\to 0}{Lt}\frac{4-(4-x^2)}{x^2(2+\sqrt{4-x^2})}$$

$$=\underset{x\to 0}{Lt}\frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

উদাহরণ 6. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to -1}{Lt} \sin\log(2x^2+3x+2)$

$$\underset{x\to -1}{Lt} \sin\log(2x^2+3x+2)$$
$$=\sin\log\{\underset{x\to -1}{Lt}(2x^2+3x+2)\}$$
$$=\sin(\log 1)=\sin 0=0.$$

উদাহরণ 7. দেওয়া আছে,

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & \text{যখন } x>2 \\ 0\ , & \text{যখন } x=2 \\ x^2\ , & \text{যখন } x<2. \end{cases}$$

$f(2+0)$ এবং $f(2-0)$ নির্ণয় কর। $f(2)$ এবং $\underset{x\to 2}{Lt} f(x)$ বাহির কর, যদি থাকে।

দেওয়া আছে, $f(x)=2x-1$, যখন $x>2$.

$\therefore$

$x=$	2·01	2·001	2·0001	2·00001	···
$f(x)=$	3·02	3·002	3·0002	3·00002	···

স্পষ্টতঃই, $f(2+0)=3$ ··· ··· (A)

দেওয়া আছে, $f(x)=x^2$, যখন $x<2$.

$\therefore$

$x=$	1·99	1·999	1·9999	···
$f(x)=$	3·9601	3·996001	3·99960001	···

স্পষ্টতঃই, $f(2-0)=4$ ··· ··· (B)

সুতরাং, দেখা যাইতেছে $\underset{x\to 2}{Lt} f(x)$ থাকছে না, কারণ, $f(2+0)\neq f(2-0)$.

এখানে, দেওয়া আছে $f(x)=0$ যখন $x=2$; $\therefore\ f(2)=0$.

প্রশ্নমালা 5
বিভাগ A

1. দেখাও যে,

(i) $\underset{x\to 2}{Lt}\ x=2$; (ii) $\underset{x\to 2}{Lt}\ 2x=4$; (iii) $\underset{x\to 0}{Lt}(x^2+5)=5$;

(iv) $\underset{x\to 3}{Lt}(x-3)=0$; (v) $\underset{x\to 1}{Lt}(5x-3)=2$; (vi) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{2x+1}{2}=\dfrac{1}{2}$,

(vii) $\underset{x\to 3}{Lt}\ 5=5$; (viii) $\underset{x\to 0}{Lt}|x|=0$; (ix) $\underset{x\to 1}{Lt}|x-1|=0$.

2. মান নির্ণয় কর (Evaluate) :

(i) $\lim_{x\to 2} (x^2+4x+2)$; (ii) $\lim_{x\to 1} (2x^3-3x+5)$;

(iii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x+3}{x^2+1}$; (iv) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x-2}$;

(v) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4+4x-3}{x^2+2}$; (vi) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+4x^2-3}{x^5+5}$.

3. মান নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x\to 2}{Lt} \frac{x^2-4}{x-2}$, [C. U. 1965] ; (ii) $\underset{x\to 3}{Lt} \frac{x^2-9}{x-3}$;

(iii) $\underset{x\to 1}{Lt} \frac{x^2-1}{x-1}$, [C. U. 1968] ; (iv) $\underset{x\to 2}{Lt} \frac{3x^2-12}{x-2}$;

(v) $\underset{x\to -2}{Lt} \frac{x^2-4}{x+2}$, [C. U. 1975] ; (vi) $\underset{x\to \frac{1}{3}}{Lt} \frac{9x^2-1}{3x-1}$;

(vii) $\underset{x\to 3}{Lt} \frac{(x-3)^3}{x-3}$; (viii) $\underset{x\to -1}{Lt} \frac{x^4-1}{x+1}$;

(ix) $\underset{x\to 0}{Lt} \frac{(1-x)^2-1}{x}$; (x) $\underset{x\to 0}{Lt} \frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{2x}$;

(xi) $\underset{x\to 2}{Lt} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$, (xii) $\underset{x\to 1}{Lt} \frac{3x^2-4x+1}{x^2-4x+3}$;

(xiii) $\underset{x\to 0}{Lt} \frac{5x^3+8x^2}{x^4-4x^2}$; (xiv) $\underset{x\to 1}{Lt} \left\{\frac{(x-1)^2}{x-1}+(x^2-1)\right\}$;

(xv) $\underset{x\to a}{Lt} \frac{x^2+4ax-5a^2}{x^2+ax-2a^2}$; (xvi) $\underset{x\to 1}{Lt} \frac{x^4+x^3-x^2-5x+4}{x^3-x^2-x+1}$.

বিভাগ B

4. মান নির্ণয় কর :

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

[C. U. 1972]

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}$; (iv) $\lim_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$, $(a\neq 0)$;

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$; (vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x}$;

(vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}, (a>0)$;

(viii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-5x}}{9x}$;

(ix) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; (x) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{1-x}$.

5. **মান নির্ণয় কর :**

(i) $\underset{x\to 0}{Lt}\ 2^{x^2+3x+1}$; (ii) $\underset{x\to 2}{Lt}\ e^{\sqrt{5+x^2}}$;

(iii) $\underset{x\to 0+}{Lt}\ \log_e(1+\sqrt{x^3})$; (iv) $\underset{x\to -1}{Lt}\ \sqrt[3]{x^2-3x+4}$;

(v) $\underset{x\to 0+}{Lt}\ \sin^{-1}(\sqrt{x^3})$; (vi) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \sin\left\{\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+x+1}\right\}$.

বিভাগ C

6. $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)$ এর অর্থ ব্যাখ্যা কর। $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)$ কে থাকিতে হইলে, $f(a)$ এর থাকার দরকার আছে কিনা উদাহরণ মাধ্যমে বুঝাও।

7. একটি উদাহরণ দাও, যেখানে $f(a)$ আছে, অথচ $\underset{x\to a}{Lt}\ f(a)$ নাই।

8. $f(a+0)$ এবং $f(a-0)$ দ্বারা কি বুঝ? একটি উদাহরণ দাও, যেখানে $f(a+0)=f(a-0)\neq f(a)$.

9. একটি উদাহরণ দাও, যেখানে $f(a)$, $f(a+0)$, $f(a-0)$ আছে, অথচ $f(a+0)\neq f(a-0)$.

10. একটি উদাহরণ দাও, যেখানে $f(0+0)=f(0-0)\neq f(0)$.

11. দেখাও যে, $\underset{x\to 0}{Lt}\ x\sin\frac{1}{x}=0$.

12. দেখাও যে, $\underset{x\to 0}{Lt}\ x^3\cos\frac{1}{x}=0$.

13. দেওয়া আছে : $f(x)=\frac{2x^2-8}{x-2}$; এবং $| f(x)-8 | <\epsilon$, যখন $0< | x-2 | <\delta$.

δ এর মান নির্ণয় কর এবং $\underset{x\to 2}{Lt} f(x)=$ কত বল।

14. $f(x)=\begin{cases} 2-3x, & \text{যখন } x\leqslant 0, \\ 3x-2, & \text{যখন } x>0. \end{cases}$

$f(0+0)$ এবং $f(0-0)$ বাহির কর। $\underset{x\to 0}{Lt} f(x)$ আছে কি ?

15. $\phi(x)=\begin{cases} x-1, & \text{যখন } x>1, \\ 1, & \text{যখন } x=1, \\ 1-x^2, & \text{যখন } x<1. \end{cases}$

$\phi(1+0)$, $\phi(1-0)$ এবং $\phi(1)$ বাহির কর। $\underset{x\to 1}{Lt} \phi(x)$ আছে কি ?

16. $F(x)=x^2$, যখন $x>2$; $F(x)=5$, যখন $x<2$, হইলে, $F(2+0)$ এবং $F(2-0)$ বাহির কর। $\underset{x\to 2}{Lt} F(x)$ আছে কি ?

17. $F(a)=\underset{x\to 0}{Lt} \tan^{-1}(a/x^2)$ হইলে $F(a)$ এর মান বাহির কর।

18. $\phi(x)=\underset{t\to 0}{Lt} \frac{2x}{\pi} \tan^{-1} \frac{x}{t^2}$ হইলে, $y=\phi(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

5-13. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 3}{Lt} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$.

$$\underset{x\to 3}{Lt} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}=\underset{x\to 3}{Lt} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\Big/\underset{x\to 3}{Lt} \frac{x^2-9}{x-3}$$
$$=\frac{1}{2}\times \frac{1}{\sqrt{3}}\Big/(2\times 3)=\frac{1}{12\sqrt{3}}.$$

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর : $\lim_{x\to 0} \frac{2^{-x}-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}, \ (a=1/2)$$
$$=\log_e a=-\log_e 2.$$

উদাহরণ 3. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{\log_e(1+2x)}{x}$.

$$\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\log_e(1+2x)}{x}=2\ \underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\log_e(1+2x)}{(2x)}$$

$$=2\ \underset{y\to 0}{Lt}\ \frac{\log_e(1+y)}{y},\quad (y=2x)$$

$$=2\times 1=2.$$

উদাহরণ 4. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{\sin^2 x}{x}$.

$$\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin^2 x}{x}=\underset{x\to 0}{Lt}\left\{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot x\right\}$$

$$=\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin x}{x}\times\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin x}{x}\times\underset{x\to 0}{Lt}\ x$$

$$=1\times 1\times 0=0.$$

উদাহরণ 5. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{\sin^{-1}x}{\sin x}$.

$$\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin^{-1}x}{\sin x}=\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{x}{\sin x}\times\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin^{-1}x}{x}$$

$$=1\times\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin^{-1}x}{x}=\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin^{-1}x}{x}$$

$$=\underset{y\to 0}{Lt}\ \frac{y}{\sin y},\ (y=\sin x)\text{; (প্রধান মান)}$$

$\therefore$ প্রধান মান (Principal value) $=1$.

* উদাহরণ 6. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{1-\cos x}{x^2}=\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ \underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}.$$

উদাহরণ 7. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to\infty}{Lt}\dfrac{3x^2-2x+4}{2x^2+5x-1}$.

$$\underset{x\to\infty}{Lt}\frac{3x^2-2x+4}{2x^2+5x-1}=\underset{x\to\infty}{Lt}\frac{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\underset{x\to\infty}{Lt}\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{\underset{x\to\infty}{Lt}\left(2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\frac{3-0+0}{2+0-0}=\frac{3}{2}.$$

প্রশ্নমালা 6

বিভাগ A

1. মান নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x\to 2}{Lt}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$; (ii) $\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{x^5-a^5}{x^3-a^3}$;

(iii) $\underset{x\to 1}{Lt}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; (iv) $\underset{x\to 1}{Lt}\dfrac{x^{3/2}-1}{x^{5/2}-1}$;

(v) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$; (vi) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{e^{x/2}-1}{x}$;

(vii) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{2^x-1}{x}$; (viii) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{5^{-x}-1}{x}$;

(ix) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$; (x) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$;

(xi) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{a^x-b^x}{x}$, $(a\neq b\neq 0)$; (xii) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{3^x-1}{2^x-1}$;

(xiii) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{\log_e(1+3x)}{x}$; (xiv) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{\log_e(1-2x)}{x}$;

(xv) $\underset{x\to 0}{Lt}(1+3x)^{1/2}$; (xvi) $\underset{x\to 0}{Lt}(1-2x)^{2/x}$;

(xvii) $\underset{x\to 1}{Lt}\dfrac{\log_e x}{x-1}$; (xviii) $\underset{x\to 1}{Lt}\, x^{\frac{1}{1-x}}$

বিভাগ B

2. মান নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{x}$; (ii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin x}{\sin x}$; (iii) $\underset{x \to \pi}{Lt} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$;

(iv) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$; (v) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin x^\circ}{x}$; (vi) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan x^\circ}{x}$;

(vii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin^{-1} x}{x}$; (viii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{arc \tan x}{x}$; (ix) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan^{-1} x}{\sin^{-1} x}$;

(x) $\underset{x \to \frac{\pi}{4}}{Lt} \dfrac{\cos 2x}{x - \frac{\pi}{4}}$; (xi) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$; (xii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos x}{x}$;

(xiii) $\underset{\theta \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos 3\theta}{\theta^2}$; (xiv) $\underset{\theta \to \pi/2}{Lt} \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \tan \theta$; (xv) $\underset{\theta \to \pi/4}{Lt} \dfrac{1 - \tan \theta}{1 - \cot \theta}$.

3. মান নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$; (ii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)}$;

(iii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3}$; (iv) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin x - \tan x}{x}$;

(v) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan x - \sin x}{1 - \cos x}$; (vi) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x}$;

(vii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\cos x - \sec x}{x^2}$; (viii) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{Lt} (\sec x - \tan x)$;

(ix) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\cos 7x - \cos 9x}{\cos 3x - \cos 5x}$; (x) $\underset{x \to \frac{\pi}{4}}{Lt} \dfrac{2 - \operatorname{cosec}^2 x}{1 - \cot x}$;

(xi) $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$; (xii) $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{\tan x - \tan a}{x - a}$;

(xiii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$; (xiv) $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{x \sin a - a \sin x}{x - a}$.

বিভাগ C

4. মান নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x\to\infty}{Lt}\ \frac{3x^2+1}{x^2}$; (ii) $\underset{x\to\infty}{Lt}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\right)$;

(iii) $\underset{x\to-\infty}{Lt}\ \frac{2}{3+x^2}$; (iv) $\underset{x\to\infty}{Lt}\ \frac{x^2-2x+3}{2x^2+x+5}$;

(v) $\underset{x\to\infty}{Lt}\ e^{\left(2+\frac{1}{x}\right)}$; (vi) $\underset{x\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{2+e^x}$;

(vii) $\underset{x\to\infty}{Lt}\ \frac{\sin x}{x}$; (viii) $\underset{x\to\infty}{Lt}\ x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)$; $(a>0)$.

5. $f(x)=\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{1+x^{2n}}$ হইলে, $y=f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

$f(1+0), f(1-0), f(1)$; $f(-1-0), f(-1+0), f(-1)$ বাহির কর।

$\underset{x\to1}{Lt}\ f(x)$ নির্ণয় কর, যদি থাকে।

6. $|\sin x|<|x|$; $-\pi/2<x<\pi/2$; $x\neq0$ স্থাপন কর ; এবং এখান হইতে দেখাও যে, $\sin x\to0$, যখন $x\to0$.

ষষ্ঠ অধ্যায়

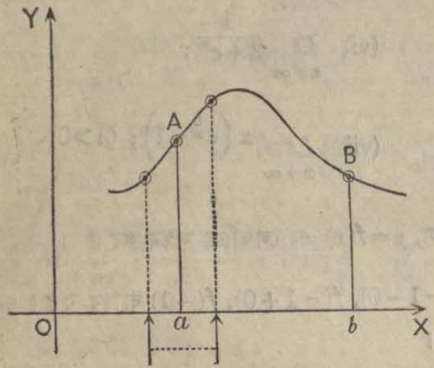
অপেক্ষকের অবিচ্ছিন্নতা

(Continuity of a function)

6-1. উপস্থাপন :

স্বজ্ঞাত এবং জ্যামিতিক পদ্ধতি :

মনে করি, $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট x এর অপেক্ষক।

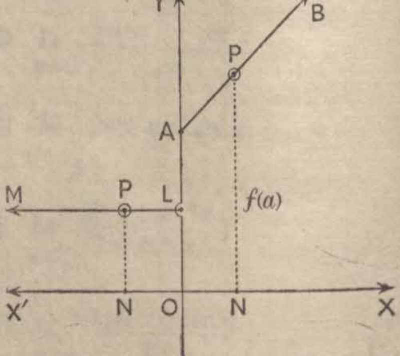


$[a, b]$ এতে $y=f(x)$ এর লেখচিত্রতে যদি কোথাও ভাঙ্গা (break) পরিলক্ষিত না হয়, তাহা হইলে, বলা হইবে যে, **$[a, b]$ এতে $f(x)$ সন্তত বা অবিচ্ছিন্ন (Continuous).**

$x=a$ এর অনুরূপ বিন্দুর সামীপ্যে $f(x)$ এর মান নির্দ্দিষ্ট ও সসীম হইলে এবং চলরাশি x ক্ষুদ্র পরিবর্তনের মাধ্যমে a এর নিকটবর্ত্তী হইতে থাকিলে, $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি যদি ক্ষুদ্র পরিবর্তনের মাধ্যমে $f(a)$ এর নিকটবর্ত্তী হয়, বা, $f(a)$ এর সমান থাকে, তাহা হইলে, বলা হইবে যে, **$x=a$ এতে $f(x)$ সন্তত বা অবিচ্ছিন্ন।**

দৃষ্টান্ত 1. ধরা যাক্,

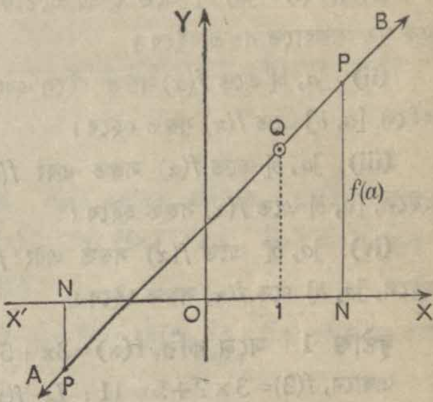
$f(x)=x+2$ যখন $x \geqslant 0$; এবং $f(x)=1$, যখন $x<0$.



$y=f(x)$ এর লেখচিত্র হইতে দেখা যাইতেছে, কেবলমাত্র $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত নহে ; তাহা ছাড়া, x এর প্রতিটি মানের জন্য $f(x)$ সন্তত অর্থাৎ কেবলমাত্র $x=0$ এতে লেখচিত্রটি ভাঙ্গা। এখানে, $a \neq 0$ হইলে, $f(a+0)=f(a-0)=f(a)$; এবং $x=a$ এতে $f(x)$ সন্তত। কিন্তু, $f(0+0)=f(0)=2$; $f(0-0)=1$; অর্থাৎ, $\underset{x \to 0}{Lt} f(x)$ নাই, যদিও $f(0)=2$.

দৃষ্টান্ত 2. ধরা যাক্‌, $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$.

এখানে, $f(1)$ অনির্ণেয় ; $f(x)=x+1$, যখন $x\neq1$. $y=f(x)$ এর লেখচিত্র হইতে দেখা যাইতেছে : কেবলমাত্র $x=1$ এতে $f(x)$ সন্তত নহে ; তাহা ছাড়া, x এর প্রতিটি মানের জন্য, $f(x)$ সন্তত, অর্থাৎ, $x=1$ এতে লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন নহে। $a\neq1$ হইলে, $f(a+0)=f(a-0)=f(a)=a+1$; এবং $x=a$ এতে $f(x)$ সন্তত। আবার, যদিও $f(1+0)=f(1-0)=2$, অর্থাৎ, $\underset{x\to1}{Lt}\ f(x)=2$, বিদ্যমান, তথাপি, $f(1)$ অনির্ণেয়।



দৃষ্টান্ত 3. ধরা যাক্‌, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

এখানে, $f(0)$ অনির্ণেয় ; এবং $f(0+0)=f(0-0)=+\infty$. সুতরাং $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত নহে।

6-2. অবিচ্ছিন্নতার সংজ্ঞা (Definition of Continuity) :

মনে করি, $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট x এর অপেক্ষক এবং $x=a$ এর অনুরূপ বিন্দুর সামীপ্যে $f(x)$ এর মান নির্দ্দিষ্ট ও সসীম।

যদি $f(a+0)=f(a-0)=f(a)$, অর্থাৎ, $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)=f(a)$ হয়, তাহা হইলে $x=a$ এতে $f(x)$ সন্তত হইবে।

সুতরাং, ϵ যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা হইলে, যদি একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা সম্ভব হয়, যাহাতে,

$|f(x)-f(a)|<\epsilon$, যখন $|x-a|<\delta$,

তাহা হইলে, $x=a$ এতে $f(x)$ সন্তত হইবে।

মন্তব্য : (i) $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)\neq f(a)$ হইলে, বা, (ii) $f(a)$ না থাকিলে, বা (iii) $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)$ না থাকিলে, $x=a$ এতে $f(x)$ সন্তত হইবে না।

দ্রষ্টব্য (i) $]a, b[$ এতে x এর প্রত্যেক মানের জন্য $f(x)$ সন্তত হইলে, ইহা এই মুক্ত অন্তরাতে সন্তত হইবে।

(ii) $]a, b[$ এতে $f(x)$ সন্তত হইলে এবং $f(a+0)=f(a)$ ও $f(b-0)=f(b)$ হইলে, $[a, b]$ এতে $f(x)$ সন্তত হইবে।

(iii) $]a, b[$ এতে $f(x)$ সন্তত এবং $f(a+0)=f(a)$ কিন্তু $f(b-0)\neq f(b)$ হইলে, $[a, b[$ এতে $f(x)$ সন্তত হইবে।

(iv) $]a, b[$ এতে $f(x)$ সন্তত এবং $f(b-0)=f(b)$ কিন্তু $f(a+0)\neq f(a)$ হইলে, $]a, b]$ এতে $f(x)$ সন্তত হইবে।

দৃষ্টান্ত 1. মনে করি, $f(x)=3x+5$.

এখানে, $f(2)=3\times2+5=11$; $\underset{x\to 2}{Lt}\ f(x)=3\times2+5=11$;

অর্থাৎ, $\underset{x\to 2}{Lt}\ f(x)=f(2)$. সুতরাং, $x=2$ এতে $f(x)$ সন্তত।

সাধারণভাবে, $f(a)=3a+5$; $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)=3a+5=f(a)$.

সুতরাং, $x=a$ এতে $f(x)$ সন্তত ; অর্থাৎ, x এর সকল মানের জন্য, $f(x)$ সন্তত।

দৃষ্টান্ত 2. মনে করি, $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x<0\ ;\\ 3x-2, & x>0.\end{cases}$

এখানে, $f(0)=3\times0+2=2$;

$$f(0-0)=\underset{x\to 0-}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to 0-}{Lt}\ (3x+2)=2\ ;$$

$$f(0+0)=\underset{x\to 0+}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to 0+}{Lt}\ (3x-2)=-2.$$

তাহা হইলে, $f(0-0)\neq f(0+0)$; অর্থাৎ, $\underset{x\to 0}{Lt}\ f(x)$ নাই।

সুতরাং, $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত নহে।

এখন, $a<0$ হইলে, $f(a)=3a+2$;

$$\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to a}{Lt}\ (3x+2)=3a+2=f(a).$$

সুতরাং, $a<0$ হইলে, $x=a$ এতে $f(x)$ সন্তত।

আবার, $a>0$ হইলে, $f(a)=3a-2$;

$$\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to a}{Lt}\ (3x-2)=3a-2=f(a).$$

সুতরাং, $a>0$ হইলে, $x=a$ এতে $f(x)$ সন্তত।

তাহা হইলে, $a\neq 0$ হইলে $x=a$ এতে $f(x)$ সন্তত।

সুতরাং, কেবলমাত্র $x=0$ বাদে, x এর অপর সকল মানের জন্য, $f(x)$ সন্তত।

6-3. কয়েকটি উপপাদ্য :

(1) $x=a$ এতে $f(x)$ এবং $\phi(x)$ সন্তত হইলে, সেই বিন্দুতে (i) $f(x)+\phi(x)$; (ii) $f(x)-\phi(x)$; (iii) $f(x)\ \phi(x)$; (iv) $f(x)/\phi(x)$; $\phi(x)\neq 0$; (v) $F\{\phi(x)\}$ সন্তত হইবে।

প্রমাণ : $x=a$ এতে $f(x)$ এবং $\phi(x)$ সন্তত হইলে, $\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)=f(a)$; এবং $\underset{x\to a}{Lt}\ \phi(x)=\phi(a)$.

(i) ধরি, $g(x)=f(x)+\phi(x)$.

$$\therefore\ \underset{x\to a}{Lt}\ g(x)=\underset{x\to a}{Lt}\ \{f(x)+\phi(x)\}=\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)+\underset{x\to a}{Lt}\ \phi(x)$$
$$=f(a)+\phi(a)=g(a).$$

$\therefore\ x=a$ এতে $g(x)$ সন্তত।

(ii) ধরি, $g(x)=f(x)-\phi(x)$.

$$\therefore\ \underset{x\to a}{Lt}\ g(x)=\underset{x\to a}{Lt}\ \{f(x)-\phi(x)\}=f(a)-\phi(a)=g(a).$$

$\therefore\ x=a$ এতে $g(x)$ সন্তত।

(iii) ধরি, $g(x)=f(x)\ \phi(x)$.

$$\therefore\ \underset{x\to a}{Lt}\ g(x)=\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)\ \phi(x)=f(a)\ \phi(a)=g(a).$$

$\therefore\ x=a$ এতে $g(x)$ সন্তত।

(iv) ধরি, $g(x)=f(x)/\phi(x)$, $(\phi(a)\neq 0)$.

$$\therefore\ \underset{x\to a}{Lt}\ g(x)=\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)/\phi(x)=f(a)/\phi(a)=g(a).$$

$\therefore\ x=a$ এতে $g(x)$ সন্তত।

(v) ধরি, $g(x)=F\{\phi(x)\}$

$\therefore \ \underset{x\to a}{Lt}\ g(x)=\underset{x\to a}{Lt}\ F\{\phi(x)\}=F\{\underset{x\to a}{Lt}\ \phi(x)\}=F\{\phi(a)\}=g(a),$

$\therefore$ $x=a$ এতে $g(x)$ সন্তত।

(2) $x=c$ এতে $f(x)$ সন্তত হইলে, এবং $f(c)\neq 0$ হইলে, $h(>0)$ পাওয়া যাইবে যাহাতে $|x-c|<h$ এতে $f(x)$ এর চিহ্ন একই হইবে।

প্রমাণঃ মনে করি, $0<\epsilon<|f(c)|$। সুতরাং $h(>0)$ থাকিবে, যাহাতে

$|f(x)-f(c)|<\epsilon$, যখন $|x-c|<h$;

অর্থাৎ, $f(c)-\epsilon<f(x)<f(c)+\epsilon$, যখন $|x-c|<h.$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, $f(c)>0$ হইলে, $0<\epsilon<f(c)$;

তখন, $f(x)>0$, যখন $|x-c|<h.$ কিন্তু, $f(c)<0$ হইলে, $0<\epsilon<-f(c)$ এবং, তখন, $f(x)<0$, যখন $|x-c|<h.$

দৃষ্টান্তঃ $f(x)=x$; $f(1)=1\neq 0.$

ধরি, $\epsilon=0{\cdot}01.$ সুতরাং, $|x-1|<0{\cdot}01$;

অর্থাৎ, ${\cdot}99<x<1{\cdot}01$ হইলে, $f(x)>0.$

আবার, $f(-1)=-1$ এবং $|x+1|<{\cdot}01$;

অর্থাৎ, $-1{\cdot}01<x<-{\cdot}99$ হইলে, $f(x)<0.$

(3). $[a,b]$ এতে $f(x)$ সন্তত হইলে, এবং $f(a)\times f(b)<0$ হইলে, অন্ততঃ x এর একটি মান c থাকিবে, যেখানে $f(c)=0$, $a<c<b.$

[প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত।]

দৃষ্টান্তঃ $f(x)=x^3$ হইলে, $f(2)=8$; $f(-2)=-8.$ $[-2,2]$ এতে $f(x)$ সন্তত এবং $f(2)\cdot f(-2)<0.$ দেখা যাইতেছে, $f(0)=0$, $-2<0<2.$

(4). $[a,b]$ এতে $f(x)$ সন্তত হইলে, এই অন্তরাতে $f(x)$ এর মান সীমাবদ্ধ থাকিবে এবং অন্ততঃ একবার $f(x)$ এর প্রদত্ত সীমাদ্বয়ের মধ্যবর্তী যে কোন সংখ্যার সমান হইবে ; অথবা, যে কোন সীমার সমান হইবে।

[প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত]

দৃষ্টান্তঃ $|\sin x-\sin\alpha|=\left|2\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}\right|$

$$=2\left|\cos\frac{x+\alpha}{2}\right|\left|\sin\frac{x-\alpha}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-\alpha}{2}\right|<2\left|\frac{x-\alpha}{2}\right|=|x-\alpha|.$$

$\therefore$ $|\sin x - \sin \alpha| < \epsilon$, যখন $|x - \alpha| < \epsilon$. সুতরাং, $x = \alpha$ এতে $\sin x$ সন্তত। কিন্তু, α এর মান যে কোন বাস্তব রাশি হইতে পারে। সুতরাং, x এর যে কোন মানের জন্য $\sin x$ সন্তত।

তাহা হইলে, $[-\pi, \pi]$ এতে $\sin x$ সন্তত। তাহা ছাড়া, $|\sin x| \leqslant 1$. সুতরাং, $[-\pi, \pi]$ এতে $\sin x$ সীমাবদ্ধ। $\sin x$ এর উর্দ্ধস্থ সীমা 1, এবং $\sin(\pi/2) = 1$; আবার, $\sin x$ এর নিম্নস্থ সীমা -1, এবং $\sin(-\pi/2) = -1$.

(5) [a, b] এতে $y = f(x)$ সন্তত ও strictly monotonic increasing বা, strictly monotonic decreasing হইলে, উহার বিপরীত অপেক্ষক থাকিবে এবং তাহা [f(a), f(b)] এতে সন্তত ও strictly monotonic increasing বা, strictly monotonic decreasing হইবে।

[প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত।]

দৃষ্টান্ত ঃ ধরি, $y = \sqrt{x}$; এখানে, [0, 4] এতে $\sqrt{x}$ সন্তত এবং strictly monotonic increasing. $\therefore$ $y = \sqrt{x}$ এর বিপরীত অপেক্ষক আছে, এবং তাহা $y = x^2$, যেখানে [0, 2] এতে x^2 সন্তত এবং strictly monotonic increasing.

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

$\sin^{-1}x$, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$; $\cos^{-1}x$, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$;

$\tan^{-1}x$, $(-\infty < x < \infty)$; $\cot^{-1}x$, $(-\infty < x < \infty)$;

$\sec^{-1}x$, $(|x| \geqslant 1)$; $\operatorname{cosec}^{-1}x$, $(|x| \geqslant 1)$.

সন্তত এবং strictly monotonic.

[শেষের দুইটির লেখচিত্র $-1 < x < 1$ এর জন্য অস্তিত্বহীন।]

6-4. কতিপয় প্রাথমিক (elementary) সন্তত অপেক্ষক ঃ

(1). **n** ধনাত্মক মূলদ রাশি হইলে, **x** এর সকল মানের জন্য, এবং **n** ঋণাত্মক মূলদ রাশি হইলে, $x = 0$ ভিন্ন অপর সকল মানের জন্য, x^n সন্তত।

(2) $P(x)$ যে কোন বাহুপদ অপেক্ষক হইলে, x এর যে কোন মানের জন্য $P(x)$ সন্তত।

(3) x এর সকল মানের জন্য, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\sinh x$ ও $\cosh x$ সন্তত।

(4) x এর যে কোন ধনাত্মক মানের জন্য $\log_e x$ সন্তত।

(5) n যে কোন পূর্ণসংখ্যা হইলে, $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ভিন্ন x এর অপর যে কোন মানের জন্য $\tan x$ এবং $\sec x$; $x=n\pi$ ভিন্ন x এর অপর যে কোন মানের জন্য, $\cot x$ এবং $\operatorname{cosec} x$ সন্তত।

6-5. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণঃ

উদাহরণ 1. দেখাও যে, $x=1$ এতে x^2+3 সন্তত।

ধরি, $f(x)=x^2+3$. $\therefore$ $f(1)=1+3=4$;

$$\underset{x\to 1}{Lt} f(x)=\underset{x\to 1}{Lt}(x^2+3)=1+3=4=f(1).$$

সুতরাং, $x=1$ এতে $f(x)$, অর্থাৎ, x^2+3 সন্তত।

উদাহরণ 2. $\dfrac{x^2-4}{x^2+x+1}$ অপেক্ষকটি $x=1$ এতে সন্তত কিনা নির্দেশ কর

ধরি, $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+x+1}$. $\therefore$ $f(1)=-1$.

আবার, $$\underset{x\to 1}{Lt} f(x)=\underset{x\to 1}{Lt}\frac{x^2-4}{x^2+x+1}=\frac{1-4}{1+1+1}=-1.$$

$$\therefore \underset{x\to 1}{Lt} f(x)=f(1),$$

সুতরাং, $x=1$ এতে $f(x)$, অর্থাৎ, $\dfrac{x^2-4}{x^2+x+1}$ সন্তত।

উদাহরণ 3. $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত কিনা দেখাও, যখন,

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 ; \\ 0 & , \ x=0. \end{cases}$$

এখানে, $f(0)=0$.

$$|f(x)-f(0)|=\left|x\cos\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant |x|.$$

$$\therefore \quad |f(x)-f(0)|<\epsilon, \text{ যখন } |x-0|<\epsilon.$$

সুতরাং, $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত।

উদাহরণ 4. দেওয়া আছে,

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; কোন্ শর্ত আরোপ করিলে, $x=1$ এতে $f(x)$ সন্তত হইবে ?

এখানে, $\underset{x\to1}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to1}{Lt}\ \dfrac{x^2-1}{x-1}=\underset{x\to1}{Lt}\ (x+1)=2.$

$\therefore$ $x=1$ এতে $f(x)$ সন্তত হইবে, যদি $\underset{x\to2}{Lt}\ f(x)=f(2)$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $f(2)=2$ হয়।

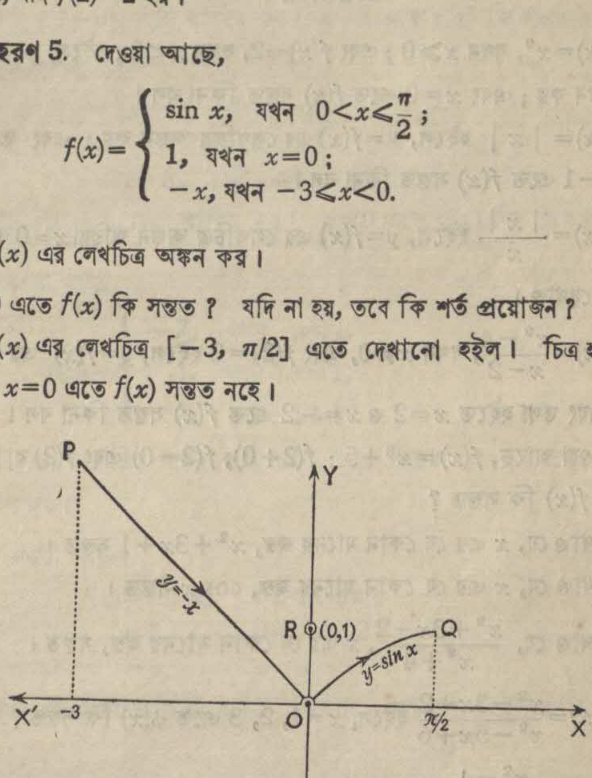
উদাহরণ 5. দেওয়া আছে,

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{যখন } 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\,;\\ 1, & \text{যখন } x=0\,;\\ -x, & \text{যখন } -3\leqslant x<0.\end{cases}$$

$y=f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

$x=0$ এতে $f(x)$ কি সন্তত ? যদি না হয়, তবে কি শর্ত প্রয়োজন ?

$y=f(x)$ এর লেখচিত্র $[-3, \pi/2]$ এতে দেখানো হইল। চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে, $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত নহে।



স্পষ্টতঃই, $f(0+0)=f(0-0)=0$;

অর্থাৎ, $\underset{x\to0}{Lt}\ f(x)=0$; সুতরাং $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত হইত, যদি $f(0)=0$ হইত।

উদাহরণ 6. নিম্নোক্ত অপেক্ষকসমূহ কোথায় সন্তত নহে তাহা নির্দেশ কর :

(i) $\dfrac{1}{x^2-1}$; (ii) $\cot x$; (iii) $\dfrac{\sin x}{x}$.

(i) $x=1, -1$ এতে সন্তত নহে।

(ii) $x=n\pi$ এতে সন্তত নহে, $n=0$, বা, যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

(iii) $x=0$ এতে সন্তত নহে।

প্রশ্নমালা 7

1. $f(x)=x^2$, যখন $x\geqslant 0$; এবং $f(x)=2$, যখন $x<0$; হইলে, $y=f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর ; এবং $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত কিনা বল।

2. $f(x)=|x|$ হইলে, $y=f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর ; এবং তথা হইতে $x=0, 1, -1$ এতে $f(x)$ সন্তত কিনা বল।

3. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ হইলে, $y=f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত কিনা দেখাও।

4. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, যখন $x\neq 0$, এবং $f(2)=2$ হইলে, $y=f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং তথা হইতে $x=2$ ও $x=-2$ এতে $f(x)$ সন্তত কিনা বল।

5. দেওয়া আছে, $f(x)=x^3+5$; $f(2+0)$, $f(2-0)$ এবং $f(2)$ বাহির কর। $x=2$ এতে $f(x)$ কি সন্তত ?

6. দেখাও যে, x এর যে কোন মানের জন্য, x^2+3x+1 সন্তত।

7. দেখাও যে, x এর যে কোন মানের জন্য, $\cos x$ সন্তত।

8. দেখাও যে, $\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+4}$, x এর যে কোন মানের জন্য, সন্তত।

9. $\phi(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$ হইলে, $x=1, 2, 3$ এতে $\phi(x)$ কি সন্তত ?

10. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, যখন $x\neq 2$ এবং $f(2)=k$. $x=2$ এতে $f(x)$ কে সন্তত হইতে হইলে, k এর মান কি হওয়া প্রয়োজন ?

11. দেওয়া আছে, $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}$; $f(1+0)$, $f(1-0)$ এবং $f(1)$ বাহির কর। $x=1$ এতে $f(x)$ কি সন্তত ?

12. যদি $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, যখন $x \neq 3$, এবং $f(x)=3$, যখন $x=3$; $f(3+0), f(3-0), f(3)$ বাহির কর। $x=3$ এতে $f(x)$ কি সন্তত ?

13. দেওয়া আছে,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}-x, & \text{যখন } x<2, \\ \frac{1}{2}, & \text{যখন } x=2, \\ x-\frac{1}{2}, & \text{যখন } x>2. \end{cases}$$

$f(2+0), f(2-0), f(2)$ বাহির কর। $x=2$ এতে $f(x)$ কি সন্তত ?

14. দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} f(x)&=2x+6, & -3 \leqslant x \leqslant 0; \\ &=6, & 0<x<2; \\ &=2x-6, & 2 \leqslant x \leqslant 5. \end{aligned}$$

$f(0+0), f(0-0), f(0)$ বাহির কর। $x=0$ এতে $f(x)$ কি সন্তত ?

15. দেওয়া আছে,

$$f(x)=\begin{cases} -2, & \text{যখন } x<1, \\ 1, & \text{যখন } x=1, \\ 2, & \text{যখন } x>1. \end{cases}$$

$y=f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর, এবং তথা হইতে $x=1$ এতে $f(x)$ সন্তত কিনা নির্দেশ কর।

16. দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin x, & \pi/2<x \leqslant \pi; \\ &=1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi/2; \\ &=x, & x<0. \end{aligned}$$

$y=f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। কোথায় কোথায় $f(x)$ সন্তত নহে তাহা উল্লেখ কর।

17. $$\begin{aligned} f(x)&=0, \text{ যখন } 0 \leqslant x<1; \\ &=1, \text{ যখন } 1 \leqslant x<2; \\ &=2, \text{ যখন } 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{aligned}$$

$[0, 3]$ এতে $y=f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া দেখাও $f(x)$ কোথায় কোথায় সন্তত নহে।

18. দেওয়া আছে,

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0\,;\\ x, & 0<x<1\,;\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

$x=0, 1, 2$ এতে $f(x)$ কি সন্তত ?

19. দেওয়া আছে, $f(x)=0$, যখন $x^2>1$; $f(x)=2$, যখন $x^2<1$; এবং $f(x)=\frac{1}{2}$, যখন $x^2=1$. $y=f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া $x=-1, 0, 1$ এতে $f(x)$ সন্তত কিনা নির্দেশ কর।

20. "$\phi(x)=x^2$, যখন $|x|>0$, এবং $\phi(0)=10^{-5}$, হইলে, $x=0$ এতে $\phi(x)$ সন্তত হইবে।" ইহা কি ঠিক ?

21. $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $x\neq 1$ এবং $g(1)=0$ হইলে, $x=1$ এতে $g(x)$ কি সন্তত ?

22. $\phi(x)=x+\sin x$ হইলে, প্রমাণ কর $|\phi(x)|<2|x|$; এবং এখন দেখাও যে, $x=0$ এতে $\phi(x)$ সন্তত।

23. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, $(x\neq 0)$, এবং $f(0)=0$ হইলে, $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত কিনা আলোচনা কর।

24. দেওয়া আছে, $x=0$ এতে $\phi(x)$ সন্তত, যেখানে

$\phi(x)=x^2\cos\dfrac{1}{x}$. $\phi(0)$ এর মান কত ?

25. নিম্নোক্ত অপেক্ষকগুলি কোথায় কোথায় সন্তত নহে ?

(i) $\dfrac{2}{x(x+1)}$; (ii) $\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$; (iii) $\sec x$;

(iv) $\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$; (v) $\dfrac{x}{\sin x}$; (vi) $\cos\dfrac{1}{x}$.

সপ্তম অধ্যায়

অপেক্ষকের অবকলিতক

(Derivative of a function)

7-1. চলরাশির পরিবর্তন (Increment) :

মনে করি, চলরাশি x এর প্রারম্ভিক মান (Initial value) 2 এবং উহার অন্তিম মান (Final value) 2·05. তাহা হইলে, বলা হইবে, x এর পরিবর্তন (increment), (2·05 − 2), অর্থাৎ, 0·05 ; কিন্তু, x এর প্রারম্ভিক মান 2 এবং অন্তিম মান 1·95 হইলে, উহার পরিবর্তন হইত (1·95 − 2), অর্থাৎ, − 0·05.

চলরাশি x এর অন্তিম মান ও প্রারম্ভিক মানের অন্তরকে উহার মোট পরিবর্তন বলা হয় এবং সংক্ষেপে ইহাকে Δx (delta x), বা, δx (delta x) অথবা h দ্বারা সূচিত করা হয়।

সেইরূপ, চলরাশি y এর পরিবর্তনকে Δy, বা, δy, বা, k দ্বারা সূচিত করা হয়।

চলরাশি x এর প্রারম্ভিক মান x_0 এবং অন্তিম মান x_1 হইলে, এবং $x = x_0$ এতে x এর পরিবর্তন Δx হইলে, $\Delta x = x_1 - x_0$.

চলরাশি x এর প্রারম্ভিক মান 3 এবং অন্তিম মান 3·05 হইলে, $x = 3$ এতে $\Delta x = 3{\cdot}05 - 3 = 0{\cdot}05$.

কিন্তু, x এর প্রারম্ভিক মান 3 এবং অন্তিম মান 2·95 হইলে, $x = 3$ এতে $\Delta x = 2{\cdot}95 - 3 = -0{\cdot}05$.

স্বাধীন চলরাশির ক্ষেত্রে উহার পরিবর্তন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে, কিন্তু কথনই শূন্য হইবে না।

7-2. অপেক্ষকের পরিবর্তন :

মনে করি, $y = 2x + 3$. স্বাধীন চলরাশি x এর প্রারম্ভিক মান $x_0 = 3$ হইলে, উহার অধীন চলরাশি y এর অনুরূপ প্রারম্ভিক মান এখানে $y_0 = 2 \times 3 + 3 = 9$. এখন স্বাধীন চলরাশি x এর অন্তিম মান $x_1 = 3{\cdot}05$ হইলে, $\Delta x = x_1 - x_0 = 0{\cdot}05$; এবং তখন উহার অধীন চলরাশি y এর অনুরূপ অন্তিম মান এখানে $y_1 = 2 \times 3{\cdot}05 + 3 = 9{\cdot}1$ এবং $\Delta y = y_1 - y_0 = 0{\cdot}1$.

মনে করি, $f(x)$ একটি একমান বিশিষ্ট x এর অপেক্ষক এবং $y = f(x)$. ধরা যাক, x এতে x এর পরিবর্তন Δx এবং y এর অনুরূপ পরিবর্তন Δy. তাহা হইলে, $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

$$\therefore \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

দৃষ্টান্ত 1. $y=x^2+3$; $x=2$ হইলে, $y=7$. x এর মান পরিবর্তিত হইয়া $x=2{\cdot}01$ হইলে, $y=7{\cdot}0401$. সুতরাং, $x=2$ এতে $\Delta x=2{\cdot}01-2=0{\cdot}01$; $\Delta y=7{\cdot}0401-7=0{\cdot}0401$.

দৃষ্টান্ত 2. $y=3x^2+2x-5$ হইলে,

$$y+\delta y=3(x+\delta x)^2+2(x+\delta x)-5$$
$$=(3x^2+2x-5)+(6x\delta x+2\delta x)+3(\delta x)^2$$
$$=y+(6x+2+3\delta x)\delta x$$
$$\therefore\ \delta y=(6x+2+3\delta x)\delta x.$$

দৃষ্টান্ত 3. $y=\tan x$ হইলে, $y+\Delta y=\tan(x+\Delta x)$;

বা, $\Delta y=\tan(x+\Delta x)-\tan x=\dfrac{\sin\Delta x}{\cos x\cos(x+\Delta x)}$.

দৃষ্টান্ত 4. $\delta x=0{\cdot}03$ হইলে, $x=2$ এতে δy বাহির কর, যখন $y=2x^2+5$.

এখানে, $y+\delta y=2(x+\delta x)^2+5$.

$$\therefore\ \delta y=2(x+\delta x)^2+5-y$$
$$=2(x+\delta x)^2+5-2x^2-5$$
$$=2(2x+\delta x)\delta x.$$

সুতরাং, যখন $\delta x=0{\cdot}03$, তখন, $x=2$ এতে

$$\delta y=2(2\times2+0{\cdot}03)\times0{\cdot}03=0{\cdot}2418.$$

দৃষ্টান্ত 5. $y=3$ হইলে, x এবং δx এর যে কোন মানের জন্য, দেখাও যে, $\delta y=0$.
[ইঙ্গিত : এখানে, $y+\delta v=3$; $y=3$].

7-3. (a) $x=a$ এতে $f(x)$ সন্তত হইলে, $y=f(x)$ এর ক্ষেত্রে, $x=a$ এতে $\Delta y\to0$, যখন $\Delta x\to0$.

এখানে, $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$.

এখন, যেহেতু, $x=a$ এতে $f(x)$ সন্তত, সুতরাং,

$$\underset{x\to a}{Lt}\ f(x)=f(a)\ ;\quad \text{বা ;}\ \underset{\Delta x\to0}{Lt}\ f(a+\Delta x)=f(a)\ ;$$

বা, $\underset{\Delta x\to0}{Lt}\ \{f(a+\Delta x)-f(a)\}=0$;

বা, $\underset{\Delta x\to0}{Lt}\ \Delta y=0$;

অর্থাৎ, $\Delta y\to0$, অথবা, $\Delta y=0$, (y ধ্রুবক হইলে), যখন $\Delta x\to0$.

7-3. (b) **[a, b] এতে f(x) সন্তত এবং strictly monotonic হইলে, y=f(x) এর জন্য x=c এতে Δx এর যে কোন মানের জন্য, $\Delta y \neq 0$, (a<c<b).**

এখানে, $\Delta y = f(c+\Delta x) - f(c)$. এখন, যেহেতু, $[a, b]$ এতে $f(x)$ strictly monotonic, $f(c+\Delta x) \neq f(c)$, ($\because$ $\Delta x \neq 0$). সুতরাং, $x=c$ এতে $\Delta y \neq 0$. কিন্তু, $x=c$ এতে $f(x)$ সন্তত বলিয়া, $\Delta y \to 0$, যখন $\Delta x \to 0$.

7-4. (a) অবকলিতক (Derivative) :

মনে করি, একমানবিশিষ্ট অপেক্ষক $f(x)$ এর মান $[a, b]$ অন্তরাতে নির্দিষ্ট ও সসীম, যেখানে $a<b$ এবং $y=f(x)$. মনে করি, a ও b এর মধ্যবর্তী যে কোন মান x এতে x এর পরিবর্তন Δx এবং y এর অনুরূপ পরিবর্তন Δy. তাহা হইলে, ঐ x এতে অধীন ও স্বাধীন চলরাশিদ্বয়ের পরিবর্তনের অনুপাত :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

এখন, $\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ নির্দিষ্ট হইলে, ইহাকে x এতে $f(x)$ এর **অবকলিতক** বলা হইবে ; এবং তখন ইহাকে $\frac{dy}{dx}$, বা, $f'(x)$ দ্বারা সূচিত করা হইবে ; অর্থাৎ,

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} \equiv \mathbf{f'(x)} = \underset{\Delta x \to 0}{\mathbf{Lt}} \frac{\mathbf{\Delta y}}{\mathbf{\Delta x}}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\mathbf{Lt}} \frac{\mathbf{f(x+\Delta x) - f(x)}}{\mathbf{\Delta x}}$$

$$= \underset{h \to 0}{\mathbf{Lt}} \frac{\mathbf{f(x+h) - f(x)}}{\mathbf{h}}.$$

দ্রষ্টব্য : y' বা, y_1 বা, Dy দ্বারা $f'(x)$ কে সূচিত করা হইয়া থাকে।

দৃষ্টান্ত 1. $y = x^2 + 3$.

$$\therefore \; y + \Delta y = (x+\Delta x)^2 + 3$$
$$= (x^2+3) + (2x+\Delta x)\Delta x ;$$

বা, $\Delta y = (2x+\Delta x)\Delta x$, বা, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

$$\therefore \; \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} (2x+\Delta x) = 2x ;$$

অর্থাৎ, $\frac{dy}{dx} = 2x.$

দৃষ্টান্ত 2. $y=f(x)\equiv x^3+2.$

$$\therefore\ y+\delta y=(x+\delta x)^3+2$$
$$=(x^3+2)+\{3x^2+3x\delta x+(\delta x)^2\}\delta x$$
$$=y+\{3x^2+3x\delta x+(\delta x)^2\}\delta x\ ;$$

বা, $\dfrac{\delta y}{\delta x}=3x^2+3x\delta x+(\delta x)^2.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\underset{\delta x\to 0}{Lt}\ \frac{\delta y}{\delta x}=\underset{\delta x\to 0}{Lt}\ \{3x^2+3x\delta x+(\delta x)^2\}$$
$$=3x^2+3x\times 0+0=3x^2.$$

7-4. (b) x=c এতে f(x) এর অবকলিতক :

মনে করি, $x=c$ এতে x এর পরিবর্তন Δx এবং y অর্থাৎ $f(x)$ এর অনুরূপ পরিবর্তন Δy. তাহা হইলে, $\Delta y=f(c+\Delta x)-f(c)$.

এখন, $\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ নির্দিষ্ট হইলে, $x=c$ এতে $f(x)$ এর অবকলিতক আছে বলা হইবে, এবং ইহাকে $f'(c)$ অথবা $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=c}$ দ্বারা সূচিত করা হইবে।

সুতরাং, $f'(c)=\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\ \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$;

অর্থাৎ, $\mathbf{f'(c)=\underset{h\to 0}{Lt}\ \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}}$.

দ্রষ্টব্য : $\underset{h\to 0+}{Lt}\ \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ এবং $\underset{h\to 0-}{Lt}\ \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ কে যথাক্রমে $Rf'(c)$ এবং $Lf'(c)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

Rf′(c) এবং Lf′(c) উভয়ে নির্দিষ্ট হইলে এবং Rf′(c) = Lf′(c) হইলে, f′(c) থাকিবে এবং বিপরীত ক্রমে।

দৃষ্টান্ত 1. $f(x)=x^2+2x-5$ হইলে, $f'(2)$ নির্ণয় কর, যদি থাকে।

এখানে, $f(2)=2^2+2\times 2-5=3$;

$$f(2+h)=(2+h)^2+2(2+h)-5=6h+h^2+3.$$

$$\therefore\ f'(2)=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{(6h+h^2+3)-3}{h}$$
$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ (6+h)=6.$$

দৃষ্টান্ত 2. $y=\sin x$ হইলে, $x=\pi$ এতে $\frac{dy}{dx}$ বাহির কর।

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\pi}=\underset{h\to0}{Lt}\ \frac{\sin(\pi+h)-\sin\pi}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{Lt}\ \frac{-\sin h}{h}=-1.$$

দৃষ্টান্ত 3. দেওয়া আছে,

$$f(x)=\begin{cases}3x+2, & \text{যখন } x\geqslant0,\\ x^2+3x+2, & \text{যখন } x<0.\end{cases}$$

$Rf'(0)$ এবং $Lf'(0)$ বাহির কর। $f'(0)$ আছে কি ?

$$Rf'(0)=\underset{h\to0+}{Lt}\ \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\underset{h\to0+}{Lt}\ \frac{3h+2-2}{h}=3.$$

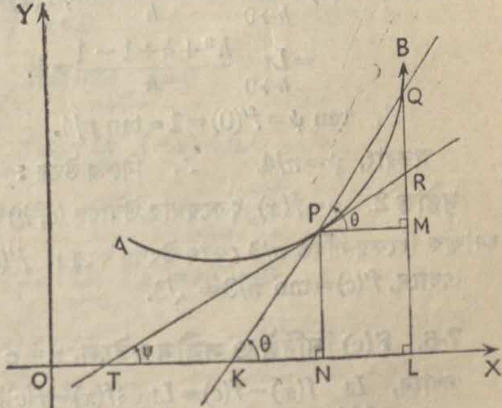
$$Lf'(0)=\underset{h\to0-}{Lt}\ \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\underset{h\to0-}{Lt}\ \frac{h^2+3h+2-2}{h}=3.$$

সুতরাং, $Rf'(0)=Lf'(0)=3.$

$\therefore\ f'(0)$ আছে, এবং $f'(0)=3.$

7-5. অবকলিতকের জ্যামিতিক অর্থ (Geometrical Meaning of the Derivative) :



মনে করি, একটি **এক-মানবিশিষ্ট** অপেক্ষক $f(x)$, $[a, b]$ অন্তরাতে সন্তত এবং $f'(c)$ আছে, যেখানে $a<c<b$

$[a, b]$ অন্তরাতে $y=f(x)$ এর লেখচিত্র AB বক্ররেখা। চিত্রে, $ON=c$; $PN=f(c)$. AB বক্ররেখার উপর P এর নিকটবর্তী Q যে কোন বিন্দু, যাহার x-স্থানাঙ্ক $c+\Delta x$. চিত্রে, $QL=f(c+\Delta x)$, যেখানে $OL=c+\Delta x$.

QL এর উপর PM লম্ব। মনে করি, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত PQ, θ-কোণে নত।

এখন, বক্ররেখা বরাবর Q বিন্দু P বিন্দুর অতিশয় নিকটবর্তী হইতে থাকিলে, $OL \to ON$ অর্থাৎ, $\Delta x \to 0$ হইবে। যখন $\Delta x \to 0$, তখন QPK সরলরেখার সীমাস্থ অবস্থান PT হইলে, AB বক্ররেখার P বিন্দুতে PT স্পর্শক হইবে। মনে করি, এখানে PT স্পর্শক আছে এবং উহা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত ψ কোণে নত।

সুতরাং, $\theta \to \psi$, যখন $\Delta x \to 0$.

এখন, PMQ সমকোণী ত্রিভুজ হইতে পাই, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta$.

$$\therefore \quad \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\theta \to \psi}{Lt} \tan\theta ;$$

$$\text{বা,} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=c} = \tan\psi ; \quad \text{অর্থাৎ,} \quad f'(c) = \tan\psi.$$

সুতরাং, বক্ররেখার উপরিস্থ $[c, f(c)]$ বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহার ট্যানজেন্ট্ (tangent) $f'(c)$ হইবে।

দৃষ্টান্ত 1. $y = x^2 + x + 1$ সমীকরণ যে বক্ররেখাকে সূচিত করে, তাহার উপরিস্থ $(0, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\pi/4$ কোণ উৎপন্ন করে,—ইহা দেখাও।

$$\text{এখানে,} \quad f'(0) = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} ; \; f(x) = x^2 + x + 1$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{h^2 + h + 1 - 1}{h} = 1.$$

$$\therefore \quad \tan\psi = f'(0) = 1 = \tan\pi/4.$$

সুতরাং, $\psi = \pi/4$. $\quad \therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $\pi/4$. প্রমাণিত।

দৃষ্টান্ত 2. $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরিস্থ (c, k) বিন্দুতে উহার স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\pi/3$ কোণ উৎপন্ন করে। $f'(c)$ এর মান কত?

এখানে, $f'(c) = \tan\pi/3 = \sqrt{3}$.

7-6. f'(c) নির্দিষ্ট ও সসীম হইলে, x = c এতে f(x) সন্তত হইবে।

$$\text{এখানে,} \quad \underset{x \to c}{Lt} f(x) - f(c) = \underset{x \to c}{Lt} \{f(x) - f(c)\}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \{f(c+h) - f(c)\}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \times h$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \times \underset{h \to 0}{Lt} h$$

$$= f'(c) \times 0$$

$= ($ নির্দিষ্ট সসীম রাশি $) \times 0 = 0.$

$\therefore \underset{x \to c}{Lt} f(x) = f(c)$; অর্থাৎ, $x=c$ এতে $f(x)$ সন্তত।

মন্তব্য : $x=c$ এতে $f(x)$ সন্তত হইলে, $f'(c)$ থাকিতে পারে, আবার নাও থাকিতে পারে।

(a) মনে করি, $f(x)=x^2$.

(i) এখানে, $f(0)=0$; $\underset{x \to 0}{Lt} f(x) = \underset{x \to 0}{Lt} x^2 = 0 = f(0)$.

স্বতরাং, $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত।

(ii) আবার, $f'(0) = \underset{h \to 0}{Lt} \dfrac{h^2-0}{h} = 0.$

স্বতরাং, $f'(0)$ আছে, এবং তাহা সসীম।

(b) মনে করি, $f(x) = |x|$; অর্থাৎ,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 ; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

(i) এখানে, $f(0+0) = \underset{x \to 0+}{Lt} f(x) = \underset{x \to 0+}{Lt} x = 0$;

$$f(0-0) = \underset{x \to 0-}{Lt} f(x) = \underset{x \to 0-}{Lt} (-x) = 0.$$

$\therefore f(0+0) = f(0-0) = 0$; অর্থাৎ, $\underset{x \to 0}{Lt} f(x) = 0.$

আবার, $f(0)=0$; $\therefore \underset{x \to 0}{Lt} f(x) = f(0) = 0.$

স্বতরাং, $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত।

(ii) অথচ, $Rf'(0) = \underset{h \to 0+}{Lt} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$= \underset{h \to 0+}{Lt} \frac{h-0}{h} = +1,$$

$$\text{এবং } Lf'(0) = \underset{h \to 0-}{Lt} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0-}{Lt} \frac{-h-0}{h} = -1.$$

এখানে, $f'(0+0) \neq f'(0-0)$. সুতরাং, $f'(0)$ নাই।

দ্রষ্টব্য : $f'(c)$ এর মান $+\infty$ অথবা $-\infty$ হইলে, $x=c$ এতে $f(x)$ সন্তত হইতে পারে, অথবা, নাও হইতে পারে

(a) মনে করি, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{যখন } x \geqslant 0\,; \\ -\sqrt{-x}, & \text{যখন } x < 0. \end{cases}$

এখানে, $\mathbf{f'(0)} \simeq +\infty$; এবং $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত।

(b) মনে করি, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{যখন } x < 1\,; \\ 1, & \text{যখন } x = 1\,; \\ 2, & \text{যখন } x > 1. \end{cases}$

এখানে, $\mathbf{f'(1)} \simeq +\infty$; $x=1$ এতে $f(x)$ সন্তত নহে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : $x=c$ এতে $f(x)$ সন্তত না হইলে, $f'(c)$ সসীম হইবে না অর্থাৎ, ইহার অস্তিত্ব থাকিবে না।

7-7. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. x এর মান 5 হইতে 5·03 এতে পরিবর্তিত হইলে, Δx এবং Δy এর মান বাহির কর, যখন $y = 3 + x^2$.

$x=5$ হইলে, $y = 3 + 5^2 = 28$;

$x=5{\cdot}03$ হইলে, $y = 3 + (5{\cdot}03)^2 = 28{\cdot}3009$.

$\therefore \quad \Delta x = 5{\cdot}03 - 5 = 0{\cdot}03$;

$\Delta y = 28{\cdot}3009 - 28 = 0{\cdot}3009$

উদাহরণ 2. x এর মান 2 হইতে 1·969 এতে পরিবর্তিত হইলে, δx এবং δy এর মান নির্ণয় কর, যখন $y = 3x^2 + 5$.

$x=2$ হইলে, $y = 3 \times 2^2 + 5 = 17$;

$x=1{\cdot}969$ হইলে, $y = 3 \times (1{\cdot}969)^2 + 5 = 16{\cdot}630883$.

$\therefore \quad \delta x = 1{\cdot}969 - 2 = -0{\cdot}031$.

$\delta y = 16{\cdot}630883 - 17 = -0{\cdot}369117$.

উদাহরণ 3. x এর মান 3 হইতে 2·99 এতে পরিবর্তিত হইলে, $2/x^2$ এর পরিবর্তন কিরূপ হইবে ?

ধরি, $y=2/x^2$. তাহা হইলে,

$$\delta y=\frac{2}{(2{\cdot}99)^2}-\frac{2}{3^2}=\frac{2\{3^2-(2{\cdot}99)^2\}}{3^2\times(2{\cdot}99)^2}$$

$$=\frac{2\times5{\cdot}99\times0{\cdot}01}{9\times2{\cdot}99\times2{\cdot}99}=\frac{1198}{804609}\simeq0{\cdot}00149.$$

উদাহরণ 4. দেওয়া আছে, $y=x^2+3$; $x=2$ এতে Δx এর মান 0·01 ; 0·003, −0·02 হইলে, Δy এবং $\Delta y/\Delta x$ এর অনুরূপ মানগুলি বাহির কর।

$\Delta x=0{\cdot}01$ হইলে, $\Delta y=\{(2{\cdot}01)^2+3\}-\{2^2+3\}$
$=(2{\cdot}01)^2-2^2=4{\cdot}01\times0{\cdot}01=0{\cdot}0401.$

এবং $\Delta y/\Delta x=0{\cdot}0401/0{\cdot}01=4{\cdot}01.$

$\Delta x=0{\cdot}003$ হইলে $\Delta y=\{(2{\cdot}003)^2+3)-\{2^2+3\}$
$=(2{\cdot}003)^2-2^2=4{\cdot}003\times{\cdot}003=0{\cdot}012009.$

এবং $\Delta y/\Delta x=0{\cdot}012009/0{\cdot}003=4{\cdot}003.$

$\Delta x=-0{\cdot}02$ হইলে, $\Delta y=\{(2-0{\cdot}02)^2+3\}-\{2^2+3\}=(1{\cdot}98)^2-2^2$
$=3{\cdot}98\times(-0{\cdot}02)=-0{\cdot}0796.$

এবং $\Delta y/\Delta x=-0{\cdot}0796/(-0{\cdot}02)=3{\cdot}98$

উদাহরণ 5. দেওয়া আছে, $y=3x+5$; দেখাও যে, $x=2$ এতে $\Delta y/\Delta x\to3$ যখন $\Delta x\to0$.

Δx	0·1	0·02	0·003	0·00005	……
Δy	0·3	0·06	0·009	0·00015	……
$\Delta y/\Delta x$	3	3	3	3	……

Δx	−0·1	−0·01	−0·001	−0·0001	……
Δy	−0·3	−0·03	−0·003	−0·0003	……
$\Delta y/\Delta x$	3	3	3	3	……

$\therefore\ \underset{\Delta x\to0}{Lt}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3$; অর্থাৎ, $\Delta y/\Delta x\to3$, যখন $\Delta x\to0$.

উদাহরণ 6. $y=x^3+5$ হইলে, $x=2$ এতে Δx এর অনুরূপ Δy এবং $\Delta y/\Delta x$ এর মান বাহির কর। দেখাও যে, $\Delta y/\Delta x \to 12$ যখন $\Delta x \to 0$.

এখানে, $\Delta y=\{(2+\Delta x)^3+5\}-\{2^3+5\}$

$$=12(\Delta x)+6(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

$$\therefore \quad \Delta y/\Delta x=12+6(\Delta x)+(\Delta x)^2$$

$$\therefore \quad \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lt} \{12+6(\Delta x)+(\Delta x)^2\}=12;$$

অর্থাৎ $x=2$ এতে $\Delta y/\Delta x \to 12$, যখন $\Delta x \to 0$.

উদাহরণ 7. $y=3x^2+7$ হইলে, $\dfrac{dy}{dx}$ বাহির কর।

$$\frac{dy}{dx}=\underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\{3(x+\Delta x)^2+7\}-\{3x^2+7\}}{\Delta x}$$

$$=\underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{3\{2x(\Delta x)+(\Delta x)^2\}}{\Delta x}=6x.$$

উদাহরণ 8. প্রাথমিক তত্ত্ব (First principle) হইতে $x=2$ বিন্দুতে $2x^2+3$ এর derivative বাহির কর।

ধরি, $f(x)=2x^2+3$.

$$\therefore \quad f'(2)=\underset{h\to 0}{Lt} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt} \frac{\{2(2+h)^2+3\}-\{2\times 2^2+3\}}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt} (8+2h)=8.$$

উদাহরণ 9. প্রাথমিক তত্ত্ব হইতে $x=\pi/2$ এতে $\sin 2x$ এর derivative বাহির কর।

ধরি $f(x)=\sin 2x$.

$$\therefore \quad f'(\pi/2)=\underset{h\to 0}{Lt} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt} \frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{-\sin 2h-\sin \pi}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\left(\frac{-\sin 2h}{h}\right)$$

$$=-\underset{h\to 0}{Lt}\ (2\cos h)\times\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\sin h}{h}$$

$$=-2\times 1=-2.$$

উদাহরণ 10. প্রাথমিক তত্ত্ব হইতে $x=\pi/4$ এতে $\sec x$ এর derivative বাহির কর।

ধরি, $f(x)=\sec x$.

$$\therefore\ f'(\pi/4)=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\sec\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}{h\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{h}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}$$

$$=\frac{\sin(\pi/4)}{\cos^2(\pi/4)}\times 1=\tan(\pi/4)\sec(\pi/4)=\sqrt{2}.$$

উদাহরণ 11. প্রাথমিক তত্ত্ব হইতে $\sqrt{x}$, $(x>0)$, এর derivative বাহির কর।

$$\frac{d(\sqrt{x})}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h},\ (x>0)$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

উদাহরণ 12. প্রাথমিক তত্ত্ব হইতে $\tan^{-1}x$ এর derivative বাহির কর।

$$\frac{d\tan^{-1}x}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\tan^{-1}(x+h)-\tan^{-1}x}{h}.$$

ধরি, $y=\tan^{-1}x$ এবং $y+k=\tan^{-1}(x+h)$.

তাহা হইলে, $x=\tan y$ এবং $x+h=\tan(y+k)$; এবং $k\to 0$, যখন $h\to 0$.

$$\therefore\ \frac{d\tan^{-1}x}{dx}=\underset{k\to 0}{Lt}\ \frac{y+k-y}{\tan(y+k)-\tan y}$$

$$=\underset{k\to 0}{Lt}\ \frac{k\cos y\cos(y+k)}{\sin k}$$

$$=\underset{k\to 0}{Lt}\ \{\cos y\cos(y+k)\}\times\frac{k}{\sin k}$$

$$=\cos^2 y\times 1=\frac{1}{\sec^2 y}$$

$$=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

উদাহরণ 13. $f'(0)$ এর অস্তিত্ব থাকিলে বাহির কর, যেখানে :

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{যখন } x\geqslant 0\\ 3-2x, & \text{যখন } x<0.\end{cases}$$

এখানে, $Rf'(0)=\underset{h\to 0+}{Lt}\ \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$=\underset{h\to 0+}{Lt}\ \frac{(2h+3)-3}{h}=2\ ;$$

এবং, $Lf'(0)=\underset{h\to 0-}{Lt}\ \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$=\underset{h\to 0-}{Lt}\ \frac{(3-2h)-3}{h}=-2.$$

অতএব, $Rf'(0)\neq Lf'(0)$.

সুতরাং, $f'(0)$ এর অস্তিত্ব নাই।

উদাহরণ 14. $y=x^2-3x+5$ সমীকরণটি যে বক্ররেখাকে সূচিত করে তাহার উপরিস্থ (2, 3) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ বাহির কর ; এবং ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণে নত তাহা নির্ণয় কর।

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,\,3)}=\underset{h\to0}{Lt}\ \frac{\{(2+h)^2-3(2+h)+5\}-\{2^2-3\times2+5\}}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{Lt}\ (1+h)=\mathbf{1}.$$

$$\therefore\ \tan\psi=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,\,3)}=1=\tan(\pi/4)\cdot$$

$\therefore\ \psi=\pi/4$; অর্থাৎ, স্পর্শকটি **45°** কোণে নত।

প্রশ্নমালা 8

1. x এর মান 3 হইতে 3·02 এতে পরিবর্তিত হইলে, Δx এবং Δy এর মান কিরূপ হইবে, যদি $y=x^2+2$ হয় ?

2. x এর মান 3·1 হইতে 3·002 এতে পরিবর্তিত হইলে, δx এবং δy এর মান কত হইবে, যদি $2y=3x+5$ হয় ?

3. t এর মান 2·5 হইতে 2·47 এতে পরিবর্তিত হইলে, δt এবং δs এর মান কত হইবে, যদি $s=2t^2$ হয় ?

4. দেওয়া আছে, $y=x^2+5$; $x=2$ এতে Δx এর মান 0·02 হইলে, Δy এবং $\Delta y/\Delta x$ এর মান বাহির কর।

5. x এর মান -2 হইতে $-1{\cdot}99$ এতে পরিবর্তিত হইলে, δx, δy এবং $\delta y/\delta x$ এর মান নির্দেশ কর, যদি $y=1/x$ হয়।

6. $x=5$ এতে $\Delta x=0{\cdot}02$; $0{\cdot}001$; $-0{\cdot}003$ হইলে, Δy এর অনুরূপ মান নির্ণয় কর, যদি $y=1-2x^2$ হয়।

7. দেওয়া আছে, $y=3-2x$; দেখাও যে, $x=2$ এতে $\Delta y/\Delta x\to-2$, যখন $\Delta x\to0$; (Δx এর মান অন্ততঃ পাঁচটি লইতে হইবে)।

8. দেওয়া আছে, $y=\sin x$, $\Delta x=1°54'\ 35''{\cdot}5$ এবং $\cos 1°54'35''{\cdot}5=0{\cdot}999446$; $x=90°$ এতে Δy এবং $\Delta y/\Delta x$ এর মান কত ?

9. প্রাথমিক তত্ত্ব হইতে নিম্নোক্ত অপেক্ষকগুলির x এর সাপেক্ষে derivative বাহির কর :

(i) x^3+1; (ii) $\frac{1}{x}, (x\neq 0)$; (iii) $\frac{3}{x^2}, (x\neq 0)$;

(iv) $\frac{1}{2\sqrt{x}}, (x>0)$; (v) $\frac{1}{x+1}, (x\neq -1)$;

(vi) $\frac{2}{x}+\frac{x}{2}, (x\neq 0)$; (vii) ax^2+bx+c;

(viii) $\sin x$; (ix) $\sin^{-1}x, (x^2<1)$.

10. দেখাও যে, (প্রাথমিক তত্ত্ব হইতে) :

(i) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}=2,$ যখন $y=x^2+5$;

(ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}=-8,$ যখন $y=3-2x^2$;

(iii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\ 2)}=3,$ যখন $y=1+x^3$;

(iv) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-1}=0,$ যখন $y=x+\frac{1}{x}$;

(v) $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=2}=2,$ যখন $s=t^2-2t-3$;

(vi) $\left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=\pi/2}=-1,$ যখন $u=\cos\theta$;

(vii) $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0.5}=-2/\sqrt{3},$ যখন $s=arc\cos t$;

(viii) $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=\log_e 2,$ যখন $x=2^t$.

11. দেখাও যে, (প্রাথমিক তত্ত্ব হইতে) :

(i) $f'(5)=0,$ যখন $f(x)=100$;

(ii) $f'(2)=10,$ যখন $f(x)=(x+3)^2$;

(iii) $\phi'(0)=0,$ যখন $\phi(t)=t^3+5$;

(iv) $f'(\pi)=2,$ যখন $f(\theta)=\sin 2\theta$;

(v) $\phi'(1)=1/9$, যখন $\phi(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$;

(vi) $f'(-2)=4/25$, যখন $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$;

(vii) $F'(1/2)=-16$, যখন $F(x)=2{\cdot}5+\dfrac{1}{x^2}$;

(viii) $g'(1)=-1$, যখন $g(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$;

(ix) $f'(0)=0$, যখন $f(x)=x^2 \cos\dfrac{1}{x}$, $(x\neq0)$; $f(0)=0$.

12. (*a*) $f(x)=\cos 2x$ হইল, $Rf'(\pi)$ এবং $Lf'(\pi)$ বাহির কর এবং $f'(\pi)$ আছে কিনা নির্দেশ কর।

(*b*) প্রাথমিক তত্ত্ব হইতে $x=\pi/4$ এতে $\sin 2x$ এর derivative নির্ণেয় কর।

[C. U. 1976]

13. $f'(0)$ এর অস্তিত্ব আছে কিনা নির্দেশ কর, যেখানে :

$$f(x)=\begin{cases} 2+x, & \text{যখন } x\geqslant0, \\ 2-x, & \text{যখন } x<0. \end{cases}$$

14. দেখাও যে, $x=1$ এতে $f(x)$ সন্তত; কিন্তু $f'(1)$ এর অস্তিত্ব নাই ; যেখানে

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{যখন } x\geqslant1; \\ 2-x, & \text{যখন } x<1. \end{cases}$$

15. $f'(1)$ এর অস্তিত্ব থাকিলে বাহির কর, যদি

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{যখন } x>1; \\ \frac{1}{2}, & \text{যখন } x=1; \\ x-1, & \text{যখন } x<1. \end{cases}$$

[§ **6-7 দ্রষ্টব্য।**]

16 দেওয়া আছে, $\phi(x)=3+2x$, যখন $-3/2<x\leqslant0$;

$=3-2x$, যখন $0<x<3/2$.

দেখাও যে, $x=0$ এতে $\phi(x)$ সন্তত ; কিন্তু $\phi'(0)$ এর অস্তিত্ব নাই।

17. দেওয়া আছে $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{যখন } 0\leqslant x<\frac{1}{2}; \\ 1, & \text{যখন } x=\frac{1}{2} \\ 2, & \text{যখন } \frac{1}{2}<x\leqslant1. \end{cases}$

দেখাও যে, $x=\frac{1}{2}$ এতে $f(x)$ সন্তত নহে। $f'(\frac{1}{2})$ এর অস্তিত্ব আছে কি ?

18. (a) যদি $f(x) = |x+1|$ হয় তবে, দেখাও যে, $x=-1$ এতে $f(x)$ সন্তত ; কিন্তু $f'(-1)$ এর অস্তিত্ব নাই।

(b) $f(x)=2x+|x|$ এর $x=0$ এতে derivative আছে কিনা তাহা যুক্তির সাহায্যে দেখাও। [C. U. 1977]

19. দেওয়া আছে, $f(x)=x^2+x+1$, যখন $1<x<2$;
$=3x$, যখন $0<x\leqslant1$.

দেখাও যে,] 0, 2 [এতে $f'(x)$ আছে। $x=1$ এতে $f'(x)$ এর মান কত ?

20. $y=2\sqrt{x}+3$ সমীকরণ যে বক্ররেখাকে সূচিত করে তাহার উপরিস্থ $x=3$ বিন্দুতে উহার নতিমাত্রা (gradient) কত ?

21. $y=\sin x$ বক্ররেখার $(0, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতিমাত্রা বাহির কর।

22. $y=\phi(x)$ বক্ররেখার উপরিস্থ $[c, \phi(c)]$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতিমাত্রা $\pi/6$ হইলে, $\phi'(c)$ এর মান কত ?

23. $y=g(x)$ বক্ররেখার উপরিস্থ $P(2, 3)$ বিন্দুতে $g'(x)$ এর মান $\sqrt{3}$; P বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার মান কত ?

24. $y=f(x)$ বক্ররেখার $Q(h, k)$, বিন্দুতে $f'(x)$ এর মান 3 ; Q বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক QT, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণে নত হইলে, θ এর মান কত ?

25. $y=\cot^{-1}x$ বক্ররেখার $L(0, \pi/2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতিমাত্রা বাহির কর।

7-8. Some standard derivatives :

(1) $\dfrac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$; (2) $\dfrac{d}{dx}(e^x)=e^x$;

(3) $\dfrac{d}{dx}(a^x)=a^x \log_e a$; (4) $\dfrac{d}{dx}(\log_e x)=\dfrac{1}{x}$.

প্রমাণ :

(1) $$\frac{d}{dx}(x^n)=\underset{h\to0}{Lt}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\underset{u\to x}{Lt}\frac{u^n-x^n}{u-x};\quad [x+h=u]$$

$=nx^{n-1}$, ($n=$ মূলদ রাশি)।

মন্তব্য : $n-1$ ঋণাত্মক মূলদ রাশি হইলে, $x \neq 0$ হইতে হইবে।

দ্রষ্টব্য : (i) $\frac{d}{dx}(x)=1$; (ii) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(2) $\frac{d}{dx}(e^x)=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$

$$=e^x \times \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{e^h-1}{h}=e^x\times 1=e^x.$$

(3) $\frac{d}{dx}(a^x)=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{a^{x+h}-a^x}{h}$

$$=a^x \times \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x \times \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{e^{h\log_e a}-1}{h},\ (a>0)$$

$$=a^x \log_e a \times \underset{k\to 0}{Lt}\ \frac{e^k-1}{k},\ [k=h\log_e a]$$

$$=a^x \log_e a \times 1=a^x \log_e a.$$

(4) $\frac{d}{dx}(\log_e x)=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{1}{h}\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right),\ (x\neq 0)$$

$$=\frac{1}{x}\times \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{x}{h}\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\times \underset{z\to 0}{Lt}\ \frac{\log_e(1+z)}{z},\ [z=h/x]$$

$$=\frac{1}{x}\times 1=\frac{1}{x}\ ;\ (x\neq 0).$$

দ্রষ্টব্য : $\because\ \log_a x=\log_a e\times \log_e x,$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e.$$

7-9. Some more standard derivatives :

(1) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$; (2) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$;

(3) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$; (4) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$;

(5) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$; (6) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$.

প্রমাণ :

(1) $$\frac{d}{dx}(\sin x) = \underset{h\to0}{Lt} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \underset{h\to0}{Lt} \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}$$

$$= \underset{h\to0}{Lt} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \times \underset{h\to}{Lt} \cos(x+h/2)$$

$$= 1 \times \cos x = \cos x.$$

(2) $$\frac{d}{dx}(\cos x) = \underset{h\to0}{Lt} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \underset{h\to0}{Lt} \frac{2\sin(x+h/2)\sin(-h/2)}{h}$$

$$= -1 \times \underset{h\to0}{Lt} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \times \underset{h\to0}{Lt} \sin(x+h/2)$$

$$= -1 \times 1 \times \sin x = -\sin x.$$

(3) $$\frac{d}{dx}(\tan x) = \underset{h\to0}{Lt} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

$$= \underset{h\to0}{Lt} \frac{\sin h}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$= \underset{h\to0}{Lt} \frac{\sin h}{h} \times \underset{h\to0}{Lt} \frac{1}{\cos x\cos(x+h)}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x ;$$

[$x \neq \frac{1}{2}(2n+1)\pi$, $n = 0$ বা পূর্ণসংখ্যা]

(4) $$\frac{d}{dx}(\cot x) = \underset{h\to 0}{Lt} \frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt} \frac{-\sin h}{h \sin x \sin(x+h)}$$

$$= -1 \times \underset{h\to 0}{Lt} \frac{\sin h}{h} \times \underset{\to 0}{Lt} \frac{1}{\sin x \sin(x+h)}$$

$$= -1 \times 1 \times \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x \;;$$

[$x \neq n\pi$, $n = 0$ বা পূর্ণ সংখ্যা]।

(5) $$\frac{d}{dx}(\sec x) = \underset{h\to 0}{Lt} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h \cos x \cos(x+h)}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt} \frac{2\sin(x+h/2)\sin(h/2)}{h \cos x \cos(x+h)}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt} \frac{\sin(h/2)}{(h/2)} \sin(x+h/2) \cdot \frac{1}{\cos x \cos(x+h)}$$

$$= 1 \times \sin x \times \frac{1}{\cos^2 x} = \sec x \tan x \;;$$

[$x \neq \frac{1}{2}(2n+1)\pi$, $n = 0$ বা পূর্ণসংখ্যা।]

(6) $$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = \underset{h\to 0}{Lt} \frac{\operatorname{cosec}(x+h) - \operatorname{cosec} x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt} \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h \sin x \sin(x+h)}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt} \frac{2\cos(x+h/2)\sin(-h/2)}{h \sin x \sin(x+h)}$$

$$= -1 \times \underset{h\to 0}{Lt} \frac{\sin(h/2)}{(h/2)} \cos(x+h/2) \frac{1}{\sin x \sin(x+h)}$$

$$= -1 \times 1 \times \cos x \times \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= -\operatorname{cosec} x \cot x \;;$$ [$x \neq n\pi$, $n = 0$ বা পূর্ণসংখ্যা।]

দ্রষ্টব্য : (3)—(6) পর্যন্ত প্রতিক্ষেত্রে $n = 0$ অথবা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

7-10. $\frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}.$

মনে করি, $y=f(x)$, যেখানে $[a, b]$ এতে $f(x)$ সন্তত এবং strictly monotonic increasing বা strictly monotonic decreasing. $x=c$ এতে Δx এবং Δy যথাক্রমে x এবং y এর পরিবর্তন, $(a<c<b)$; এখানে, $\Delta x\neq 0$, $\Delta y\neq 0$; এবং $\Delta y\to 0$ যখন $\Delta x\to 0$.

যেহেতু, $\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}=1$, $\quad\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=1\Big/\frac{\Delta x}{\Delta y}.$

$$\therefore\ \underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta y\to 0}{Lt}\ 1\Big/\frac{\Delta x}{\Delta y};$$

বা, $\frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}.$

7-11. Some more standard derivatives :

(1) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (2) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$; (4) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=\frac{-1}{1+x^2}$;

(5) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; (6) $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

প্রমাণ :

(1) এখানে, $y=\sin^{-1}x$, $[\,|x|\leqslant 1\,]$. $\quad\therefore\ x=\sin y.$

$$\therefore\ \frac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad [\,|x|<1\,].$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sin^{-1}(x+h)-\sin^{-1}x}{h}.$$

ধরি, $y=\sin^{-1}x$; $\quad y+k=\sin^{-1}(x+h).$

$\therefore\ x=\sin y$; $\ x+h=\sin(y+k)$; $\ k\to 0$ যখন $h\to 0$.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \underset{k\to 0}{Lt} \frac{k}{\sin(y+k) - \sin y}$$

$$= \underset{k\to 0}{Lt} \frac{k}{2\cos(y+k/2)\sin(k/2)}$$

$$= \underset{k\to 0}{Lt} \frac{k/2}{\sin(k/2)} \cdot \frac{1}{\cos(y+k/2)}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad [\,|x|<1\,].$$

(2) এখানে, $y = \cos^{-1}x$, $[\,|x| < 1\,]$. $\therefore$ $x = \cos y$.

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dy} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad [\,|x| < 1\,].$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \underset{h\to 0}{Lt} \frac{\cos^{-1}(x+h) - \cos^{-1}x}{h}.$$

ধরি, $y = \cos^{-1}x$; $y+k = \cos^{-1}(x+h)$.

$\therefore$ $x = \cos y$; $x+h = \cos(y+k)$; $k\to 0$ যখন $h \to 0$.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \underset{k\to 0}{Lt} \frac{k}{\cos(y+k) - \cos y}$$

$$= \underset{k\to 0}{Lt} \frac{k}{2\sin(y+k/2)\sin(-k/2)}$$

$$= -1 \times \underset{k\to 0}{Lt} \frac{k/2}{\sin(k/2)} \cdot \frac{1}{\sin(y+k/2)}$$

$$= -1 \times 1 \times \frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad [\,|x| < 1].$$

(3) এখানে, $y = \tan^{-1}x$, $[-\infty < x < \infty]$. $\therefore$ $x = \tan y$.

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + x^2.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+x^2}, \quad [-\infty < x < \infty].$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\tan^{-1}(x+h)-\tan^{-1}x}{h}.$$

ধরি, $y=\tan^{-1}x$; $y+k=\tan^{-1}(x+h)$.

$\therefore$ $x=\tan y$; $x+h=\tan(y+k)$; $k\to 0$ যখন $h\to 0$.

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \underset{k\to 0}{Lt}\ \frac{k}{\tan(y+k)-\tan y}$$

$$= \underset{k\to 0}{Lt}\ \frac{k\cos y\cos(y+k)}{\sin k}$$

$$= \underset{k\to 0}{Lt}\ \frac{k}{\sin k}\cdot\cos y\cos(y+k)$$

$$= 1\times\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+x^2},\ [-\infty<x<\infty].$$

(4) এখানে, $y=\cot^{-1}x$, $[-\infty<x<\infty]$. $\therefore$ $x=\cot y$.

$$\therefore\ \frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosec}^2 y = -(1+x^2).$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = 1\bigg/\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{1+x^2},\ [-\infty<x<\infty].$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\cot^{-1}(x+h)-\cot^{-1}x}{h}.$$

ধরি, $y=\cot^{-1}x$; $y+k=\cot^{-1}(x+h)$.

$\therefore$ $x=\cot y$; $x+h=\cot(y+k)$; $k\to 0$ যখন $h\to 0$.

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \underset{k\to 0}{Lt}\ \frac{k}{\cot(y+k)-\cot y}$$

$$= \underset{k\to 0}{Lt}\ \frac{k\sin y\sin(y+k)}{-\sin k}$$

$$= -1\times\underset{k\to 0}{Lt}\left\{\frac{k}{\sin k}\cdot\sin y\sin(y+k)\right\}$$

$$= -1\times 1\times\sin^2 y$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{cosec}^2 y} = \frac{-1}{1+x^2},\ [-\infty<x<\infty].$$

(5) এখানে $y=\sec^{-1}x$, $[\,|x|\geqslant 1]$. $\therefore\ x=\sec y$.

$$\therefore\ \frac{dx}{dy}=\sec y\tan y=x\sqrt{x^2-1}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\quad [\,|x|>1].$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\sec^{-1}(x+h)-\sec^{-1}x}{h}.$$

ধরি, $y=\sec^{-1}x$; $y+k=\sec^{-1}(x+h)$.

$\therefore\ x=\sec y$; $x+h=\sec(y+k)$; $k\to 0$ যখন $h\to 0$.

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\underset{k\to 0}{Lt}\ \frac{k}{\sec(y+k)-\sec y}$$

$$=\underset{k\to 0}{Lt}\ \frac{k\cos y\cos(y+k)}{\cos y-\cos(y+k)}$$

$$=\underset{k\to 0}{Lt}\ \frac{k\cos y\cos(y+k)}{2\sin(y+k/2)\sin(k/2)}$$

$$=\underset{k\to 0}{Lt}\ \frac{k/2}{\sin(k/2)}\cdot\frac{\cos y\cos(y+k)}{\sin(y+k/2)}$$

$$=1\times\frac{\cos^2 y}{\sin y}=\frac{1}{\sec y\tan y}$$

$$=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\quad [\,|x|>1].$$

(6) এখানে, $y=\operatorname{cosec}^{-1}x$, $[\,|x|\geqslant 1]$. $\therefore\ x=\operatorname{cosec} y$.

$$\therefore\ \frac{dx}{dy}=-\operatorname{cosec} y\cot y=-x\sqrt{x^2-1}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}},\quad [\,|x|>1].$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x)=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\operatorname{cosec}^{-1}(x+h)-\operatorname{cosec}^{-1}x}{h}.$$

ধরি, $y=\operatorname{cosec}^{-1}x$; $y+k=\operatorname{cosec}^{-1}(x+h)$.

$\therefore$ $x=\operatorname{cosec} y$; $x+h=\operatorname{cosec}(y+k)$; $k\to 0$ যখন $h\to 0$.

$$\therefore \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x)=\underset{k\to 0}{Lt}\frac{k}{\operatorname{cosec}(y+k)-\operatorname{cosec} y}$$

$$=\underset{k\to 0}{Lt}\frac{k\sin y\sin(y+k)}{\sin y-\sin(y+k)}$$

$$=\underset{k\to 0}{Lt}\frac{k\sin y\sin(y+k)}{2\cos(y+k/2)\sin(-k/2)}$$

$$=-1\times\underset{k\to 0}{Lt}\frac{k/2}{\sin(k/2)}\cdot\frac{\sin y\sin(y+k)}{\cos(y+k/2)}$$

$$=-1\times 1\times\frac{\sin^2 y}{\cos y}=\frac{-1}{\operatorname{cosec} y\cot y}$$

$$=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}},\quad [\,|x|>1].$$

7-12 Important Formulae :

(1) $\frac{d}{dx}(c)=0$; (2) $\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}$;

(3) $\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$; (4) $\frac{d}{dx}(u-v)=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$;

(5) $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$; (6) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\dfrac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$.

$=(uv)\left\{\frac{1}{u}\frac{du}{dx}+\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}\right\}$ $\quad=\left(\frac{u}{v}\right)\left\{\frac{1}{u}\frac{du}{dx}-\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}\right\}$

প্রমাণ ঃ

(1) $c=$একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক হইলে, $\frac{d}{dx}(c)=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{c-c}{h}=0$.

দৃষ্টান্ত ঃ $\frac{d}{dx}(5)=0$; $\frac{d}{dx}(3/2)=0$.

(2) $c=$একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক হইলে এবং $\frac{du}{dx}$ থাকিলে,

$$\frac{d}{dx}(cu)=\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{c(u+\Delta u)-cu}{\Delta x}$$

$$=c\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\Delta u}{\Delta x}=c\frac{du}{dx}.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

ধরি, $u=f(x)$.

$$\therefore \frac{d}{dx}(cu)=\frac{d}{dx}\{cf(x)\}=\underset{h\to0}{Lt}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$=c\times\underset{h\to0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=cf'(x)=c\frac{du}{dx}.$$

দৃষ্টান্ত : $\frac{d}{dx}(3\tan x)=3\frac{d}{dx}(\tan x)=3\sec^2 x.$

(3) মনে করি, $\frac{du}{dx}$ এবং $\frac{dv}{dx}$ এর অস্তিত্ব আছে।

$$\therefore \frac{d}{dx}(u+v)=\underset{\Delta x\to0}{Lt}\frac{(u+\Delta u+v+\Delta v)-(u+v)}{\Delta x}$$

$$=\underset{\Delta x\to0}{Lt}\left\{\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right\}$$

$$=\underset{\Delta x\to0}{Lt}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\underset{\Delta x\to0}{Lt}\frac{\Delta v}{\Delta u}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

ধরি, $u=f(x)$ এবং $v=\phi(x)$.

$$\therefore \frac{d}{dx}(u+v)=\frac{d}{dx}\{f(x)+\phi(x)\}$$

$$=\underset{h\to0}{Lt}\frac{\{f(x+h)+\phi(x+h\}-\{f(x)+\phi(x)\}}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\underset{h\to0}{Lt}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$$

$$=f'(x)+\phi'(x)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$$

দৃষ্টান্ত : $\frac{d}{dx}(x^2+\sin x)=\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(\sin x)=2x+\cos x.$

(4) $$\frac{d}{dx}(u-v)=\underset{\Delta x\to0}{Lt}\frac{\{(u+\Delta u)-(v+\Delta v)\}-(u-v)}{\Delta x}$$

$$=\underset{\Delta x\to0}{Lt}\frac{\Delta u}{\Delta x}-\underset{\Delta x\to0}{Lt}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx};$$ যদি $\frac{du}{dx}$ এবং $\frac{dv}{dx}$ থাকে।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

ধরি, $u=f(x)$ এবং $v=\phi(x)$.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(u-v)=\frac{d}{dx}\{f(x)-\phi(x)\}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\{f(x+h)-\phi(x+h)\}-\{f(x)-\phi(x)\}}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$$

$$=f'(x)-\phi'(x)=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}.$$

দৃষ্টান্ত ঃ $\frac{d}{dx}(e^x-\tan x)=\frac{d}{dx}(e^x)-\frac{d}{dx}(\tan x)=e^x-\sec^2 x.$

(5) মনে করি, $\frac{du}{dx}$ এবং $\frac{dv}{dx}$ সসীম; যেখানে u এবং v উভয়েই x এর অপেক্ষক। তাহা হইলে, u এবং v সন্তত এবং $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$ যখন $\Delta x\to 0$.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(uv)=\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x}$$

$$=\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\left[u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x\right],\ [\Delta x\neq 0,]$$

$$=u\frac{dv}{du}+v\frac{du}{dx}+\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}\times 0$$

$$=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

ধরি, $u=f(x)$ এবং $v=\phi(x)$.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(uv)=\frac{d}{dx}\{f(x)\,\phi(x)\}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(x+h)\phi(x+h)-f(x)\phi(x)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}f(x+h)\cdot\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}+\underset{h\to 0}{Lt}\phi(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)\phi'(x) + \phi(x)f'(x)$$
$$= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$
$$= (uv)\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}\right).$$

দৃষ্টান্ত : $\frac{d}{dx}(e^x \sin x) = e^x \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx} e^x$
$$= e^x \cos x + (\sin x)\, e^x$$
$$= e^x (\sin x + \cos x).$$

মন্তব্য : অনুরূপভাবে দেখানো যাইবে :

$$\frac{d}{dx}(uvw \cdots\cdots) = (uvw\cdots)\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \cdots\right).$$

(6) ধরি, u, v উভয়েই x এর অপেক্ষক ; $\frac{du}{dx}$ এবং $\frac{dv}{dx}$ সসীম। সুতরাং $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$.

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x. v.(v+\Delta v)}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v + \frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x\right)}$$

$$= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v\left(v + \frac{dv}{dx}\times 0\right)} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}, \ (v \neq 0)$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

ধরি, $u = f(x)$ এবং $v = \phi(x)$.

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{\phi(x)}\right\} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\frac{f(x+h)}{\phi(x+h)} - \frac{f(x)}{\phi(x)}}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{1}{\phi(x)\phi(x+h)}\left\{\phi(x).\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x).\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}\right\}$$

$$= \frac{1}{\phi(x)\phi(x)} \cdot \{\phi(x)f'(x) - f(x)\phi'(x)\} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

$$= \frac{u}{v}\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}\right).$$

দৃষ্টান্ত : $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \frac{x^2\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\,\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$

$$= \frac{x^2 \cos x - (\sin x)\,2x}{x^4} = (x\cos x - 2\sin x)/x^3.$$

মন্তব্য : অনুরূপ ভাবে, দেখানো যাইবে,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{uv\cdots}{pq\cdots}\right) = \left(\frac{uv\cdots}{pq\cdots}\right)\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \cdots - \frac{1}{p}\frac{dp}{dx} - \frac{1}{q}\frac{dq}{dx} - \cdots\right).$$

7-13. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. x এর সাপেক্ষে derivative নির্ণয় কর :

(i) $2x\sqrt{x} + 3\tan x$, (ii) $(3x-2)(3+2x)+2$,

(iii) $5^x + x^5 + 5$, (iv) $\sec x - e^{2\log x} + \sqrt[3]{x^2}$.

(i) $\frac{d}{dx}(2x\sqrt{x} + 3\tan x) = \frac{d}{dx}(2x^{\frac{3}{2}} + 3\tan x)$

$$= \frac{d}{dx}(2x^{\frac{3}{2}}) + \frac{d}{dx}(3\tan x) = 2\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt{x} + 3\sec^2 x$$

$$= 3(\sqrt{x} + \sec^2 x).$$

(ii) $(3x-2)(3+2x)+2 = 6x^2 + 5x - 4.$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{(3x-2)(3+2x)+2\} = \frac{d}{dx}\{6x^2 + 5x - 4\}$$

$$= 12x + 5 - 0 = 12x + 5.$$

(iii) $\frac{d}{dx}(5^x + x^5 + 5) = 5^x \log_e 5 + 5x^4 + 0$

$$= 5^x \log_e 5 + 5x^4.$$

(iv) $\frac{d}{dx}(\sec x - e^{2\log x} + \sqrt[3]{x^2}) = \frac{d}{dx}(\sec x - x^2 + x^{2/3})$

$$= \frac{d}{dx}(\sec x) - \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \sec x\tan x - 2x + \frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

উদাহরণ 2. x এর সাপেক্ষে derivative বাহির কর :

(i) $x^3 \log x$, (ii) $2^x \sin x$, (iii) $(x^2+2) \operatorname{cosec} x$.

(i) $$\frac{d}{dx}(x^3 \log x) = x^3 \times \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \times \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= x^3 \times \frac{1}{x} + (\log x) \times 3x^2 = x^2 + 3x^2 \log x.$$

(ii) $$\frac{d}{dx}(2^x \sin x) = 2^x \frac{d}{dx}(\sin x) + (\sin x) \times \frac{d}{dx}(2^x)$$

$$= 2^x \cos x + \sin x\, (2^x \log_e 2).$$

(iii) $$\frac{d}{dx}\{(x^2+2) \operatorname{cosec} x\} = (x^2+2)\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) + \operatorname{cosec} x \frac{d}{dx}(x^2+2)$$

$$= (x^2+2)(-\operatorname{cosec} x \cot x) + \operatorname{cosec} x \times (2x+0)$$

$$= -(x^2+2) \operatorname{cosec} x \cot x + 2x \operatorname{cosec} x.$$

উদাহরণ 3. x এর সাপেক্ষে derivative নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{1+x^2}{1+x}$, (ii) $\dfrac{\sin x}{\log x}$, (iii) $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$.

(i) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right) = \frac{(1+x)\frac{d}{dx}(1+x^2) - (1+x^2)\frac{d}{dx}(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1+x)(2x) - (1+x^2)(1)}{(1+x)^2} = 1 - \frac{2}{(1+x)^2}.$$

(ii) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\log x}\right) = \frac{\log x \times \cos x - \sin x \times \frac{1}{x}}{(\log x)^2}.$$

(iii) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) = \frac{(1+\sin x)(-\cos x) - (1-\sin x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}.$$

উদাহরণ 4. দেখাও যে, $x=2$ এতে $\frac{dy}{dx}=2\frac{3}{4}$,

যখন $y=\sqrt{2x}-\sqrt{\frac{2}{x}}+\frac{x+4}{4-x}$.

এখানে, $y=\sqrt{2}.\sqrt{x}-\sqrt{2}.x^{-1/2}+\frac{4+x}{4-x}$.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\sqrt{2}.\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)+\frac{(4-x)+(4+x)}{(4-x)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{8}{(4-x)^2}.$$

$$\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{8}{4}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+2=2\frac{3}{4}.$$

উদাহরণ 5. $\phi(x)=\frac{ax^2+bx+4c}{ax+b}$ হইলে দেখাও যে

$$\phi'(b/a)=(b^2-ac)/b^2.$$

$$\phi'(x)=\frac{(ax+b)(2ax+b)-(ax^2+bx+4c)a}{(ax+b)^2}$$

$$=\frac{a^2x^2+2abx+b^2-4ac}{(ax+b)^2}$$

$$\therefore\ \phi'(b/a)=\frac{b^2+2b^2+b^2-4ac}{4b^2}=(b^2-ac)/b^2.$$

উদাহরণ 6. $5y=2x^3-3x^2-12x+1$ বক্ররেখার যে যে বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তাহাদের ভুজ বাহির কর।

$5y=2x^3-3x^2-12x+1$ হইতে পাই,

$$5\frac{dy}{dx}=6(x^2-x-2)=6\,(x-2)(x+1).$$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=0$, যখন $x=2, -1$. $\therefore$ নির্ণেয় উত্তর $x=2, -1$.

প্রশ্নমালা 9

x এর সাপেক্ষে derivative নির্ণয় কর (1 to 3):

1. (i) $3x^4+2x$; (ii) $x\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$; (iii) $\frac{2}{x}-\cot x$;

(iv) $4x^{-\frac{3}{4}}+3x+5$; (v) $(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2+a$;

(vi) $\frac{5}{x^2}-\cos x+2e^x$; (vii) $\sqrt[3]{x}-3\cos x+\tan^{-1}x$;

(viii) $2\log x+3\sin^{-1}x+2^x$; (ix) $10^x+x^{10}+e^{\log_e x}$;

(x) $\log_{10}x+e^{1+x}$; (xi) $\frac{1}{2}\cot x-\sec^{-1}x+2^x$;

2. (i) $(2x-5)(5+3x)$; (ii) $x^2\log_e x$; (iii) $e^x\cos^{-1}x$;

(iv) $3^x\cot x$; (v) $10^x x^{10}$; (vi) $\sec x\tan x$;

(vii) $x\,e^x\log_e x$; (viii) $(x^2+3)\tan^{-1}x$; (ix) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$;

[C. U. 1958]

(x) $x\sin x+e^x\cot x$; (xi) $\sqrt{x}\cdot 10^x\cdot\log_e x$.

3. (i) $\frac{1}{2x^2+1}$; (ii) $\frac{\sin x}{x}$; (iii) $\frac{x^4}{\sin x}$;

(iv) $\frac{1+x}{1-x}$; (v) $\frac{x}{e^x-1}$; (vi) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$;

(vii) $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; (viii) $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$; (ix) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$;

(x) $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$; (xi) $\frac{\cot x+\operatorname{cosec} x}{\cot x-\operatorname{cosec} x}$; (xii) $\frac{\cot^{-1}x}{1+x^2}$;

(xiii) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$; (xiv) $\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$; (xv) $\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}$.

4. দেখাও যে,

(i) $x\frac{dy}{dx}+2=2y$, যখন $y=1-x^2$;

(ii) $2\frac{dy}{dx}-y^2=1$, যখন $y=\sec x+\tan x$;

(iii) $2xy\frac{dy}{dx}+y^2=2(1+x)$, যখন $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$;

(iv) $\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$, যখন $y=\frac{\sec x+\tan x}{\sec x-\tan x}$.

5. দেখাও যে,

(i) $f'(0)=1$, যখন $f(x)=e^{x}\cdot\sin x$;

(ii) $\phi'(2)=\sqrt{6}/8$, যখন $\phi(x)=\sqrt{(3x)}+\sqrt{\frac{3}{x}}$;

(iii) $f'(\pi/2)=2$, যখন $f(x)=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$;

(iv) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,\,0)}=1$, যখন $y=\frac{x+\sin x}{1+\cos x}$;

(v) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}=\frac{4}{81}$, যখন $y=\frac{x^2+4x-3}{(2x+5)^2}$.

6. $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$ সূত্রটি স্থাপন কর এবং $\tan x$ কে $\sec x \sin x$ আকারে লিখিয়া দেখাও যে, $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$.

7. $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\sec x$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{dy}{dx}=0$ যখন $x=\pi/4$.

8. $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}$ বক্ররেখার যে যে বিন্দুতে উহার স্পর্শক x-অক্ষের সহিত $45°$ কোণে নত তাহা নির্ণয় কর।

9. $3y=x^2-2x+4$ বক্ররেখার উপর $P(1, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতিমাত্রা বাহির কর।

10. $5y=x^3-6x^2+9x+11$ বক্ররেখার যে যে বিন্দুতে স্পর্শক y-অক্ষের উপরে লম্ব তাহাদের ভুজ বাহির কর। স্পর্শবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক কি কি ?

11. $y=x^3-6x^2+12x+6$ বক্ররেখার $x=2$ এতে নতিমাত্রা কত ? ঐ বক্ররেখার যে যে বিন্দুতে নতিমাত্রা 3 তাহাদের কোটি বাহির কর।

12. $f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ হইলে, x এর কোন্ কোন্ মানের জন্য $f'(x)=0$?

13. $\phi(x)=\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}$ হইলে, x এর কোন্ কোন্ বাস্তব মানের জন্য $\frac{1}{\phi'(x)}=0$?

14. দেওয়া আছে,

$$f(x)=\begin{cases} 2+x, \text{ যখন } x<0, \\ 2, \text{ যখন } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1+x^2, \text{ যখন } x>1. \end{cases}$$

x এর কোন্ কোন্ মানের জন্য $f'(x)$ নাই ?

15. দেওয়া আছে,

$\phi(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $(x\neq 0)$ এবং $\phi(0)=0$. দেখাও যে, x এর সকল মানের জন্য $\phi'(x)$ আছে।

7-14. Differential of a function :

মনে করি, $y=f(x)$, যেখানে $[a, b]$ এতে $f(x)$ সসীম এবং $x=c$ এতে Δx এবং Δy যথাক্রমে x ও y এর পরিবর্তন, $a<c<b$.

যদি এখানে Δy কে $\Delta y=A\Delta x+\epsilon\Delta x$ ... (1)

আকারে প্রকাশ করা সম্ভব হয়, যেখানে A হইবে Δx নিরপেক্ষ এবং $\epsilon\to 0$ যখন $\Delta x\to 0$, তাহা হইলে, $x=c$ এতে $f(x)$ বা y **differentiable** হইবে এবং তখন $A\Delta x$ কে x এতে y (বা $f(x)$) এর **differential** বলা হইবে এবং ইহাকে dy দ্বারা সূচিত করা হইবে ; অর্থাৎ,

$$dy=A\Delta x. \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

এখন, (1) হইতে পাই, $\Delta y/\Delta x=A+\epsilon$; ($\epsilon\to 0$ যখন $\Delta x\to 0$) ;

অর্থাৎ, $\displaystyle\mathop{Lt}_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$; বা, $f'(x)=A$.

$$\therefore\ dy=f'(x)\ \Delta x. \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

সে সমস্ত অপেক্ষক **differentiable** তাহাদের জন্য (3) সর্বদা প্রযোজ্য। ধরা যাক্, $f(x)=x$; অর্থাৎ, $y=x$. এইরূপক্ষেত্রে $f'(x)=1$. সুতরাং, তখন (3) হইতে পাই :

$$dy=1.\Delta x\ ; \quad \text{বা,} \quad dx=\Delta x\ ; \quad \dots \quad (4)$$

অর্থাৎ, স্বাধীন চলরাশির **differential** এবং **increment** সমান।

তাহা হইলে, (3) এবং (4) হইতে পাই,

$$\mathbf{dy=f'(x).dx.} \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

সুতরাং, (5) হইতে পাই, $\mathbf{f'(x)=dy/dx}$ ... ... (6)

অর্থাৎ, যখন **derivative** বর্তমান, তখন **differentials** এর অনুপাতই **derivative.** আবার, (5) হইতে দেখা যায়, dx এর **coefficient,** $f'(x)$. সেইজন্য, **derivative** কে **differential coefficient** বলা হয়।

মন্তব্য : $x=c$ এতে $f(x)$ **differentiable** হইলে, $f'(c)$ সসীম হইবে; এবং বিপরীতক্রমে, $f'(c)$ সসীম হইলে $x=c$ এতে $f(x)$ **differentiable** হইবে।

দৃষ্টান্ত 1. x^3+2 এর **differential** বাহির কর।

ধরি, $y=x^3+2$. $\quad \therefore \ \dfrac{dy}{dx}=3x^2$.

$$\therefore \ dy=\frac{dy}{dx}\cdot dx=3x^2dx.$$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $3x^2\,dx$.

দৃষ্টান্ত 2. $y=\tan x$ হইলে, $x=\pi/4$ এতে dy বাহির কর, যখন $dx=0{\cdot}017$.

এখানে, $y=\tan x$. $\quad \therefore \ dy=\sec^2 x\,dx$.

$\therefore$ $x=\pi/4$ এতে $dx=0{\cdot}017$ হইলে,

$dy=(\sec^2\pi/4)\times 0{\cdot}017=2\times 0{\cdot}017=0{\cdot}034$.

7-15. Derivative of a function of a function :

মনে করি, $y=f(u)$ এবং $u=\phi(x)$, যেখানে $x=c$ এতে $\phi(x)$ differentiable এবং $u=\phi(c)$ এতে $f(u)$ differentiable.

তাহা হইলে, $du=\phi'(x)dx$; এবং $dy=f'(u)du$.

$\therefore \ dy=f'(u)\cdot\phi'(x)\cdot dx$, বা, $dy/dx=f'(u)\cdot\phi'(x)$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}.$$

দ্রষ্টব্য : $y=f(v)$; $v=\phi(u)$; $u=g(x)$ হইলে, (যেখানে y, v, u differentiable), অনুরূপভাবে, আমরা পাই :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\times\frac{dv}{du}\times\frac{du}{dx}; \quad \text{ইত্যাদি।}$$

দৃষ্টান্ত 1. $y=\sqrt{\sin x}$. ধরি, $y=\sqrt{u}$; $u=\sin x$.

$$\therefore \ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

দৃষ্টান্ত 2. $y=\log \tan^{-1}x$. ধরি, $y=\log u$; $u=\tan^{-1}x$.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}.$$

দৃষ্টান্ত 3. $y=e^{\tan^{-1}(\sqrt{x})}$.

ধরি, $y=e^v$; $v=\tan^{-1}u$; $u=\sqrt{x}$.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\times\frac{dv}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$=e^v\cdot\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=e^{\tan^{-1}(\sqrt{x})}\cdot\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

7-16. Some standard derivatives :

(1) $\frac{d}{dx}(e^{mx})=me^{mx}$; (2) $\frac{d}{dx}(\sin mx)=m\cos mx$;

(3) $\frac{d}{dx}(\cos mx)=-m\sin mx$; (4) $\frac{d}{dx}(\tan mx)=m\sec^2 mx$.

[প্রমাণ ছাত্রেরা নিজে নিজে করিবে]।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

$x^n=e^{n\log_e x}$, (n= নির্দিষ্ট বাস্তব রাশি এবং x এর যে যে মানের জন্য ইহার অস্তিত্ব আছে, তাহা গৃহীত)।

$$\therefore \frac{d(x^n)}{dx}=\frac{d}{dx}(e^{n\log_e x})=e^{n\log_e x}\times\frac{n}{x}.$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$.

7-17. প্যারামেট্রিক (parametric) আকারে প্রদত্ত সমীকরণ হইতে derivative নির্ণয় :

$x^2+y^2=a^2$ সমীকরণ, ($x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$) এর সমতুল্য। সেইরূপ, $y^2=4ax$ সমীকরণ, ($x=at^2$, $y=2at$) এর সমতুল্য ; এবং $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ সমীকরণ, ($x=a\cos\phi$, $y=b\sin\phi$) এর সমতুল্য।

মনে করি, প্যারামেট্রিক আকারে একটি বক্ররেখার সমীকরণ : $x=\phi(t)$ এবং $y=\psi(t)$, যেখানে $\phi(t)$ ও $\psi(t)$, $t=\alpha$ এতে differentiable.[1] তাহা হইলে, $dy=\psi'(t)\,dt$; এবং $dx=\phi'(t)\,dt$.

$$\therefore \quad dy/dx=\psi'(t)/\phi'(t)\ ;$$

$$\text{বা,}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

দৃষ্টান্ত 1. $x=at^2$; $y=2at$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2a}{2at}=\frac{1}{t},\ (t\neq 0)$$

দৃষ্টান্ত 2. $x=a\cos\phi$; $y=b\sin\phi$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}}=\frac{b\cos\phi}{-a\sin\phi}=-\frac{b}{a}\cot\phi\ .$$

দৃষ্টান্ত 3. $x=\sin^2\theta$; $y=\tan\theta$.

$$\therefore \quad dx=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta\ ;\ dy=\sec^2\theta\,d\theta.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{2\sin\theta\cos\theta\,d\theta}=\tfrac{1}{2}\sec^3\theta\operatorname{cosec}\theta.$$

7-18. Derivative of Implicit functions :

মনে করি, $y^2=4x$. সুতরাং, $y=\pm 2\sqrt{x}$.

এখন, $y=+2\sqrt{x}$ হইলে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{2}{y}$.

আবার, $y=-2\sqrt{x}$ হইলে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-1}{\sqrt{x}}=\dfrac{2}{y}$.

সুতরাং, $y=\pm 2\sqrt{x}$, অর্থাৎ, $y^2=4x$ হইলে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$.

আবার, $y^2=4x$ হইতে y কে x এর অপেক্ষক হিসাবে পাই। সুতরাং $y^2=4x$ এর উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই :

$$2y\frac{dy}{dx}=4\ ;\quad \text{অর্থাৎ,}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}.$$

সুতরাং, সাধারণভাবে, $f(x, y)=0$ এর সাহায্যে y, x এর অপেক্ষক হইবে। অতএব, $f(x, y)=0$ এতে y, x এর অপেক্ষক হইবে ; এবং তখন, $f(x, y)=0$ কে x এর সাপেক্ষে অবকলন করিলে সহজেই $\frac{dy}{dx}$ পাওয়া যাইবে।

দৃষ্টান্ত 1. $x^4+x^2y^2+y^4=4.$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$4x^3+2x.y^2+x^2.2y\frac{dy}{dx}+4y^3\frac{dy}{dx}=0\ ;$$

বা, $(x^2y+2y^3)\frac{dy}{dx}=-(2x^3+xy^2)$;

বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{-(2x^2+y^2)x}{(x^2+2y^2)y}.$

7-19. Logarithmic Differentiation :

মনে করি, $y=\{f(x)\}^{\phi(x)}$. $\therefore\ \log_e y=\phi(x)\log_e f(x).$

ইহার উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\phi'(x)\log_e f(x)+\frac{\phi(x)}{f(x)}\times f'(x).$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\{f(x)\}^{\phi(x)}\times\left[\phi'(x)\log_e f(x)+\frac{\phi(x)}{f(x)}\times f'(x)\right].$$

দৃষ্টান্ত 1. x এর সাপেক্ষে $(\sin x)^x$ এর derivative বাহির কর।

ধরি, $y=(\sin x)^x$. $\therefore\ \log_e y=x\log_e\sin x.$

$$\therefore\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1\times\log_e\sin x+x\times\frac{1}{\sin x}\times\cos x\ ;$$

বা, $\frac{dy}{dx}=(\sin x)^x\{\log\sin x+x\cot x\}.$

7-20. একটি অপেক্ষকের সাপেক্ষে অপর একটি অপেক্ষকের derivative :

মনে করি, $\phi(x)$ এর সাপেক্ষে $f(x)$ এর derivative বাহির করিতে হইবে।

ধরি, $y=f(x)$ এবং $z=\phi(x)$; তাহা হইলে, $\frac{dy}{dz}$ বাহির করিতে হইবে।

এখন, $\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dz}=\frac{f'(x)}{\phi'(x)}.$

দৃষ্টান্ত 1. $\sin x$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}x$ এর derivative বাহির কর।

ধরি, $y=\tan^{-1}x$: $z=\sin x$.

$$\therefore \frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\Big/\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2}\Big/(\cos x)=\frac{1}{(1+x^2)\cos x}.$$

7·21. (a) Some more standard derivatives :

(1) $\frac{d}{dx}(\sinh x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x.$

(2) $\frac{d}{dx}(\cosh x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x.$

(3) $\frac{d}{dx}(\tanh x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=\text{sech}^2 x.$

(4) $\frac{d}{dx}(\coth x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)=\frac{\sinh^2 x-\cosh^2 x}{\sinh^2 x}=-\text{cosech}^2 x.$

(5) $\frac{d}{dx}(\text{sech}\ x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cosh x}\right)=\frac{-\sinh x}{\cosh^2 x}=-\text{sech}\ x\tanh x.$

(6) $\frac{d}{dx}(\text{cosech}\ x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sinh x}\right)=\frac{-\cosh x}{\sinh^2 x}=-\text{cosech}\ x\coth x.$

(b)

(i) $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; (ii) $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

(iii) $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x)=\frac{1}{1-x^2}$; (iv) $\frac{d}{dx}(\coth^{-1}x)=\frac{1}{1-x^2}$;

(v) $\frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1}x)=\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$; (vi) $\frac{d}{dx}(\text{cosech}^{-1}x)=\frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

দ্রষ্টব্য :

$\sinh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$; $\cosh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2-1})$, $(x^2>1)$;

$\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$, $(x^2<1)$; $\coth^{-1}x=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$, $(x^2>1)$;

$\text{sech}^{-1}x=\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, $(x^2\leq 1)$; $\text{cosech}^{-1}x=\log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$.

[Hints : (i) $y=\sinh^{-1}x$. $\therefore\ x=\sinh y$.

$$\therefore\ \frac{dx}{dy}=\cosh y=\sqrt{1+\sinh^2 y}=\sqrt{1+x^2}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

অন্যভাবে, যেহেতু, $\sinh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$,

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\times\left\{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

এইভাবে অপর অপেক্ষকগুলির derivative বাহির করা যাইবে।]

7-22. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. x এর সাপেক্ষে derivative বাহির কর :

(i) $\sin\log(\sec x)$; **(ii)** $e^{\sin^{-1}(\sqrt{x})}$; **(iii)** $\log(x+\sqrt{x^2-1})$.

(i) ধরি, $y=\sin\log(\sec x)=\sin v$;

$v=\log u$; $u=\sec x$.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\times\frac{dv}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$=\cos v\times\frac{1}{u}\times\sec x\tan x$$

$$=\{\cos\log(\sec x)\}\tan x.$$

(ii) ধরি, $y=e^{\sin^{-1}(\sqrt{x})}=e^v$;

$v=\sin^{-1}u$; $u=\sqrt{x}$.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\times\frac{dv}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$=e^v\times\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=e^{\sin^{-1}(\sqrt{x})}.\frac{1}{2\sqrt{(1-x)}\sqrt{x}}.$$

(iii) $y=\log(x+\sqrt{x^2-1})$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\times\left\{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

উদাহরণ 2. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর, যখন :

(i) $x=a(\theta-\sin\theta)$; $y=a(1+\cos\theta)$;

(ii) $x=a(\cos t+t\sin t)$; $y=a(\sin t-t\cos t)$:

(i) এখানে, $x=a(\theta-\sin\theta)$ $\quad\therefore\ \frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$.

আবার, $y=a(1+\cos\theta)$. $\quad\therefore\ \frac{dy}{d\theta}=-a\sin\theta$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=-\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}$$

$$=-\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=-\cot\frac{\theta}{2}.$$

(ii) এখানে, $x=a(\cos t+t\sin t)$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t.$$

আবার, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt}=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{at\sin t}{at\cos t}=\tan t.$$

উদাহরণ 3. $\frac{dy}{dx}$ বাহির কর, যখন :

(i) $x^3+y^3=3axy$; (ii) $x^y=y^x$.

(i) x এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=3a\left(y+x\frac{dy}{dx}\right);$$

বা, $(y^2-ax)\frac{dy}{dx}=(ay-x^2)$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

(ii) $\because \quad x^y = y^x$; $\therefore \quad y \log x = x \log y$.

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$y \cdot \frac{1}{x} + (\log x)\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + (\log y) . 1 ;$$

বা, $\left(\log x - \frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \left(\log y - \frac{y}{x}\right)$;

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x \log y - y)}{x(y \log x - x)}$.

উদাহরণ 4. x এর সাপেক্ষে derivative বাহির কর :

(i) $(\sin x)^{\tan x}$; (ii) $(1+x)^x + 10^x$; (iii) $e^{e^x} + x^x$.

(i) ধরি, $y = (\sin x)^{\tan x}$. $\therefore \quad \log y = \tan x \log \sin x$.

$$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \tan x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + (\log \sin x)\sec^2 x.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\tan x}\{1 + \sec^2 x \log \sin x\}.$$

(ii) ধরি, $y = (1+x)^x + 10^x = u + 10^x$; $u = (1+x)^x$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 10^x \log_e 10.$$

কিন্তু, $u = (1+x)^x$. $\therefore \quad \log u = x \log (1+x)$.

$$\therefore \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x . \frac{1}{1+x} + \{\log (1+x)\}.1 ;$$

বা, $\frac{du}{dx} = (1+x)^x . \left\{\frac{x}{1+x} + \log (1+x)\right\}$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = (1+x)^x . \left\{\frac{x}{1+x} + \log (1+x)\right\} + 10^x \log_e 10.$$

(iii) ধরি, $y = e^{e^x} + x^x = u + v$,

যেখানে $u = e^{e^x}$; $v = x^x$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

কিন্তু, $u=e^{e^x}$ এবং $v=x^x$.

$\therefore \quad \log u=e^x$; $\log v=x \log x$.

$\therefore \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx}=e^x$; $\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=1+\log x$.

$\therefore \quad \frac{du}{dx}=e.^x e^{e^x}$; $\frac{dv}{dx}=x^x(1+\log x)$.

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=e^{(x+e^x)}+x^x(1+\log x)$.

উদাহরণ 5. Derivative বাহির কর :

(i) x^2 এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}x$ এর ;

(ii) $\tan^{-1}x$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ এর।

(i) ধরি, $y=\tan^{-1}x$; $z=x^2$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dz}=\frac{dv}{dx}\times\frac{dx}{dz}=\frac{dy}{dx}\Big/\frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{2x(1+x^2)}.$$

(ii) ধরি, $y=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; $z=\tan^{-1}x$.

মনে করি, $x=\tan\theta$; তাহা হইলে, $z=\tan^{-1}\tan\theta=\theta$;

$$y=\tan^{-1}\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}=\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}\theta.$$

$$\therefore \quad y=\tfrac{1}{2}z. \quad \therefore \quad \frac{dy}{dz}=\tfrac{1}{2}.$$

উদাহরণ 6. $y=\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ হইলে, দেখাও যে,

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\cos x}$; [C. U. 1970].

এখানে, $y=\dfrac{(1-\cos x)+\sin x}{(1+\cos x)+\sin x}=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$=\tan\frac{x}{2}$.

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{1+\cos x}$.

উদাহরণ 7. দেখাও যে, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}$,

যখন $y=\tan^{-1}\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}$; $x=\sec^{-1}\dfrac{1}{2v^2-1}$. [C. U. 1969]

ধরি, $v=\cos\theta$. তাহা হইলে,

$$y=\tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\tan^{-1}(\cot\theta)=\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}-\theta\ ;$$

$$x=\sec^{-1}\frac{1}{2\cos^2\theta-1}=\sec^{-1}(\sec 2\theta)=2\theta.$$

$$\therefore\ y=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}.\qquad\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}.$$

উদাহরণ 8. দেখাও যে, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\dfrac{1}{2}$, যখন

$$y=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.$$

এখানে, $y=\tan^{-1}\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(1+x)-(1-x)}=\tan^{-1}\left\{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right\}$

$$=\tan^{-1}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta},\quad [x=\sin\theta]$$

$$=\tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\sin^{-1}x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ ;\quad\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\frac{1}{2}.$$

প্রশ্নমালা 10

1. x এর সাপেক্ষে derivative বাহির কর :

(i) $\sin 3x$; (ii) $\cos^3 x$; (iii) $\operatorname{cosec}^3 x$

(iv) e^{3x^2} ; (v) $(\sin^{-1}x)^2$; (vi) $(\tan^{-1}x)^3$;

(vii) $\log(a^2+x^2)$; (viii) $\log \sin x$; (ix) $\sin\sqrt{1+x}$;

(ix, a) $\sin^{-1}(\sqrt{1-x})$; (x) $\tan^{-1}\sqrt{1+x^2}$;

(xi) $\log \tan^{-1}x$; (xii) $\sec^{-1}(\tan x)$;

(xiii) $e^{\sin^{-1}x}$; (xiv) $e^{\sqrt{\tan x}}$; (xv) $e^{\operatorname{cosec}^2(\sqrt{x})}$;

(xvi) $\log_x a$; (xvii) $10^{\log_e \sin x}$ (xviii) $\log_{\sin x} x$;

(xix) $\sin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$; (xx) $\cos\left(\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right)$;

(xxi) $\tan \sin^{-1}x$; (xxii) $\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)}$;

(xxiii) $\sqrt{\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right\}}$; (xxiv) $x^3\cdot\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2+3}}$;

(xxiv, a) $x^3\left(\frac{x^2-3}{x^2-4}\right)^{\frac{3}{2}}$ (xxv) $\log(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})$;

(xxvi) $\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$; [C.U. 1971]

(xxvii) $\log \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$; (xxviii) $\sqrt{1+\log|\log \sin x|}$;

(xxix) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$; (xxx) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;

(xxxi) $\tan^{-1}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$; (xxxii) $\sec^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$;

(xxxiii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$; (xxxiv) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

(xxxv) $\tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$; (xxxvi) $\tan^{-1}\left(\frac{a+bx}{b-ax}\right)$;

(xxxvii) $\sin^{-1}(3x-4x^3)$; (xxxviii) $\cos\{2\sin^{-1}(\cos x)\}$;

(xxxix) $2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\right)$; (xl) $\text{arc}\sin\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}$.

(xli) $\tan^{-1}(\sinh x)$; (xlii) $\tanh^{-1}(\tan\frac{1}{2}x)$.

2. $\frac{dy}{dx}$ বাহির কর :

(i) $x=\sin^2\theta$; $y=\tan\theta$.

(ii) $x=a\cos^3\theta$; $y=a\sin^3\theta$, [C.U. 1969]

(iii) $x=a\sec^2\theta$; $y=a\tan^2\theta$.

(iv) $x=a\tan\phi$; $y=a\sin\phi\cos\phi$.

(v) $x=a\log t$; $y=b\tan^{-1}t$. [C.U. 1973]

(vi) $x=2t/(1-t^2)$; $y=2t/(1+t^2)$.

(vii) $x=3at/(1+t^3)$; $y=3at^2/(1+t^3)$.

(viii) $\tan y=2t/(1-t^2)$; $\sin x=2t/(1+t^2)$. [C. U. 1966]

(ix) $x=2t/(1-t)$; $y=2t/(1+t)$.

3. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(i) $x^2+2xy+y^2=1$; (ii) $2x^2+5xy+3y^2=1$; [C.U. 1974]

(iii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; (iv) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;

(v) $\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}=1$; (vi) $x^py^q=(x+y)^{p+q}$; [C. U. 1968]

(vii) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$; [C. U. 1973]

(viii) $y=\log(xy)$; (ix) $\log(xy)=x^2+y^2$;

(x) $y=\sin(x+y)$; (xi) $xy=\tan(x+y)$;

(xii) $(\cos x)^y=(\sin y)^x$; (xiii) $e^{xy}-4xy=2$.

4. x এর সাপেক্ষে derivative নির্ণয় কর :

(i) x^{2x}; (ii) $x^{\sin^{-1}x}$; (iii) $(\sin x)^x$;

(iv) $x^{\log x}$, (v) $(1+x^2)^{2x+5}$; (vi) $(\tan x)^{\cot x}$;

(vii) x^{e^x}; (viii) x^{x^x}; [C. U. 1976]

(ix) $x^{\tan^{-1}x}+\tan x^0$; (x) $e^{\tan x}+x^x$; [C. U. 1973]

(xi) $x^x+(\sin x)^x$; (xii) $(\tan x)^x+x^{\tan x}$.

5. Differentiate :

(i) x^5 কে x^2 এর সাপেক্ষে ;

(ii) $\log x$ কে x^2 এর সাপেক্ষে ;

(iii) $\tan^{-1}x$ কে $\tan x$ এর সাপেক্ষে ;

(iv) $x^{\tan^{-1}x}$ কে $\tan^{-1}x$ এর সাপেক্ষে ;

(v) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ কে $\cot^{-1}x$ এর সাপেক্ষে ;

(vi) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ কে $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ এর সাপেক্ষে।

6. $\frac{dy}{dx}$ বাহির কর :

(i) $y=\sin^2(\log x)$; [C. U. 1976]

(ii) $y=\log(a+b^x)$ [C. U. 1972]

(iii) $y=\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$, [C. U. 1974]

(iv) $y=\tan^{-1}\left(\frac{ax-b}{bx+a}\right)$; [C. U. 1972]

(v) $y=\log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; (vi) $y=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$;

(vii) $\tan \frac{1}{2} y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; (viii) $y = \log \frac{a + b \tan x}{a - b \tan x}$;

[C. U. 1975]

(ix) $y = 10^{10^x}$; [C U. 1975] (x) $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$;

(xi) $y = \sin^{-1}\{2ax\sqrt{1-a^2x^2}\}$; (xii) $y = \tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2}\right\}$;

(xiii) $y = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$; [C. U. 1973]

(xiv) $x = 3 \tan^{-1}\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)$; $y = 2 \sin^{-1}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$; [C. U. 1974].

7. দেখাও যে,

(i) $\frac{dy}{dx} = \sec x$, যখন $y = \log \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

(ii) $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$, যখন $y = \tan^{-1}\left(\frac{a-bx}{b+ax}\right)$;

(iii) $x\frac{dy}{dx} = y$, যখন $x^a y^b = (x-y)^{a+b}$;

(iv) $\frac{dy}{dx} = \frac{-y(y + x \log y)}{x(x + y \log x)}$, যখন $x^y y^x = 1$; [C. U. 1966]

(v) $\frac{dy}{dx} = -\frac{yx^{y-1} + y^x \log y}{x^y \log x + xy^{x-1}}$, যখন $x^y + y^x = a^b$;

[C. U. 1965]

(vi) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$, যখন $\sin y = x \sin(a+y)$;

[C. U. 1967]

(vii) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 - x^2}$, যখন $y = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$;

[C. U. 1968]

(viii) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$, যখন $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$;

(ix) $\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{\sqrt{1-x^2}}$, যখন $y = \cos^{-1}(8x^4 - 8x^2 + 1)$;

(x) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{a+b\cos x}$, যখন $y=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\, arc\tan\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$;

(xi) $\dfrac{dy}{dx}=1$, যখন $\sin x=\sqrt{\dfrac{t^2}{1+t^2}}$, $\cos y=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$;

(xii) $\dfrac{dY}{dX}=1$, যখন $Y=\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$, $X=\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$;

[C. U. 1968]

(xiii $\dfrac{dy}{dx}=1$, যখন $y=\cos^{-1}\left(\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\right)$, $x=\tan^{-1}\left(\dfrac{2z}{1-z^2}\right)$;

[C. U. 1965]

(xiv) $\dfrac{dy}{dx}=3/2$, যখন $y=\sin^{-1}(3X-4X^3)$, $x=\sec^{-1}\left(\dfrac{1}{1-2X^2}\right)$;

[C. U. 1968]

(xv) $f'(0)=\log(a/b)$, যখন $f(x)=\left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^x+\cos x$;

(xvi) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1/2}=-1/\sqrt{3}$, যখন $y=\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;

[C. U. 1977]

(xvii $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\left(2\log a+\dfrac{1-a^2}{a}\right)\left(a^{a+1}\right)$,

যখন $y=\left(\dfrac{a+x}{1+x}\right)^{a+1+2x}$ [C. U. 1977]

8. $x^2+y^2=2$ বক্ররেখার $(1, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতিমাত্রা বাহির কর।

9. $x^2+6xy+25y^2=16$ বক্ররেখার যে যে বিন্দুতে স্পর্শক (i) x-অক্ষের, (ii) y-অক্ষের সমান্তরাল তাহা নির্ণয় কর।

10. দেখাও যে, $x^3+y^3=3axy$ বক্ররেখার $\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত স্থূলকোণে নত রহিয়াছে। [C. U. 1970]

11. $y^2+2x^3y+x^7=0$ বক্ররেখার যে যে বিন্দুতে $\dfrac{dx}{dy}=0$ তাহাদের ভুজ বাহির কর।

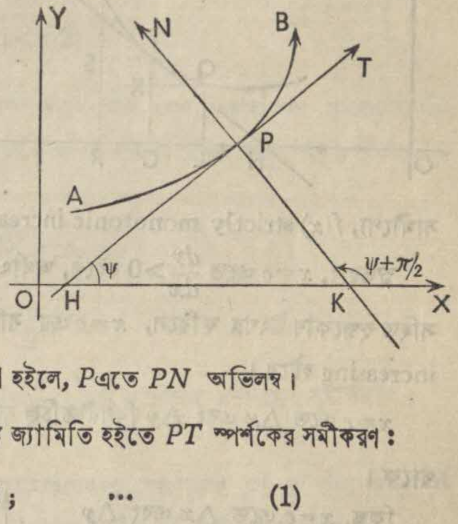
12. $y=c\cosh\dfrac{x}{c}$ বক্ররেখার যে কোনও বিন্দুতে স্পর্শক ও x-অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ ψ হইলে, দেখাও যে, $y=c\sec\psi$. [C. U. 1969]

অষ্টম অধ্যায়

অন্তরকলিতকের কয়েকটি প্রয়োগ

(Some applications of derivatives)

8-1. Tangent and Normal to a curve :



মনে করি, (i) $y=f(x)$, বা, (ii) $F(x, y)=0$, বা, (iii) $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$, বক্র-রেখা AB এর সমীকরণ এবং উহার উপর $P(h, k)$ বিন্দুতে PT স্পর্শক আছে এবং তাহা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত ψ কোণ উৎপন্ন করে। PN সরলরেখা PT এর উপর লম্ব। তাহা হইলে, Pএতে PN অভিলম্ব।

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(h,\,k)}=m$ হইলে, স্থানাঙ্ক জ্যামিতি হইতে PT স্পর্শকের সমীকরণ :

$$y-k=m(x-h)\,; \qquad \cdots \qquad (1)$$

এবং PN অভিলম্বের সমীকরণ :

$$y-k=-\frac{1}{m}(x-h). \qquad \cdots \qquad (2)$$

দৃষ্টান্ত : $y=x^2-3x+2$ বক্ররেখার $P(0, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর।

এখানে, $\frac{dy}{dx}=2x-3$. $\therefore$ $x=0$ এতে $\frac{dy}{dx}=-3$.

সুতরাং, স্পর্শকের সমীকরণ :

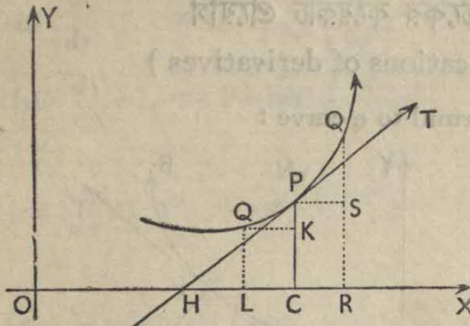
$$y-2=(-3)(x-0)\,; \quad \text{বা,} \quad y+3x=2\,;$$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ :

$$y-2=\frac{-1}{(-3)}(x-0)\,; \quad \text{বা,} \quad 3y-x=6.$$

8-2. Meaning of the sign of a derivative :

আমরা জানি, $\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, যেখানে $y = f(x)$.



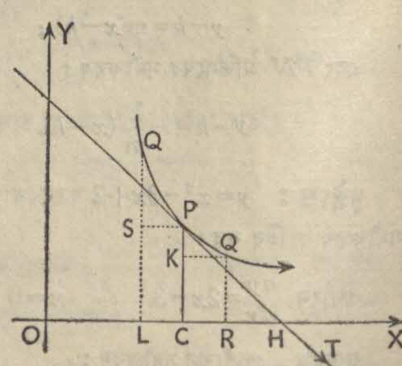
সুতরাং, $x=c$ এতে Δx এবং Δy একই চিহ্ন যুক্ত হইলে, $\frac{dy}{dx} > 0$ হইবে, যদি ইহা থাকে।

কিন্তু, $x=c$ এতে Δx এবং Δy একই চিহ্নযুক্ত হওয়ার অর্থ: $x=c$ এর সামীপ্যে, $f(x)$ strictly monotonic increasing.

সুতরাং, $x=c$ এতে $\frac{dy}{dx} > 0$ হইলে, অর্থাৎ, $[c, f(c)]$ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সহিত সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করিলে, $x=c$ এর সামীপ্যে, $f(x)$ strictly monotonic increasing হইবে।

$x=c$ এতে Δx এবং Δy বিপরীতচিহ্ন যুক্ত হইলে, $\frac{dy}{dx} < 0$ হইবে, যদি ইহা থাকে।

কিন্তু, $x=c$ এতে Δx এবং Δy বিপরীত চিহ্নযুক্ত হওয়ার অর্থ: $x=c$ এর সামীপ্যে $f(x)$ strictly monotonic decreasing.



সুতরাং, $x=c$ এতে $\frac{dy}{dx} < 0$ হইলে, অর্থাৎ, স্পর্শক x-অক্ষের সহিত স্থূলকোণ উৎপন্ন করিলে, $x=c$ এর সমীপ্যে $f(x)$ strictly monotonic decreasing হইবে।

দ্রষ্টব্য : $x=c$ এতে $\frac{dy}{dx} = 0$ হইলে, $y = f(x)$ বক্ররেখার $[c, f(c)]$ বিন্দুতে, স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হইবে।

কিন্তু, $x=c$ এতে $\frac{dx}{dy}=0$ হইলে, বক্ররেখাটির উপর $x=c$ এতে স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল হইবে।

দৃষ্টান্ত 1. $y=e^x$ হইলে, $\frac{dy}{dx}=e^x>0$, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য।

সুতরাং, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য, e^x strictly monotonic increasing; অর্থাৎ, x এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $y=e^x$ বক্ররেখাটির কোটি ক্রমবর্দ্ধমান।

[See : Fig. 4(b) ; Page—71.]

দৃষ্টান্ত 2. $y=\cos x$, $(0\leqslant x\leqslant \pi/2)$ হইলে,

$$\frac{dy}{dx}=-\sin x<0, \ (0<x<\pi/2).$$

সুতরাং, $]0, \pi/2[$ এতে x এর সকল মানের জন্য, $\cos x$ strictly monotonic decreasing; অর্থাৎ, $0<x<\pi/2$ এতে x এর মানের বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $y=\cos x$ বক্ররেখাটির কোটি ক্রমহ্রাসশীল।

দৃষ্টান্ত 3. $y=\sin x$ হইলে, $\frac{dy}{dx}=\cos x$.

এখন, $x=\pi/2$ এতে, $\frac{dy}{dx}=\cos\frac{\pi}{2}=0$.

সুতরাং, $y=\sin x$ বক্ররেখার $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ এতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল।

8-3. Calculation of approximate values of a dependent variable and small error with the help of differentials :

মনে করি, $y=f(x)$, যেখানে $[a, b]$ এতে $f(x)$ সন্তত এবং $a<x<b$ এতে $f'(x)$ সসীম।

$$\therefore \ \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x), \ (a<x<b).$$

$\therefore \ \Delta y/\Delta x=f'(x)+\epsilon$, যেখানে $\epsilon\to 0$ যখন $\Delta x\to 0$.

$$\therefore \ \Delta y=f'(x)\Delta x+\epsilon\Delta x.$$

অর্থাৎ, $\Delta y\simeq f'(x)\Delta x=f'(x)dx$, $(\because \ \Delta x=dx)$;

বা, $\Delta y\simeq dy$; (i.e., $\delta y\simeq dy$).

এখন, $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$;

অর্থাৎ, $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta y$ বলিয়া,

$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)dx$, approximately ;

অর্থাৎ, $f(x+\delta x)=f(x)+f'(x)\delta x$, approximatey.

সুতরাং, নির্দিষ্ট x এর জন্য $f(x)$ এর মান জানা থাকিলে, নির্দিষ্ট δx এর জন্য, $f(x+\delta x)$ এর আসন্ন মান $f(x)+f'(x)\delta x$ হইবে।

মন্তব্য : δy (বা Δy) এবং dy একই নাও হইতে পারে। সেইজন্য, $f(x+\delta x)$ এর মান নির্ণয়ে error আসিতে পারে।

দ্রষ্টব্য : (i) Relative error in $y=\delta y/y$.

(ii) Percentage error in $y=100\times\delta y/y$.

দৃষ্টান্ত : আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্য্যন্ত sin 32° এর মান বাহির কর ; দেওয়া আছে, $1°=0·01745$.

ধরি, $f(x)=\sin x$. $\therefore$ $f'(x)=\cos x$; $\delta x=2°=·03490$;

$f(30°)=\sin 30°=0·5$; $f'(30°)=\cos 30°=\sqrt{3}/2=0·86603$;

$\therefore$ $\sin 32°=\sin 30°+f'(30°)\times ·03490$

$=0·5+0·86603\times 0·03490=0·53022$.

[প্রকৃতমান : $\sin 32°=0·52992$].

দ্রষ্টব্য : উৎকৃষ্টতর মানের জন্য

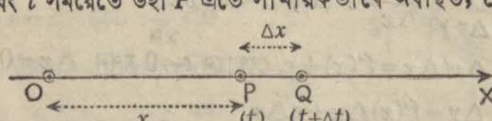
$$f(x+\delta x)=f(x)+f'(x)\delta x+\frac{1}{\underline{|2}}f''(x)(\delta x)^2 \text{ (প্রায়)} ;$$

সূত্রটি ব্যবহার করিতে হইবে।

কিন্তু, ইহার প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত।

8-4. Derivative as a rate measurer :

মনে করি, OX সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি বিন্দু (বা, কণা) $t=0$ সময়ে O এতে ছিল এবং t সময়েতে উহা P এতে সাময়িকভাবে অবস্থিত, যেখানে $OP=x$;



এবং $t+\Delta t$ সময়েতে উহা Q এতে সাময়িক ভাবে অবস্থিত, যেখানে $OQ=x+\Delta x$.

তাহা হইলে, বিন্দুটি Δt সময়ে Δx দূরত্ব অতিক্রম করে; অর্থাৎ, Δt সময়ে বিন্দুটির সরণ (displacement) Δx. সুতরাং, P এতে গড় সরণ $\Delta x/\Delta t$; এবং P এতে, অর্থাৎ, t সময়ের মুহূর্তে সরণের হার $\underset{\Delta t\to 0}{Lt}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$, অর্থাৎ $\frac{dx}{dt}$, যাহাকে গতিশীল বিন্দুর P এতে বেগ (velocity), বা, t এর সাপেক্ষে x এর পরিবর্তন-হার (rate-measure) বলা হয়।

সেইরূপ $\frac{ds}{dt}, \frac{dv}{dt}$ কে t এর সাপেক্ষ যথাক্রমে s ও v এর পরিবর্তন-হার বলা হয়।

অনুরূপভাবে, $\frac{dy}{dx}$ কে x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তন-হার, $\frac{dv}{dx}$ কে x এর সাপেক্ষে v এর পরিবর্তন-হার বলা হয়।

দৃষ্টান্ত: একটি বৃত্তাকার পাতকে উত্তপ্ত করার সময়, যখন উহার ব্যাসার্ধ 1·5 ফুট, তখন প্রতি সেকেণ্ডে ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হার 0·014 ইঞ্চি। এই ক্ষেত্রে, পাতটির ক্ষেত্রফল কি হারে বাড়িতেছে? $(\pi=22/7)$.

মনে করি, t সেকেণ্ড সময়ে পাতটির ব্যাসার্ধ r ইঞ্চি এবং ক্ষেত্রফল A বর্গ ইঞ্চি।

তাহা হইলে, $A=\pi r^2$. $\therefore \frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$.

দেওয়া আছে, যখন $r=1\cdot5$ ফুট $=18$ ইঞ্চি, তখন $\frac{dr}{dt}=0\cdot014$ ইঞ্চি।

$\therefore$ যখন $r=18$ ইঞ্চি, তখন,

$\frac{dA}{dt}=2\times\frac{22}{7}\times18\times0\cdot014$ বর্গ ইঞ্চি $=1\cdot584$ বর্গ ইঞ্চি।

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর: প্রতি সেকেণ্ডে 1·584 বর্গ ইঞ্চি।

8-5. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ:

উদাহরণ 1. $xy^2=4(4-x)$ বক্ররেখার (2, 2) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$xy^2=4(4-x)$ হইতে x এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$y^2+2xy\frac{dy}{dx}=-4;\quad \text{বা,}\quad \frac{dy}{dx}=-(4+y^2)/(2xy).$$

$$\therefore\ (2, 2)\ \text{এতে,}\ \frac{dy}{dx}=-1.$$

সুতরাং, (2, 2) বিন্দুতে বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ :

$$y-2=-1\times(x-2)\;; \quad \text{বা,} \quad \mathbf{y+x=4.}$$

আবার, ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

$$y-2=1\times(x-2)\;; \quad \text{বা,} \quad \mathbf{y=x.}$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, x এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $(x-\tan^{-1}x)$ ক্রমবর্ধমান এবং $x>\tan^{-1}x$, যখন $x>0$.

ধরি, $f(x)=x-\tan^{-1}x$.

$$\therefore \quad f'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}.$$

সুতরাং, x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $f'(x)>0$.

অতএব, x এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $f(x)$, অর্থাৎ, $(x-\tan^{-1}x)$ ক্রমবর্ধমান।

তাহা হইলে, $f(x)>f(0)$ যখন $x>0$.

কিন্তু, $f(0)=0$. $\therefore \quad f(x)>0$, যখন $x>0$;

অর্থাৎ, $x>\tan^{-1}x$, যখন $x>0$.

উদাহরণ 3. x এর কোন্ কোন্ মানের জন্য x এর মানের বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $x^3-6x^2+9x+10$ ক্রমবর্ধমান হইবে ?

ধরি, $f(x)=x^3-6x^2+9x+10$;

$\therefore \quad f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$.

দেখা যাইতেছে, $x<1$ অথবা $x>3$ হইলে, $f'(x)>0$. সুতরাং $x<1$ অথবা $x>3$ হইলে, x এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে, $f(x)$, অর্থাৎ, $(x^3-6x^2+9x+10)$ এর মান ক্রমবর্ধমান।

উদাহরণ 4. নিম্নলিখিতগুলির মান আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্য্যন্ত নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt{6\cdot37}$; (ii) $\log_{10} 10\cdot05$, দেওয়া আছে $\log_{10} e=0\cdot4343$.

(iii) $\sin 62°$, দেওয়া আছে $\sin 60°=0\cdot866$; $1°=0\cdot017$.

(iv) x^3+3x^2+x+5, যখন $x=2\cdot036$.

(i) ধরি, $y=\sqrt{x}$. $\therefore \quad f(x)=\sqrt{x}$; $\delta x=0\cdot12$.

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\;; \quad dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\delta x.$$

$x = 6·25$; $\delta x = 0·12$ ধরিলে,

$$\sqrt{6·37} \simeq \sqrt{6·25} + \frac{1}{2\sqrt{6·25}} \times 0·12$$

$$= 2·5 + \frac{0·12}{5} = 2·5 + 0·024 = 2·524.$$

(ii) ধরি, $y = \log_{10} x$; বা, $f(x) = \log_{10} x = \log_e x \times \log_{10} e$.

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \log_{10} e.$$

ধরি, $x = 10$ এবং $\delta x = ·05$.

তাহা হইলে, $dy = \frac{1}{10} \times \log_{10} e \times ·05 \simeq ·0022$.

$$\therefore \quad \log_{10} 10·05 = \log_{10} 10 + 0·0022 = 1·0022 \simeq 1·002.$$

(iii) ধরি, $y = \sin x$; বা, $f(x) = \sin x$. $\therefore$ $f'(x) = \cos x$.

$x = 60°$; $\delta x = 2° = 0·034$.

$$\therefore \quad dy = \cos 60° \times 0·034 = 0·5 \times 0·034 = 0·0170$$

$$\therefore \quad \sin 62° = \sin 60° + 0·0170 = \sqrt{3}/2 + 0·0170$$

$$= 0·866 + ·0170 = 0·883.$$

(iv) ধরি, $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 5$. $\therefore$ $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$.

মনে করি, $x = 2$; $\delta x = 0·036$.

এখন, $f(2) = 27$; $f'(2) = 25$.

$$\therefore \quad f(2·036) = f(2) + f'(2)\,\delta x, \text{ (প্রায়)}$$

$$= 27 + 25 \times 0·036 = 27·900.$$

[প্রকৃতমান $\simeq 27·912$].

উদাহরণ 5. প্রতি ইঞ্চিতে 0·005 ইঞ্চি ভুল মাপিলে 4 ইঞ্চি ধার-বিশিষ্ট একটি ঘনকের আয়তনের কত ভুল হইবে ?

মনে করি, ঘনকের ধার $= x$ ইঞ্চি ; আয়তন V ঘন ইঞ্চি। তাহা হইলে,

$V = x^3$. $\therefore$ $\dfrac{dV}{dx} = 3x^2$; $\delta x = 4 \times ·005 = 0·02$.

$x = 4$ হইলে, $\dfrac{dV}{dx} = 48$.

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় ভুল} = \frac{dV}{dx}\,\delta x = 48 \times 0·02$$

$= 0·96$ ঘন ইঞ্চি (প্রায়)।

উদাহরণ 6. ABC ত্রিভুজে $AB=5''$, $AC=6''$; A এর প্রকৃত মান $45°2'$ এর পরিবর্তে ভুল করিয়া $45°$ ধরিলে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের আপেক্ষিক ভুল (relative error) ও শতকরা ভুল কি হইতে পারে ? ($1°=0·01745$).

এখানে, $\Delta=\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 5\times 6\times \sin A$ বর্গ ইঞ্চি

$=15 \sin A$ বর্গ ইঞ্চি. $\therefore \quad \dfrac{d\Delta}{dA}=15 \cos A.$

$A=45°=\pi/4$; $\delta A=2'=0·01745\times\frac{2}{60}=0·00058$;

$A=\pi/4$ হইলে, $\Delta=15 \sin \pi/4=15/\sqrt{2}$ বর্গ ইঞ্চি

$\simeq 10·6066$ বর্গ ইঞ্চি।

$A=\pi/4$; $\delta A=0·00058$ হইলে,

$$d\Delta=\frac{d\Delta}{dA}\,\delta A=15 \cos\frac{\pi}{4}\times 0·00058$$

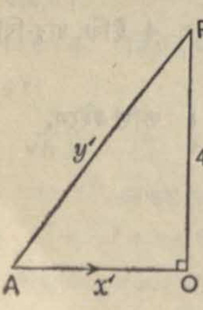
$$=\frac{15}{\sqrt{2}}\times 0·00058 \text{ বর্গ ইঞ্চি।}$$

$\simeq 0·00615$ বর্গ ইঞ্চি $=$ মোট ভুল (প্রায়)।

$\therefore$ আপেক্ষিক ভুল $=\dfrac{d\Delta}{\Delta}=0·00058$;

এবং শতকরা ভুল $=100\times\dfrac{d\Delta}{\Delta}=0·058\%$

উদাহরণ 7. 40 ফুট উচ্চ মন্দিরের পাদদেশগামী সমতল বরাবর এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 6 মাইল সমবেগে পাদদেশ অভিমুখে হাঁটিতেছে। পাদদেশ হইতে ঐ ব্যক্তির দূরত্ব যখন 30 ফুট তখন মন্দিরের শীর্ষদেশ হইতে তাহার দূরত্ব কি হারে কমিতেছে ?



চিত্রে, $OP=$ মন্দিরের উচ্চতা $=40$ ফুট ; মন্দিরের পাদদেশ O.

মনে করি, t সেকেণ্ড সময়ে ঐ ব্যক্তি A অবস্থানে সাময়িক ভাবে স্থিত, যেখানে $OA=x$ ফুট ; $AP=y$ ফুট.

তাহা হইলে, $\angle AOP=90°$ বলিয়া,

$y^2=x^2+40^2$. ... (1)

$\therefore \quad 2y\dfrac{dy}{dt}=2x\dfrac{dx}{dt}$; বা, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x}{y}\dfrac{dx}{dt}$. ... (2)

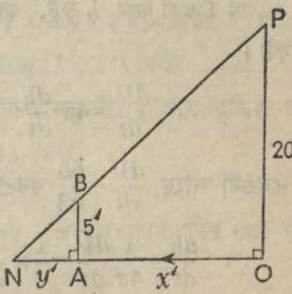
যখন $x=30$ ফুট, (1) হইতে $y=50$ ফুট.

আবার দেওয়া আছে $\frac{dx}{dt}$ = ঘণ্টায় 6 মাইল = 8·8 ফুট/সেকেণ্ড।

$$\therefore \text{ যখন } x=30 \text{ ফুট, } \frac{dy}{dt}=\frac{30}{50}\times 8{\cdot}8 \text{ ফুট/সেকেণ্ড}$$

$$=5{\cdot}28 \text{ ফুট/সেকেণ্ড—উত্তর।}$$

উদাহরণ 8. 20 ফুট উচ্চ একটি আলোক স্তম্ভের পাদদেশগামী সমতল বরাবর 5 ফুট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট এক ব্যক্তি প্রতি সেকেণ্ডে 9 ফুট সমবেগে দূরে সরিতে থাকিলে, তাহার ছায়ার দৈর্ঘ্য কি হারে বাড়িতে থাকিবে ?



চিত্রে OP = আলোকস্তম্ভ = 20 ফুট ;

AB = লোকটির উচ্চতা = 5 ফুট,

যাহার ছায়ার দৈর্ঘ্য $=AN=y$ ফুট,

যেখানে $OA=x$. তাহা হইলে,

$$\frac{OP}{AB}=\frac{ON}{AN}; \text{ বা, } \frac{20}{5}=\frac{x+y}{y}; \text{ বা, } y=\frac{1}{3}x.$$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=\frac{1}{3}\frac{dx}{dt}.$$

দেওয়া আছে, $\frac{dx}{dt}=9$ ফুট/সেকেণ্ড।

$$\therefore \frac{dy}{dt}=\tfrac{1}{3}\times 9 \text{ ফুট/সেকেণ্ড}$$

$$=3 \text{ ফুট/সেকেণ্ড—উত্তর।}$$

উদাহরণ 9. একটি গোলাকৃতি বেলুনের আয়তন এমনভাবে বাড়িতেছে যে, উহার ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হার প্রতি সেকেণ্ডে $\frac{1}{11}$ ইঞ্চি। যখন, উহার ব্যাসার্ধ $3\frac{1}{2}$ ইঞ্চি তখন উহার আয়তন কি হারে বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে ? ($\pi=22/7$).

মনে করি, বেলুনটির ব্যাসার্ধ যখন r ইঞ্চি, তখন উহার আয়তন V ঘন ইঞ্চি ; তাহা হইলে, $V=\frac{4}{3}\pi^3 r$. $\therefore \frac{dV}{dt}=4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$

দেওয়া আছে, $\frac{dr}{dt}=\frac{1}{11}$ ইঞ্চি/সেকেণ্ড।

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt}=4\times\frac{22}{7}\times(\frac{7}{2})^2\times\frac{1}{11} \text{ ঘন ইঞ্চি/সেকেণ্ড}$$
$$=14 \text{ ঘন ইঞ্চি/সেকেণ্ড—উত্তর।}$$

উদাহরণ 10. 4 ফুট ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার চোঙাকৃতি পাত্রের তলদেশের একটি ছিদ্র দিয়া মিনিটে 66 পাউণ্ড জল নির্গত হইতে থাকিলে, জলের উচ্চতা কি হারে হ্রাস পাইতেছে? (এক ঘন ফুট জলের ওজন 63 পাউণ্ড)।

জলের উচ্চতা যখন h ফুট, জলের আয়তন V ঘন ফুট হইলে, $V=\pi r^2h=4\pi h$ ঘন ফুট।

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt}=4\pi\frac{dh}{dt}.$$

দেওয়া আছে, $\frac{dV}{dt}=\frac{66}{63}$ ঘন ফুট $=\frac{22}{21}$ ঘন ফুট প্রতি মিনিটে।

$$\therefore \quad \frac{dh}{dt}=\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{at}=\frac{1}{4}\times\frac{7}{22}\times\frac{22}{21} \text{ ফুট/মিনিট}$$
$$=1 \text{ ইঞ্চি/মিনিট—উত্তর।}$$

প্রশ্নমালা 11

বিভাগ A

1. $y=2x^2-3x+5$ বক্ররেখার (1, 4) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর।

2. $y^2=ax^2+b$ বক্ররেখার (2, 3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y=4x-5$ হইলে a এবং b এর মান বাহির কর।

3. $x^3+xy^2+y^3=1$ বক্ররেখার (1, −1) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর।

4. (a) $y^2=4x$ বক্ররেখার (0, 0) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর।

(b) $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ বক্ররেখার $\theta=\pi$ এতে স্পর্শকের এবং অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর।

5. নিম্নোক্ত বক্ররেখার $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর :—

(i) $x^2+y^2=a^2$; (ii) $y^2=4ax$; (iii) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$; (iv) $x^2/a^2-y^2/b^2=1$.

বিভাগ B

6. দেখাও যে, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য উহার মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $x-\log(1+x^2)$ এর মান ক্রমবর্ধমান ; এবং $x>\log(1+x^2)$, যখন $x>0$.

7. দেখাও যে, x এর সকল ধনাত্মক বাস্তব মানের জন্য উহার মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $x^2+\log(1+x^2)-2x\tan^{-1}x$ ক্রমবর্ধমান ; এবং

$x^2+\log(1+x^2)>2x\tan^{-1}x$, যখন $x>0$.

8. দেখাও যে, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য উহার মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $x-\sin x$ ক্রমবর্ধমান এবং $x>\sin x$ যখন $x>0$.

9. $0<x<\pi/2$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $1-\dfrac{1}{2!}x^2<\cos x$; (ii) $x-\dfrac{1}{3!}x^3<\sin x$.

10. $x>0$ হইলে, দেখাও যে, $x>\log(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2$.

11. দেখাও যে, x এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে x^3-3x^2+6x-5 ক্রমবর্ধমান।

12. x এর কোন্ কোন্ অন্তরাতে

(i) $5-9x+6x^2-x^3$ ক্রমবর্ধমান ?

(ii) $x^3-9x^2+24x-10$ ক্রমবর্ধমান ?

(iii) $2x^3-9x^2+12x+5$ ক্রমহ্রাসশীল ?

(iv) $15+8x^3-3x^4$ ক্রমহ্রাসশীল ?

13. $f(x)=1+(x-1)e^x$, $(x\geqslant 0)$ হইলে, দেখাও যে, x এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $f(x)$ ক্রমবর্ধমান ; এবং $f(x)>0$ যখন $x>0$.

14. (i) $\phi(x)=2x-\tan^{-1}x-\log(x+\sqrt{1+x^2})$ হইলে দেখাও যে, x এর মান সর্বদা ধনাত্মক থাকিয়া নিরবচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে, $\phi(x)$ নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমবর্ধমান হইতে থাকে ; এবং $\phi(x)>0$ যখন $x>0$.

(ii) দেখাও যে, $\left.\begin{array}{l}(a)\ \log(x+\sqrt{1+x^2})>\tan^{-1}x\\(b)\ x>\log(x+\sqrt{1+x^2})\end{array}\right\}$, ($x>0$ হইলে)।

15. "$0<\theta<\pi/2$ অন্তরাতে θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে, $\theta/\sin\theta$ নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমবর্ধমান হইতে থাকিবে"—দেখাও।

বিভাগ C

16. $y=2x^3-4x^2+5x-7$ হইলে, যখন $\delta x=0.0025$, তখন $dx, \delta y, dy, \delta y-dy, \frac{\delta y}{\delta x}$ এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান $x=3$ এতে বাহির কর।

17. $y=x^4+5x^2-7$ হইলে, যখন $\Delta x=-0.003$, তখন $dx, \Delta y, dy, \Delta y-dy, \frac{dy}{dx}-\frac{\Delta y}{\Delta x}$ এর মান $x=2$ এতে নির্ণয় কর।

18. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে আসন্ন মান নির্ণয় কর :—

(i) x^3+5x^2+7x-9, যখন $x=3.00025$;

(ii) x^4+3x^3-2x+7, যখন $x=1.997$.

19. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্য্যন্ত মান নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt{1.74}$, (ii) $\sqrt{6.19}$, (iii) $\sqrt[3]{1.74}$, (iv) $\frac{1}{(2.002)^4}$;

(v) $\log_e 10.03$, দেওয়া আছে $\log_e 10=2.3026$;

(vi) $\log_{10} 10.05$, দেওয়া আছে $\log_{10} e=0.4343$;

(vii) $\sin 62°$, দেওয়া আছে $1°=0.01745$;

(viii) $\cos 30°2'$, দেওয়া আছে, $1'=0.00029$;

(ix) $\tan 44°$, দেওয়া আছে, $1°=0.01745$;

(x) $\sec^2 46°$, দেওয়া আছে, $1°=0.01745$.

20. কোন বৃত্তের প্রকৃত ব্যাসার্ধ 5″·02 এর পরিবর্তে ভুলক্রমে 5″ ধরিলে, ঐ বৃত্তের ক্ষেত্রফলের আপেক্ষিক ভুল কত হইবে ? উহার পরিসীমার ভুল কত হইতে পারে ? [$\pi=3.1416$]

21. যে ঘনকের একটি ধার (side) এর দৈর্ঘ্য 19·98 ইঞ্চি তাহার আয়তন আসন্ন মানে বাহির কর। ভুলক্রমে ঐ ধার 20 ইঞ্চি ধরিলে, ভুলের তুলনা কর।

22. একটি গোলকের ব্যাসার্ধ 7″ হইতে 7″·05তে বৃদ্ধি পাইলে, উহার আয়তন কিরূপ বৃদ্ধি পাইবে আসন্ন মানে নির্ণয় কর। উহার আয়তনের প্রকৃত বৃদ্ধি নির্ণয় করিয়া তুলনা কর। [$\pi=3.1416$]

23. দেখাও যে, ভুলক্রমে ব্যাসার্ধ নির্ণয়ে একটি গোলকের আয়তনের আপেক্ষিক ভুল উহার ব্যাসার্ধের আপেক্ষিক ভুলের তিন গুণ।

24. অপসারিত জলের পরিমাপ দ্বারা গোলকের আয়তন হইতে ব্যাসার্ধ নির্ণয়ে আয়তনে ভুল শতকরা 3 হইলে, ব্যাসার্ধ নির্ণয়ে শতকরা ভুল কত থাকিতে পারে ?

25. একটি বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধ 6 ইঞ্চি ; উহার প্রকৃত উচ্চতা 4·015 ফুটের পরিবর্তে ভুলক্রমে 4 ফুট ধরা হইলে, উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলে ভুলের পরিমাপ কত হইবে ? $[\pi = \cdot1416]$

26. ABC ত্রিভুজে $AB=2'', AC=3''$; A এর মান $60°2'$ এর পরিবর্তে ভুলক্রমে $60°$ ধরা হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে কত ভুল থাকিবে ?

$[1'=0{\cdot}000291]$

27. কোন একটি ত্রিভুজের একটি কোণ মাপিয়া পাওয়া গেল $45°$; ঐ কোণ পরিমাপে ভুলের পরিমাণ $1'$ হইলে, উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে শতকরা কত ভুল থাকিতে পারে ? $(1'=0{\cdot}000291)$.

28. একটি গম্বুজের পাদদেশ হইতে পাদদেশগামী সমতলে 200 ফুট দূরত্বে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ $45°$ পাওয়া গেল। ঐ কোণ পরিমাপে ভুল শতকরা 2 থাকিলে গম্বুজের উচ্চতা নির্ণয়ে কত ভুল থাকিতে পারে ? $[1° = 0{\cdot}01745]$

29. একটি মন্দিরের পাদদেশ হইতে 100 ফুট দূরত্বে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ $60°$ দেখা গেল। প্রকৃত উন্নতি কোণের পরিমাপ $60°1'$ হইলে, উচ্চতা নির্ণয়ে কি ভুল থাকিয়া যাইবে ? $(1' = \cdot000291)$.

30. (*a*) ABC ত্রিভুজে c এবং C সর্বদা একই থাকিলে, এবং উহার অপর অংশগুলি নামেমাত্র সামান্য পরিবর্তন হইলে, দেখাও যে, $da/\cos A + db/\cos B = 0$.

(*b*) ABC একটি প্রদত্ত বৃত্ত, এবং $\triangle ABC$ ঐ বৃত্তের অন্তর্লিখিত যে কোন ত্রিভুজ। দেখাও যে, $da/\cos A + db/\cos B + dc/\cos C = 0$.

বিভাগ D

31. x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তন হার $x=2$ এতে নির্ণয় কর, যদি $y=3x^3-2x^2+5$ হয়।

32. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা t সেকেণ্ড সময়ে s ফুট দূরত্ব অতিক্রম করিলে, $t=3$ এতে t এর সাপেক্ষে s এর পরিবর্তন-হার বাহির কর, যদি $s=3t^2+2t-1$ হয়।

33. t সেকেণ্ড সময়ে একটি কণার সরণ s ফুট হইলে ঠিক 3 সেকেণ্ডের সময়ে উহার বেগ নির্ণয় কর, যদি $s=3t^3+t^2-3t+4$ হয়।

34. একটি গতিশীল কণার t সেকেণ্ড সময়ে সরণ s ফুট হইলে 2 সেকেণ্ডের সময়ে উহার বেগ কত হইবে, যদি $s=2t^3-13t+5$ হয় ?

35. 5 ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের পরিবর্তন-হার নির্ণয় কর, যদি উহার বাহুর পরিবর্তন-হার সেকেণ্ডে 0·03 ইঞ্চি হয়।

36. 13 ফুট দীর্ঘ একটি দণ্ড একটি উল্লম্ব দেওয়ালে হেলানভাবে থাকা কালীন উহার নিম্ন প্রান্ত দেওয়াল ও অনুভূমিক তলের সংযোগস্থল হইতে অনুভূমিকতল বরাবর 5 ফুট দূরত্বে আছে। উহার নিম্নপ্রান্ত অনুভূমিকতলে প্রতি সেকেণ্ডে 2 ফুট বেগে এখন পিছ্‌লাইতে থাকিলে, উহার অপর প্রান্ত কি হারে নীচে নামিতে থাকিবে?

37. প্রতি সেকেণ্ডে 5 ঘন সে. মি. হারে একটি গোলাকৃতি ব্ল্যাডার (bladdar) এতে বায়ু প্রবেশ করাইলে, উহার ব্যাসার্ধ যখন 10 সে. মি. হইবে তখন উহার ব্যাসার্ধের পরিবর্তন-হার কিরূপ হইবে? সেই সময়ে উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের পরিবর্তন-হারই বা কিরূপ হইতে থাকিবে? [$\pi = 3{\cdot}1416$]

38. একটি বৃত্তাকার লম্ব চোঙাকৃতি পাত্রে প্রতি মিনিটে 44 ঘন ফুট জল ঢালা হইতেছে। ঐ পাত্রের ভূমির ব্যাস 8 ফুট হইলে উহাতে কি হারে জলের উচ্চতা বাড়িতেছে? [$\pi = 22/7$]

39. একটি উল্টান উল্লম্ব বৃত্তাকার লম্ব শঙ্কুর (inverted right circular cone) উচ্চতা 24 ফুট এবং ভূমির ব্যাস 14 ফুট। উহাতে প্রতি সেকেণ্ডে 98 ঘন ফুট জল ঢালিতে থাকিলে, যখন জলের উচ্চতা 12 ফুট তখন জলের উপরিতল কি হারে উপরে উঠিতে থাকে?

40. অনুভূমিক তল হইতে সর্বদা 8/3 মাইল উচ্চতায় উড্ডয়নশীল একটি উড়োজাহাজের বেগ ঘণ্টায় 150 মাইল। 2 মিনিট পূর্বে উহার দ্বারা অতিক্রান্ত স্থানের ঠিক নিম্নে অনুভূমিক তলে অবস্থিত স্থানটি হইতে উড়োজাহাজটি কি হারে সরিয়া যাইতেছে?

41. একটি ঘুড়ি যখন 300 ফুট উচ্চতায় আকাশে উড়িতেছে, তখন অনুভূমিক তলে একটি বালক হইতে ঘুড়ির সুতার দৈর্ঘ্য 500 ফুট। বাতাসে ঘুড়িটি ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে বালকটি হইতে অনুভূমিক তলের সমান্তরালভাবে উড়িতে থাকিলে, বালকটি কি হারে সুতা ছাড়িতেছে?

42. অনুভূমিক তল হইতে 60 ফুট উচ্চতায় একটি প্রজ্জ্বলিত প্রদীপ আছে। প্রদীপটি হইতে 20 ফুট দূরত্বে 60 ফুট উচ্চতা হইতে একটি পাথর মুক্তভাবে পড়িতে থাকিলে অনুভূমিকতলে উহার ছায়ার বেগ (i) 1 সেকেণ্ড পরে এবং (ii) যখন উহা 25 ফুট নীচে থাকিবে কত হইবে? [t সেকেণ্ডের সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{1}{2} \times 32 \times t^2$ ফুট।]

নবম অধ্যায়

দ্বিতীয় ক্রমের অবকলিতক

(Second order derivatives)

9-1. সংজ্ঞা।

$\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ দ্বারা x এর সাপেক্ষে y বা $f(x)$ এর প্রথম ক্রমের অবকলিতক (First order derivative)-কে বুঝায়। সাধারণভাবে, $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$, x এর অপেক্ষক। সুতরাং, ইহাকে পুনরায় x এর সাপেক্ষে অবকলন করা যাইতে পারে। সুতরাং, $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ কে x এর সাপেক্ষে অবকলন করিলে, তাহাকে y বা $f(x)$ এর দ্বিতীয় ক্রমের অবকলিতক (Second order derivative) বলা হইবে ; এবং ইহাকে $\frac{d^2y}{dx^2}$, বা $f''(x)$, বা D^2y, বা y_2, বা y'' দ্বারা সূচিত করা হইবে। সুতরাং, সাধারণভাবে,

$$\frac{d^2y}{dx^2} \equiv f''(x) = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

$$\therefore \left(\frac{d^2y}{d^2x}\right)_{x=c} \equiv f''(c) = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}.$$

দ্রষ্টব্য : $Rf''(c) = \underset{h \to 0+}{Lt} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}$;

এবং, $Lf''(c) = \underset{h \to 0-}{Lt} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}$.

এখন, $Rf''(c) = Lf''(c)$ হইলে, $f''(c)$ থাকিবে।

9-2. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. $\frac{d^2y}{dx^2}$ বাহির কর, যখন :

(i) $y = \sin^n x$; **(ii)** $y = \sin 3x \cos 5x$; **(iii)** $y = e^{\sin x}$;

(iv) $y=\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}$; (v) $y=\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

(i) এখানে, $y=\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x.$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}\cos x-\frac{3}{4}\cos 3x.$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{3}{4}\sin x+\frac{9}{4}\sin 3x.$$

(ii) এখানে, $y=\frac{1}{2}(2\sin 3x\ \cos 5x)=\frac{1}{2}(\sin 8x-\sin 2x).$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=4\cos 8x-\cos 2x.$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=-32\sin 8x+2\sin 2x.$$

(iii) এখানে, $y=e^{\sin x}$. $\quad\therefore \dfrac{dy}{dx}=e^{\sin x}.\cos x.$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=e^{\sin x}.\cos^2 x-\sin x.\,(e^{\sin x})$$

$$=(\cos^2 x-\sin x)\,e^{\sin x}.$$

(iv) এখানে, $y=\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}\equiv\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{x-2}$, ধরি।

$$\therefore A(x-2)+B(x+3)\equiv 3x-1.$$

$$\therefore A+B=3\ ;\ 3B-2A=-1.$$

$$\therefore A=2\ ;\ B=1.$$

$$\therefore y=2(x+3)^{-1}+(x-2)^{-1}.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-2(x+3)^{-2}-(x-2)^{-2}.$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=4(x+3)^{-3}+2(x-2)^{-3}.$$

(v) এখানে, $y=\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)=2\tan^{-1}x.$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2}{1+x^2}.\quad \therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

উদাহরণ 2. $\frac{d^2y}{dx^2}$ বাহির কর, যখন :

(i) $\sin x+\cos y=1$;

(ii) $x=a(\theta+\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$.

(i) $\sin x+\cos y=1$ কে x এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$\cos x-\sin y.\ \frac{dy}{dx}=0. \quad \cdots \quad (1)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\cos x/\sin y. \quad \cdots \quad (2)$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\sin y\sin x-\cos x\cos y\cdot\frac{dy}{dx}}{\sin^2 y}$$

$$=-\left\{\frac{\sin y\sin x+\cos^2 x\cot y}{\sin^2 y}\right\}.$$

(ii) এখানে, $\frac{dx}{d\theta}=a(1+\cos\theta)$; $\frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}=\tan\frac{\theta}{2}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\times\frac{d\theta}{dx}$$

$$=\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\ \frac{1}{a(1+\cos\theta)}=\frac{1}{4a}\sec^4\frac{\theta}{2}.$$

উদাহরণ 3. $y=(x+\sqrt{1+x^2})^m$ হইলে, দেখাও যে,

$$(1+x^2)y_2+xy_1-m^2y=0.$$

এখানে, $y=(x+\sqrt{1+x^2})^m$.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}.\left\{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right\}$$

$$=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}.\ \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=m(x+\sqrt{1+x^2})^m\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{my}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\therefore \quad y_1\sqrt{1+x^2}=my.$$

$$\therefore \quad y_2\sqrt{1+x^2}+y_1.\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=my_1\ ;$$

বা, $y_2(1+x^2)+xy_1=my_1\sqrt{1+x^2}=m^2y.$

$$\therefore \quad (1+x^2)\,y_2+xy_1-m^2y=0.$$

উদাহরণ 4. $x=2\cos t-\cos 2t\ ;\ y=2\sin t-\sin 2t$ হইলে, দেখাও যে, $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=\pi/2}=-3/2.$

এখানে, $x=2\cos t-\cos 2t. \quad \therefore \quad \dfrac{dx}{dt}=-2\sin t+2\sin 2t.$

আবার, $y=2\sin t-\sin 2t. \quad \therefore \quad \dfrac{dy}{dt}=2\cos t-2\cos 2t.$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t-\cos 2t}{\sin 2t-\sin t}$$

$$=\frac{2\sin 3t/2.\ \sin t/2}{2\cos 3t/2.\ \sin t/2}=\tan 3t/2.$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\tan\frac{3t}{2}\right)=\frac{3}{2}\sec^2\frac{3t}{2}.\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{3}{2}\sec^2\frac{3t}{2}.\frac{1}{2(\sin 2t-\sin t)}.$$

$$\therefore \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=\pi/2}=\frac{3}{2}\cdot\sec^2\frac{3\pi}{4}.\frac{1}{2\left(\sin\pi-\sin\dfrac{\pi}{2}\right)}=-\frac{3}{2}.$$

উদাহরণ 5. $f(x)=x^3\sin\dfrac{1}{x},\ (x\neq 0)$, এবং $f(0)=0$ হইলে ; $f''(0)$ থাকিলে, উহা বাহির কর।

যখন $x\neq 0,\ f'(x)=3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}.$

আবার, $f'(0)=\underset{h\to 0}{Lt}\ \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ h^2\sin\frac{1}{h}=0.$$

$$\therefore\ f''(0) = \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{3\,h^2 \sin\frac{1}{h} - h\cos\frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\left(3\,h\sin\frac{1}{h} - \cos\frac{1}{h}\right)$$

$$= 3\times\underset{h\to 0}{Lt}\left(h\sin\frac{1}{h}\right) - \underset{h\to 0}{Lt}\ \cos\frac{1}{h}$$

$$= 3\times 0 - \underset{h\to 0}{Lt}\ \cos\frac{1}{h} = -\underset{h\to 0}{Lt}\ \cos\frac{1}{h}$$

এখন, যেহেতু $\underset{h\to 0}{Lt}\ \cos\frac{1}{h}$ এর অস্তিত্ব নাই, $\therefore\ f''(0)$ নাই।

প্রশ্নমালা 12

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ বাহির কর, যখন :

(i) $y=5^x$; (ii) $y=\sin^{-1}x$; (iii) $y=\log(x^2+4)$;

(iv) $y=x^2\log x$; (v) $y=\cos^3 x$; (vi) $y=\log(ax+b)^9$;

(vii) $y=\cos 2x \cos x$; (viii) $y=\sin^2 x\cos^2 x$;

(ix) $y=e^x\sin x$; (x) $y=e^{3x}\cos 4x$;

(xi) $y=\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$; (xii) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$; (xiii) $y=\dfrac{1}{x^4-a^4}$;

(xiv) $y=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$; (xv) $y=\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$;

(xvi) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$; (xvii) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$;

(xviii) $y=(ax^2+2bx+c)^{\frac{1}{2}}$ (xix) $y=\log(ax^2+2bx+c)$.

2. $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কর, যখন :

(i) $y=6x^5-3x^3+2x+5$; (ii) $x=\tan y$;

(iii) $x^2y+y^3=2$; (iv) $y=\tan(x+y)$;

(v) $ax^2+2h\,xy+by^2=1$; (vi) $x^3+y^3-3axy=0$;

(vii) $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$; (viii) $x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin^3\theta$;

(ix) $x=a(t+1/t),\ y=a(t-1/t)$;

(x) $x=t^2/(1+t),\ y=t/(1+t)$;

(xi) $x=a(\theta+\sin\theta),\ y=a(1+\cos\theta)$;

(xii) $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$;

(xiii) $x=f(t)$; $y=g(t)$.

3. দেখাও যে,

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$, যখন $y=\sin x+\cos x$;

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-m^2y=0$, যখন $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$;

(iii) $y^3y_2+a^2=0$, যখন $x^2+y^2=a^2$;

(iv) $y_2-2ay_1+(a^2+b^2)y=0$, যখন $y=e^{ax}\sin bx$; [C.U. 1966]

(v) $(a^2+x^2)y_2+xy_1=0$, যখন $y=\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(vi) $x^2y_2+xy_1+y=0$, যখন $y=a\cos(\log x)$;

(vii) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-2=0$, যখন $y=(\sin^{-1}x)^2$; [C.U. 1976]

(viii) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+a^2y=0$, যখন $y=\sin(a\sin^{-1}x)$;

[C.U. 1971]

(ix) $(1+x^2)y_2+(2x-1)y_1=0$, যখন $\log y=\tan^{-1}x$;

(x) $x^2y_2+xy_1+y=0$, যখন $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$.

4. প্রমাণ কর :

(i) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+(x^2+2)\,y=0$, যখন $y=x\sin x$;

(ii) $a^2y^3\frac{d^2y}{dx^2}+b^4=0$, যখন $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}+y\frac{dv}{dx}=0$, যখন $y=\operatorname{cosec} x+\cot x$;

(iv) $\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dv}{dx}+17y=0$, যখন $y=e^{4x}\cos x$;

(v) $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$, যখন $x^3+y^3=3axy$;

(vi) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{h^2-ab}{(hx+by)^3}$, যখন $ax^2+2hxy+by^2=1$;

(vii) $\frac{d^2y}{dt^2}+2k\frac{dy}{dt}+n^2y=0$, যখন $y=Ae^{-kt}.\cos(pt+\epsilon)$;

$n^2=k^2+p^2$;

(viii) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+a^2y=0$, যখন $x=\sin t$, $y=\sin at$.

5. প্রমাণ কর :

(i) $\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}=-a$, যখন $x^2+y^2=a^2$;

(ii) $\frac{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{x_2}=2a$, $x=0$ এতে, যখন $y^2=4ax$;

(iii) $\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}=4a$, $\theta=0$ এতে, যখন $x=a(\theta+\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$;

(iv) $\frac{(r^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r_1^2-rr_2}=\frac{4}{3}a$, $\theta=\pi$ এতে, যখন $r=a(1-\cos\theta)$.

6. প্রমাণ কর : $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{d^2y}{dx^2}\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$.

7. প্রাথমিক তত্ত্ব হইতে $f''(\pi)$ বাহির কর, যদি $f(x)=\sin x$ হয়।

8. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ হইলে, $f''(0)$ নির্ণয় কর।

9. $\phi(x)=\arctan x$ হইলে, $\phi''(0)$ বাহির কর।

10. $f(x)=|x|^3$ হইলে, $f''(1)$ এবং $f''(0)$ বাহির কর।

11. (*a*) $y_2(0)$ বাহির কর, যদি $y=e^{a\sin^{-1}x}$ হয়।

(*b*) $s_2(0)$ বাহির কর, যদি $s^2=at^2+2bt+c$ হয় ; ($t=$ স্বাধীন চলরাশি)।

12. $f(x)=x^4\sin\frac{1}{x}$, $(x\neq0)$ এবং $f(0)=0$ হইলে,

$f''(0)$ এবং $f''(1/\pi)$ বাহির কর।

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1 (পৃষ্ঠা—19)

4. (i) 53, 59, 61 ; 67, 71, 73 ; 79, 83, 89 ; 97.

7. (i) $a+\sqrt{b}$; $a-\sqrt{b}$; যেথানে (a, b)—মূলদ এবং $\sqrt{b}$ অমূলদ।

(ii) (*a*) অমূলদ : $\sqrt{3}+\frac{1}{6}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$; $\sqrt{3}+\frac{1}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$;
$\sqrt{3}+\frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$; $\sqrt{3}+\frac{2}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$; $\sqrt{3}+\frac{5}{6}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

(*b*) মূলদ : 9/5, 19/10, 2, 21/10, 11/5.

8. (i), (ii), (iii), (iv), (v), (xi)—সকলেই অমূলদ ;
(vi), (vii), (viii), (ix), (x)—সকলেই মূলদ।

9. (i) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ বৃহত্তর ;

(ii) $\sqrt{2}+\frac{1}{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; $\sqrt{2}+\frac{2}{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$;
$\sqrt{2}+\frac{3}{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; $\sqrt{2}+\frac{4}{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

(iii) অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা আছে।

$$\frac{1}{\sqrt{7}}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

10. (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii), (viii), —ইহাদের সকলকেই কেবল আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ করা যাইবে।

(i) $0\cdot\dot{9}2307\dot{6}$; (ii) $0\cdot9\dot{2}8571\dot{4}$;

(iii) $0\cdot9375\dot{0}$ বা, $0\cdot9374\dot{9}$; (iv) $0\cdot5104\dot{0}$ বা, $0\cdot5103\dot{9}$.

(v) $0\cdot\dot{9}7\dot{2}$, (vi) $0\cdot9\dot{8}82352941176470\dot{5}$; (vii) $0\cdot\dot{9}8901\dot{0}$;
(viii) $0\cdot288\dot{0}$; বা, $0\cdot287\dot{9}$;

11. (i) মূলদ ; (ii) মূলদ ; (iii) অমূলদ।

12. (i) সত্য ; (ii) সত্য ; (iii) সঠিক নহে ; উক্তিটি হইবে ; যে কোন মূলদরাশিকে অসীম আবৃত্ত দশমিকে পরিণত করা যাইতে পারে।"

(iv) Cantor-Dedekind এর স্বতঃসিদ্ধ অনুযায়ী উক্তিটি সত্য। (v) সত্য।

প্রশ্নমালা 2 (পৃষ্ঠা—41)

1. A তে 4টি ; B তে 2টি ; C তে 1 টি ; D তে 1 টি ; E তে অসংখ্য ; X এতে কোন পদ নাই।

2. 4টি ; যথা : $\{1, 2\}$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{\ \}$.

3. $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; $A\cap B=\{2\}$.
$A-B=\{3, 4\}$; $B-A=\{1, 5\}$.

4. 6টি ; $A=\{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; 5. $\{1, 4, 5\}$

6. $A\cup B=\{x : 0<x<3\}$; $A\cap B=\{x : 1<x\leqslant 2\}$
$A-(B\cap A)=\{x : 0<x\leqslant 1\}$;
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{x : 0<x\leqslant 1 ; 2<x<3\}$.

7. $A\cup B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $A\cap B\cap C=\{3, 4\}$

8. শূন্য। 9. $X'=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ $X\cap X'=\{\ \}$;
$X\cup X'=U\equiv\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

10. $B\cap C=\{d, f\}$; $B'\cup C'=\{a, b, c, e\}$.

12. $(P\cup Q)'=\{x \mid 3\leqslant x\leqslant 10\}$;
$(P\cap Q)'=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1 ; 2<x\leqslant 10\}$

15. $X-Y=\{x : 1<x\leqslant 2\}$; $Y-X=\{x : 5\leqslant x\leqslant 6\}$;
$(X\cup Y)'=\{x : -\infty<x\leqslant 1 ; 6<x<\infty\}$;
$(X-Y)'=\{x : -\infty<x\leqslant 1 ; 2<x<\infty\}$.

16. (i) 32 টি ; (ii) 2^{50} টি।

17 (a) (i) 15 ; (ii) 0 ; (b) (i) $x=6, -4$; (ii) $x=2, -5$.

18. $$|x-1|+|x|=\begin{cases} 2x-1, & \text{যখন } 1\leqslant x\leqslant 2 ; \\ 1, & \text{যখন } 0\leqslant x<1 ; \\ 1-2x, & \text{যখন } -1\leqslant x<0. \end{cases}$$

19. (i) $|x-2|\leqslant 4$; (ii) $|x+3|\leqslant 5$;
(iii) $|x-2|<2$; (iv) $|2x-3|<5$;
(v) $|3x+1\cdot 8|\leqslant 0\cdot 4$; (vi) $|15x-79|\leqslant 1$.

20. (i) $-1 \leqslant x \leqslant 5$; (ii) $-4 < x < 1$;

(iii) $4\frac{3}{4} < x < 5\frac{1}{4}$; (iv) $-\frac{5}{3} < x < -\frac{2}{3}$ বা, $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}$;

(v) $-\infty < x < -3$ বা, $7 < x < \infty$; (vi) $x < -\frac{1}{2}$;

(vii) $-\infty < x \leqslant -\frac{2}{3}$ বা, $4 \leqslant x < \infty$; (viii) $-3 < x < 3$.

24. $\delta = 31$; 25. (i) $-2 < x < 4$;

(ii) $-\infty < x \leqslant -3$ বা, $3 \leqslant x < \infty$;

(iii) $-3 < x < 2$; (iv) $x < 1$.

প্রশ্নমালা 3 (পৃষ্ঠা—55)

1. বিস্তার : $Y = \{5, 6, 7\}$; অন্তশ্চিত্রণ ; একমানবিশিষ্ট এক-এক চিত্রণ। 2. কোনও চিত্রণকে প্রকাশ না ; $f(a_4)$ এর মান b_1, b_2, b_3, b_4 এর একটি বা কয়েকটি হওয়া প্রয়োজনীয় শর্ত। 3. একমানবিশিষ্ট অন্তশ্চিত্রণ। 4. দুইমানবিশিষ্ট উপরিচিত্রণ। 5. $Y = \{7, 13, 19\}$. 6. $Y = \{10, 26, 50\}$; 7. $k = 5/2$; $f(5) = 10$. 8. বিস্তার : $Y = \{7, 9, 13, 15\}$; $f^{-1} : y \to (y-3)/2$. 9. বিস্তার : $Y = \{5, 11, 17, 23\}$; $g^{-1} : y \to (y+1)/3$. 10. ইহা একমানবিশিষ্ট এক-এক উপরিচিত্রণ। $f^{-1} : y \to (y-1)$. 11. 'gf' এর বিস্তার : $Z = \{c_3, c_1\}$. 12. $Y = \{1, 4, 9\}$; $Z = \{2, 8, 18\}$; 'gf' $= \{(1, 2), (2, 8), (3, 18)\}$; 'fg' $= \{(1, 4), (2, 16), (3, 36)\}$. 13. (i) 49 ; (ii) 19 ; (iii) 7 ; (iv) 1. 14. (i) $f^{-1}(y) = x = y - 3$; $g^{-1}(z) = x = \frac{1}{3}z$. (ii) $fg^{-1}(4) = 4\frac{1}{3}$; $gf^{-1}(4) = 3$; $f^{-1}g^{-1}(4) = -5/3$; $(fg)^{-1}(4) = 1/3$. 15. (i) এক-এক অনুরূপতা, (ii) এক-এক অনুরূপতা আছে। 16. এক-এক অনুরূপতা আছে।

প্রশ্নমালা 4 (পৃষ্ঠা—79)

1. $f(1) = 4$; $f(3) = 12$; $f(-2) = 7$; 2. $\phi(0) = 3$; $\phi(2) = 11$; $\phi(-1) = 5$. 3. $g(-2) = 43$; $g(3) = 188$; $g(1/2) = -1/8$; 4. $f(0) = -2$; $f(4) = 8$; $f(2) = \sqrt{2}$; 5. $f(0) = 1/2$; $f(2)$ অনির্ণেয় ; $f(-1) = 0$; 6. $\phi(0) = -3$; $\phi(2) = -3$; $\phi(-3)$ অনির্ণেয়।

7. $F(0)=\sqrt{10}$; $F(1)=2$; $F(3)$ থাকছে না ; $F(4)$ থাকছে না ; $F(6)=2$.
8. $F(0)=1$; $F(-1)=1/4$; $F(1/2)=2$. 9. a^3+8 ; 10. 0 ;
11. $F(0)=4$; $F(\pi/3)=1-3\sqrt{3}/2$; $F(-\pi/4)=2+3\sqrt{2}/2$; $F(-\pi)=4$; 12. $f(\pi/6)=(2\sqrt{3}-3)/3$; $f(-\pi/4)$ অনির্ণেয়।
13. $f(2)=5$; $f(3)=5$; $f(4)=-1$; $f(5)=-2$; 14. $\phi(0)=3$; $\phi(3)=12$; $\phi(-2)=-8$; 15. $F(1)=-3$; $F(0)=2$; $F(-2)=0$; $F(\sqrt{2})=2$. 16. $f(0)=4$; $f(-5)=8$; $f(-3)=4$; $f(4)=10$.
17. $f(-1)=f(0)=f(\sqrt{2})=f(5/2)=5$; 18. $\phi(3)=\phi(0)=2$; $\phi(\sqrt{3})=\phi(1+\sqrt{2})=-2$; 19. $f(5)=f(\cdot 5)=f(-3)=f(0)=f(\sin\pi/6)=2$; $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$; $f(e)=e$; $f(\pi)=\pi$; 20. $\phi(0)=0$; $\phi(3)=3$; $\phi(\cdot 3)=\cdot 3$; $\phi(\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$; $\phi(\sqrt{5}+1)=2+\sqrt{5}$; $\phi(e)=1+e$; $\phi(\log_e 2)=1+\log_e 2$; 22. 16 ; 23. 4·001 ; 31. $a=2$;
33. 22 ; 35. $\alpha.\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\beta.\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\gamma.\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$;
36. (i) $x=2$; (ii) $-\infty<x<2$; (iii) $1<x<3$; (iv) $-\infty<x<2$; $3<x<\infty$; (v) $x=(2n+1)\pi/2$; $n=0$, বা, পূর্ণসংখ্যা ; (vi) $x=n\pi$; $n=0$, বা, পূর্ণসংখ্যা ; (vii) $-\infty<x\leqslant 0$; (viii) $x=n\pi+\pi/4$; $n=0$, বা, পূর্ণসংখ্যা ; (ix) $+1\leqslant x\leqslant +3$; 37. (i) $[0, 1[$; (ii) $-\infty<y\leqslant -2$; $2\leqslant y<\infty$; (iii) $-\infty<y\leqslant -2$; $6\leqslant y<\infty$; (iv) $0\leqslant y\leqslant 3$; (v) $-\infty<y\leqslant(-3-2\sqrt{2})$; $-3+2\sqrt{2}\leqslant y<\infty$; (vi) $0\leqslant y\leqslant 1$; (vii) $-\infty<y<\infty$; 39. (i) যুগ্ম ; (ii) অযুগ্ম ; (iii) যুগ্ম ; (iv) অযুগ্ম ; (v) যুগ্ম ; (vi) যুগ্ম ; (vii) অযুগ্ম ; (viii) যুগ্ম। 40. (*a*) (i) monotone increasing ; (ii) monotone increasing ; (iii) monotone decreasing ; (iv) monotone increasing ; (v) monotone increasing ; 41. (*a*) ঊর্দ্ধস্থ-সীমা $=36$; নিম্নস্থ সীমা $=4$; 41 (*c*) সীমাবদ্ধ নহে ; 41 (*d*) সীমাবদ্ধ নহে ; 41 (*e*) 1 ; 42. (i) $y=x+2$; (ii) $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$, (iii) $x=2\sqrt{y}$ $(x>0)$; $x=-2\sqrt{y}$, $(x<0)$; (iv) $y=\log_{10}x$, $(x>0)$, (v) $y=10^x$; (vi) $y=\sin^{-1}x$, $(1\geqslant x\geqslant 0)$, $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$, $(x\neq -1)$.

প্রশ্নমালা 5 (পৃষ্ঠা—112)

2. (i) 14; (ii) 4; (iii) 3; (iv) 0; (v) 2/3; (vi) −3/5; 3. (i) 4; (ii) 6; (iii) 2; (iv) 12; (v) −4; (vi) 2; (vii) 0; (viii) −4; (ix) −2; (x) 2; (xi) 5/4; (xii) −1; (xiii) −2; (xiv) 0; (xv) 2; (xvi) 4; 4. (i) 1/2; (ii) 1/2; (iii) 1/4; (iv) $\frac{1}{2a}$; (v) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (vi) 2; (vii) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$; (viii) $\frac{1}{2}$; (ix) $\frac{1}{2}$; (x) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 5. (i) 2; (ii) e^3; (iii) 0; (iv) 2; (v) 0; (vi) 1; 7. $f(x)=\frac{x}{|x|}, (x\neq 0)$ এবং $f(0)=0$ হইলে, $\underset{x\to 0}{Lt} f(x)$ নাই যেখানে $a=0$; 8. $f(x)=|x-1|$, $x\neq 1$; $f(1)=1$; $a=1$; 9. $f(x)=2, x>2$; $f(x)=-2, x<2$; $f(2)=0$; $a=2$; 10. $f(x)=x^2$, $x\neq 0$; $f(0)=1$; 13. $\delta=\epsilon/2$; 8; 14. $f(0+0)=-2$; $f(0-0)=2$; নাই। 15. $\phi(1+0)=0$; $\phi(1-0)=0$; $\phi(1)=1$; আছে। 16. $F(2+0)=4$; $F(2-0)=5$; নাই। 17. $F(a)=\pi/2$, যদি $a>0$; $F(a)=-\pi/2$, যদি $a<0$; $F(a)=0$, যদি $a=0$.

18. $\phi(x)=x$, যদি $x>0$; $\phi(x)=-x$ যদি $x<0$; $\phi(0)=0$.

প্রশ্নমালা 6 (পৃষ্ঠা—117)

1. (i) 8/3; (ii) $5a^2/3$; (iii) 3/2; (iv) 3/5;
(v) 2; (vi) 1/2; (vii) $\log_e 2$; (viii) $-\log_e 5$;
(ix) −1; (x) 2; (xi) $\log_e (a/b)$; (xii) $\log_2 3$;
(xiii) 3; (xiv) −2; (xv) e^3; (xvi) e^{-4};
(xvii) 1; (xviii) e^{-1}.

2. (i) 1/2; (ii) 1; (iii) 1; (iv) 1;
(v) $\pi/180$; (vi) $\pi/180$; (vii) 1; (viii) 1;
(ix) 1; (x) −2; (xi) 2; (xii) 0;
(xiii) 9/2; (xiv) 1; (xv) −1;

3. (i) 2; (ii) 0; (iii) 1; (iv) 0;
(v) 0; (vi) $1/2$; (vii) -1; (viii) 0;
(ix) 2; (x) 2; (xi) $\cos a$; (xii) $\sec^2 a$;
(xiii) $1/2$; (xiv) $\sin a - a\cos a$;

4. (i) 3; (ii) $1/2$; (iii) 0; (iv) $1/2$;
(v) e^2; (vi) 0; (vii) 0; (viii) $\log_e a$.

5. $f(x)=1$, যখন $|x|<1$; $f(x)=1/2$; যখন $|x|=1$; $f(x)=0$, যখন $|x|>1$; $f(1+0)=0$; $f(1-0)=1$; $f(1)=1/2$; $f(-1-0)=0$; $f(-1+0)=1$; $f(-1)=1/2)$; নাই।

প্রশ্নমালা 7 (পৃষ্ঠা—128)

1. $x=0$ তে $f(x)$ সন্তত নহে; 2. $x=0, 1, -1$ এতে $f(x)$ সন্তত; 3. সন্তত নহে; 4. $x=2$ এতে $f(x)$ সন্তত নহে; কিন্তু $x=-2$ এতে ইহা সন্তত; 5. $f(2+0)=13$; $f(2-0)=13$; $f(2)=13$; $x=2$ এতে $f(x)$ সন্তত। 9. $x=1$ এতে $\phi(x)$ সন্তত; $x=2$ এবং $x=3$ এতে $\phi(x)$ সন্তত নহে; 10. $k=4$; 11. $f(1+0)=f(1-0)=f(1)=7/10$; সন্তত; 12. $f(3+0)=f(3-0)=6$; $f(3)=3$; সন্তত নহে; 13. $f(2+0)=3/2$; $f(2-0)=-3/2$; $f(2)=1/2$; সন্তত নহে। 14. $f(0+0)=f(0-0)=f(0)=6$; সন্তত। 15. সন্তত নহে। 16. $x=0$ এতে সন্তত নহে; $x>\pi$ এর জন্য সংজ্ঞাত নহে; 17. $x=1$ এবং $x=2$ এতে $f(x)$ সন্তত নহে; 18. $x=0$ এতে $f(x)$ সন্তত নহে; $x=1$ এতে সন্তত; $x=2$ এতে $f(x)$ শুদ্ধ; কারণ $x>2$ এর জন্য $f(x)$ সংজ্ঞাত নহে; 19. $x=-1$ এবং $x=1$ এতে $f(x)$ সন্তত নহে; $x=0$ এতে ইহা সন্তত। 20. $x=0$ এতে সন্তত নহে; 21. সন্তত নহে; 23. সন্তত; 24. $\phi(0)=(0)$; 25. (i) $x=0, -1$; (ii) $x=1, 2$; (iii) $x=(2n+1)\pi/2$, $n=0$ বা পূর্ণসংখ্যা; (iv) $x=(n\pi-\pi/4)$, $n=0$ বা পূর্ণসংখ্যা; (v) $x=n\pi$, $n=0$ বা পূর্ণসংখ্যা; (vi) $x=0$.

প্রশ্নমালা 8 (পৃষ্ঠা—143)

1. $\Delta x = 0\cdot02$; $\Delta y = 0\cdot1204$; 2. $\delta x = -0\cdot098$; $\delta y = -0\cdot147$
3. $\delta t = -0\cdot03$; $\delta s = -0\cdot2982$; 4. $\Delta y = 0\cdot0804$;
$\Delta y/\Delta x = 4\cdot02$; 5. $\delta x = 0\cdot01$; $\delta y \simeq -0\cdot00251$;
$\delta y/\delta x \simeq -0\cdot251$; 6. $-0\cdot4008$; $-0\cdot020002$;
$+0\cdot059982$; 8. $\Delta y = -0\cdot000554$; $-0\cdot01662$;

9 (i) $3x^2$; (ii) $-1/x^2$; (iii) $-6/x^3$;
(iv) $-\frac{1}{4}x^{-3/2}$; (v) $-1/(x+1)^2$; (vi) $\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$;
(vii) $2ax + b$; (viii) $\cos x$; (ix) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. (a) $Rf'(\pi) = Lf'(\pi) = 0$; $f'(\pi)$ আছে এবং $f'(\pi) = 0$; (b) 0 ;
13. অস্তিত্ব নাই ; 15. অস্তিত্ব নাই ; 17. অস্তিত্ব নাই ;
18. (a), (b) অস্তিত্ব নাই ; 19. $f'(x) = 3$, যখন $0 < x < 1$; $f'(x) = 2x + 1$, যখন $1 < x < 2$; $f'(1) = 3$; 20. $1/\sqrt{3}$; 21. $\pi/4$;
22. $1/\sqrt{3}$; 23. $\pi/3$; 24 $\tan^{-1}3$ বা $71°34'$ (প্রায়) ;
25. $3\pi/4$.

প্রশ্নমালা 9 (পৃষ্ঠা—161)

1. (i) $12x^3 + 2$; (ii) $\frac{3}{2}(x^2 - 1)x^{-5/2}$;
(iii) $-2/x^2 + \operatorname{cosec}^2 x$; (iv) $3(1 - x^{-7/4})$;
(v) $1 - \sqrt{a/x}$; (vi) $-10/x^3 + \sin x + 2e^x$;
(vii) $\frac{1}{3}x^{-2/3} + 3\sin x + \frac{1}{1+x^2}$;
(viii) $\frac{2}{x} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 2^x \log_e 2$;
(ix) $10^x \log_e 10 + 10x^9 + 1$; (x) $\frac{1}{x}\log_{10} e + e^{1+x}$:
(xi) $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 x - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} + 2^x \log_e 2$;

2. (i) $12x-5$; (ii) $2x\log_e x+x$;

(iii) $e^x\left(\cos^{-1}x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; (iv) $(3^x\log_e 3)\cot x-3^x\operatorname{cosec}^2 x$;

(v) $10^x x^9(x\log_e 10+10)$; (vi) $\sec x(\sec^2 x+\tan^2 x)$;

(vii) $e^x.(1+\log_e x+x\log_e x)$; (viii) $2x\tan^{-1}x+\frac{x^2+3}{x^2+1}$;

(ix) $1-\frac{1}{x^2}$; (x) $(\sin x+x\cos x)+e^x(\cot x-\operatorname{cosec}^2 x)$;

(xi) $\frac{10^x}{\sqrt{x}}\cdot\left\{\frac{1}{2}\log_e x+x(\log_e 10)\log_e x+1\right\}$.

3. (i) $-4x/(2x^2+1)^2$; (ii) $(x\cos x-\sin x)/x^2$;

(iii) $(4\sin x-x\cos x)x^3\operatorname{cosec}^2 x$; (iv) $2/(1-x)^2$;

(v) $\frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}$; (vi) $\frac{4x}{(1-x^2)^2}$;

(vii) $\frac{1}{\sqrt{x}.(1-\sqrt{x})^2}$; (viii) $\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$;

(ix) $\tan\frac{1}{2}x\sec^2\frac{1}{2}x$; (x) $-2/(1-\sin 2x)$;

(xi) $\cot\frac{1}{2}x.\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x$; (xii) $-(1+2x\cot^{-1}x)/(1+x^2)^2$;

(xiii) $2(1-x^2)/(1-x+x^2)^2$; (xiv) $\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}$;

(xv) $\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$.

8. $P(1, 3/4)$; $Q(-1, 3/4)$; 9. 0 ; 10 $x=1, 3$;
$P(1, 3)$ এবং $Q(3, 2\cdot2)$; 11. 0 ; কোটি $=13$ যখন $x=1$;
কোটি $=15$ যখন $x=3$; 12. $1, -1$;

13. $1, -1$, (দ্বিরুক্ত) ; 14. $x=0, 1$; নাই ।

প্রশ্নমালা 10 (পৃষ্ঠা—174)

1. (i) $3\cos 3x$; (ii) $-3\cos^2 x\cdot\sin x$;

(iii) $-3\operatorname{cosec}^3 x\cot x$; (iv) $6x\,e^{3x^2}$;

(v) $\frac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$; (vi) $\frac{3(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}$; (vii) $\frac{2x}{a^2+x^2}$;

(viii) $\cot x$; (ix) $\dfrac{\cos(\sqrt{1+x})}{2\sqrt{1+x}}$; (ix, a) $\dfrac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}$;

(x) $\dfrac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$; (xi) $\dfrac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$;

(xii) $\dfrac{1}{\sin x\cdot\sqrt{2\sin^2x-1}}$;

(xiii) $e^{\sin^{-1}x}/\sqrt{1-x^2}$; (xiv) $\dfrac{e^{\sqrt{\tan x}}}{2\cos x\cdot\sqrt{\sin x\cos x}}$;

(xv) $\dfrac{-1}{\sqrt{x}}\{e^{\operatorname{cosec}^2(\sqrt{x})}\}\operatorname{cosec}^2(\sqrt{x})\cdot\cot(\sqrt{x})$;

(xvi) $\dfrac{-\log a}{x(\log x)^2}$; (xvii) $(\log_e 10)(\cot x)\,10^{\log_e \sin x}$;

(xviii) $\{\sin x\cdot(\log\sin x)-(x\cos x)\log x\}/\{(x\sin x)(\log\sin x)^2\}$;

(xix) $\dfrac{-2}{(1+x)^2}\cdot\cos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$; (xx) $\dfrac{-(2+\sqrt{x})}{2(1+\sqrt{x})^2}\sin\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}\right)$;

(xxi) $1/(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$; (xxii) $\frac{1}{3}(3x^2+6x+2)\{x(x+1)(x+2)\}^{-\frac{2}{3}}$;

(xxiii) $-(2x^2-10x+11)/\{(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}\cdot(x^2-7x+12)^{\frac{3}{2}}\}$;

(xxiv) $x^2(3x^4+20x^2+36)/\{(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\cdot(x^2+3)^{\frac{3}{2}}\}$;

(xxiv, a) $3x^2(x^2-2)(x^2-6)(x^2-3)^{\frac{1}{2}}(x^2-4)^{-\frac{5}{2}}$;

(xxv) $1/\{2\sqrt{(x-a)(x-b)}\}$ (xxvi) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$;

(xxvii) $\sec x$; (xxviii) $\dfrac{\cot x}{2(\log\sin x)\sqrt{1+\log\log\operatorname{cosec} x}}$;

(xxix) $\dfrac{2}{1+x^2}$; (xxx) $\dfrac{2}{1+x^2}$; (xxxi) $\dfrac{1}{1+x^2}$;

(xxxii) $-2/(1+x^2)$; (xxxiii) $\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(xxxiv) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (xxxv) $\dfrac{3}{1+x^2}$;

(xxxvi) $\frac{1}{1+x^2}$; (xxxvii) $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$;

(xxxviii) $2 \sin 2x$; (xxxix) $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$;

(xl) $\frac{1}{2\sqrt{(x-b)(a-x)}}$; (xli) $\operatorname{sech} x$;

(xlii) $\frac{1}{2} \sec x$.

2\. (i) $\frac{1}{2 \sin \theta \cos^3\theta}$; (ii) $-\tan \theta$; (iii) 1;

(iv) $\cos^2\phi \cos 2\phi$; (v) $\frac{bt}{a(1+t^2)}$;

(vi) $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3$; (vii) $\frac{t(2-t^3)}{(1-2t^3)}$;

(viii) 1; (ix) $(1-t)^2/(1+t)^2$.

3\. (i) -1; (ii) $-(4x+5y)/(5x+6y)$;

(iii) $-b^2x/(a^2y)$; (iv) $-(y/x)^{\frac{1}{3}}$;

(v) $-b^m x^{m-1}/(a^m y^{m-1})$; (vi) y/x;

(vii) $-(ax+hy+g)/(hx+by+f)$; (viii) $y/\{x(y-1)\}$;

(ix) $\frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}$; (x) $\frac{\sqrt{1-y^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}$;

(xi) $\frac{y-1-x^2y^2}{1-x+x^2y^2}$; (xii) $\frac{\log \sin y + y \tan x}{\log \cos x - x \cot y}$;

(xiii) $-y/x$.

4\. (i) $2x^{2x} \cdot (1+\log x)$; (ii) $x^{\sin^{-1} x} \cdot \left\{\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1} x}{x}\right\}$;

(iii) $(\sin x)^x \cdot (\log \sin x + x \cot x)$; (iv) $x^{\log x} \cdot \left(\frac{2 \log x}{x}\right)$;

(v) $2(1+x^2)^{2x+5} \cdot \left\{\log(1+x^2) + \frac{x(2x+5)}{1+x^2}\right\}$;

(vi) $(\tan x)^{\cot x} \cdot (1 - \log \tan x) \operatorname{cosec}^2 x$;

(vii) $x^{e^x} \cdot \frac{e^x}{x} \cdot (1+x\log x)$;

(viii) $x^{x^x} \cdot (x^x) \cdot \left\{\frac{1}{x}+\log x+(\log x)^2\right\}$;

(ix) $x^{\tan^{-1}x} \cdot \left\{\frac{\log x}{1+x^2}+\frac{\tan^{-1}x}{x}\right\}+\frac{\pi}{180}\sec^2 x^0$;

(x) $e^{\tan x}.(\sec^2 x)+x^x.(1+\log x)$;

(xi) $x^x.(1+\log x)+(\sin x)^x.(\log\sin x+x\cot x)$;

(xii) $(\tan x)^x.\{\log\tan x+x\sec x\,\text{cosec}\,x\}$
$+x^{\tan x}\left\{\frac{\tan x}{x}+\sec^2 x\log x\right\}$.

5. (i) $\frac{5}{2}x^3$; (ii) $\frac{1}{2x^2}$; (iii) $\frac{\cos^2 x}{1+x^2}$;

(iv) $x^{\tan^{-1}x}.\{x\log x+(1+x^2)\tan^{-1}x\}/x$;

(v) 2 ; (vi) 1.

6. (i) $\frac{\sin(2\log x)}{x}$; (ii) $(b^x \log_e b)/(a+b^x)$; (iii) $-1/2$;

(iv) $\frac{1}{1+x^2}$; (v) $\sec x$; (vi) $\frac{1}{2}$;

(vii) $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; (viii) $\frac{2ab}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x}$;

(ix) $10^{10^x}.(10^x).(\log_e 10)^2$; (x) -1 ;

(xi) $\frac{2a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$; (xii) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}$;

(xiii) $\frac{4}{1+x^2}$; (xiv) $\frac{2}{3}$; 8. -1 ;

9. (i) $P(-3, 1)$; $Q(3, -1)$; (ii) $R(5, -3/5)$; $S(-5, 3/5)$.

10. 135° ; 11. 0 ; 1.

প্রশ্নমালা 11 (পৃষ্ঠা—188)

1. স্পর্শক : $y=x+3$; অভিলম্ব : $x+y=5$; 2. $a=6$; $b=-15$;

3. স্পর্শক : $y+4x=3$; অভিলম্ব : $4y-x+5=0$;

4. (a) স্পর্শক : $x=0$; অভিলম্ব : $y=0$;

(b) স্পর্শক : $y=2a$; অভিলম্ব : $x=a\pi$;

5. (i) স্পর্শক : $xx_1+yy_1=a^2$; অভিলম্ব : $y_1x-x_1y=0$;

(ii) স্পর্শক : $yy_1=2a(x+x_1)$; অভিলম্ব : $y-y_1=\frac{-y_1}{2a}(x-x_1)$;

(iii) স্পর্শক : $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$; অভিলম্ব : $\frac{a^2(x-x_1)}{x_1}=\frac{b^2(y-y_1)}{y_1}$;

(iv) স্পর্শক : $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$; অভিলম্ব : $\frac{a^2(x-x_1)}{x_1}=-\frac{b^2(y-y_1)}{y_1}$

12. (i) $1<x<3$; (ii) $-\infty<x<2$ এবং $4<x<\infty$;

(iii) $1<x<2$; (iv) $2<x<\infty$.

16. $dx=0{\cdot}0025$; $\delta y\simeq 0{\cdot}0876$; (প্রায়) ;

$dy=0{\cdot}0875$; $\delta y-dy\simeq 0{\cdot}0001$;

$\delta y/\delta x\simeq 35{\cdot}035$; $\frac{dy}{dx}=35$.

17. $dx=-0{\cdot}003$; $\Delta y\simeq -0{\cdot}1557$; $dy=-0{\cdot}156$;

$\Delta y-dy\simeq 0{\cdot}0003$; $\frac{dy}{dx}-\frac{\Delta y}{\Delta x}\simeq 0{\cdot}0870$.

18. (i) 84·016 ; (ii) 42·8024 ;

19. (i) 1·319 ; (ii) 2·488 ; (iii) 1·2028 :

(iv) 0·0623 ; (v) 2·3056 ; (vi) 1·0022 ;

(vii) 0·883 ; (viii) 0·8657 ;

(ix) 0·965 ; (x) 2·07 ;

20. (i) 0·008 ; (ii) 0·″12566 ;

21. 7976·024 ঘন ইঞ্চি ; 0·003006 ;

22. 30·8 ঘন ইঞ্চি ; প্রকৃত বৃদ্ধি : 31·008 ঘন ইঞ্চি ;

24. 0·99% ; 25. 0·047124 বর্গ ফুট ;

26. 0·000873 বর্গ ইঞ্চি ; 27. 0·0291% ;

28. +6·3806 ফুট, বা, −6·1834 ফুট ; 29. 0·1164 ফুট ;

31. 28 ; 32. 20 ফুট/সেকেণ্ড ;

33. 84 ফুট/সেকেণ্ড ; 34. 5 ফুট/সেকেণ্ড (সাংখ্যমানে) ;

35. 0·3 বর্গ ইঞ্চি/সেকেণ্ড ; 36. 10 ইঞ্চি/সেকেণ্ড ;

37. 0·00398 সে. মি./সেকেণ্ড ; 1 বর্গ সে. মি./সেকেণ্ড ;

38. $\frac{7}{8}$ ফুট/মিনিট (প্রায়) ; 39. $8/\pi$ ফুট/সেকেণ্ড ;

40. মিনিটে 75/34 মাইল ; 41. ঘণ্টায় 4 মাইল ;

42. (i) 150 ফুট/সেকেণ্ড ; (ii) 76·8 ফুট/সেকেণ্ড।

প্রশ্নমালা 12 (পৃষ্ঠা—197)

1. (i) $5^x.(\log_e 5)$; (ii) $\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; (iii) $\dfrac{2(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$;

(iv) $3+2\log x$; (v) $-(3/4)(\cos x+3\cos 3x)$;

(vi) $-a^2p/(ax+b)^2$; (vii) $-\frac{1}{2}(9\cos 3x+\cos x)$;

(viii) $2\cos 4x$; (ix) $2e^x.\cos x$;

(x) $-e^{3x}.(7\cos 4x+24\sin 4x)$; (xi) $-2ax/(x^2+a^2)^2$;

(xii) $\frac{1}{2}\{(x-2)^{-3}-(x+2)^{-3}\}$; (xiii) $4x^2(5x^4+3a^4)(x^4-a^4)^{-3}$;

(xiv) $2\{(x+2)^{-3}-(x+3)^{-3}\}$;

(xv) $[2\{(3x^2-b^2)(x^2+b^2)^{-3}-(3x^2-a^2)(x^2+a^2)^{-3}\}/(a^2-b^2)$

(xvi) $\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$; (xvii) $\dfrac{-x}{(1+x^2)^2}$; (xviii) $\dfrac{ac-b^2}{(ax^2+2bx+c)^{3/2}}$;

(xix) $-2(a^2x^2+2abx+2b^2-ac)/(ax^2+2bx+c)^2$.

2. (i) $6x(20x^2-3)$; (ii) $\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$;

(iii) $6y(x^2-3y^2)(x^2+y^2)/(x^2+3y^2)^3$;

বা, $3y^2(1-2y^3)/(1+y^3)^3$;

(iv) $-2(1+y^2)/y^5$; (v) $(h^2-ab)/(hx+by)^3$;

(vi) $2a^3xy/(ax-y^2)^3$; (vii) $-b^4/(a^2y^3)$;

(viii) $\dfrac{1}{3a\sin\theta\cos^4\theta}$; (ix) $\dfrac{-4a^2}{y^3}$;

(x) $\dfrac{-2(1+t)^3}{t^3(2+t)^3}$; (xi) $-\dfrac{1}{4a}\sec^4\dfrac{\theta}{2}$;

(xii) $\dfrac{1}{at\cos^3 t}$; (xiii) $\{f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)\}/\{f'(t)\}^3$;

7. 0 ; 8. 0 ; 9. 0 ; 10. $f''(1)=6$;

$f''(0)=0$; 11. (a) a^2 ; (b) $(ac-b^2)c^{-3/2}$;

12. $f''(0)=0$; $f''(1/\pi)=6/\pi$.

পরিশিষ্ট

A-1. সীমাস্থ মান সংক্রান্ত উপপাদ্য :

মনে করি, $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ f(x)=l$ এবং $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ g(x)=m$, যেখানে a, l, m—সসীম। তাহা হইলে, $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \{f(x)\pm g(x)\}=l\pm m$.

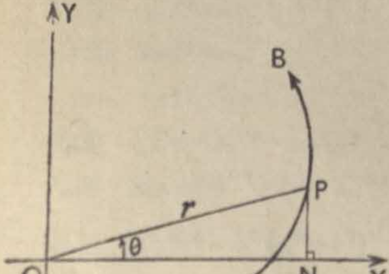
এক্ষেত্রে একটী নির্দ্দিষ্ট বাস্তব রাশি $\epsilon/2$ (যতই ক্ষুদ্র হউক না কেন) লইলে, ধনাত্মক বাস্তব রাশি δ_1 এবং δ_2 পাওয়া যাইবে, যাহাতে

$$|f(x)-l|<\epsilon/2, \quad \text{যখন } 0<|x-a|<\delta_1\ ;$$
$$|g(x)-m|<\epsilon/2, \quad \text{যখন } 0<|x-a|<\delta_2.$$
$$\therefore \left.\begin{array}{l}|f(x)-l|<\epsilon/2\\ |g(x)-m|<\epsilon/2\end{array}\right\}, \quad \begin{array}{l}\text{যখন } 0<|x-a|<\delta,\\ \text{যেখানে } 0<\delta<(\delta_1, \delta_2).\end{array}$$

এখন, $|\{f(x)+g(x)\}-(l+m)| = |\{f(x)-l\}+\{g(x)-m\}|$
$\leqslant |f(x)-l|+|g(x)-m|<\epsilon/2+\epsilon/2,$
যখন $0<|x-a|<\delta$;
অর্থাৎ $|\{f(x)+g(x)\}-(l+m)|<\epsilon$, যখন $0<|x-a|<\delta$.
$\therefore \underset{x\to a}{Lt}\ \{f(x)+g(x)\}=l+m.$

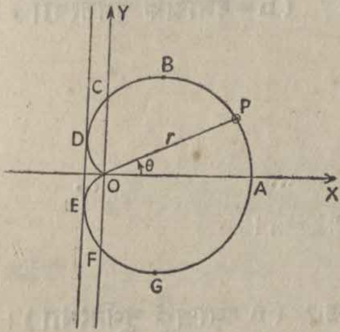
আবার, $|\{f(x)-g(x)\}-(l-m)| = |\{f(x)-l\}-\{g(x)-m\}|$
$\leqslant |f(x)-l|+|g(x)-m|<\epsilon/2+\epsilon/2,$
যখন $0<|x-a|<\delta$;
অর্থাৎ, $|\{f(x)-g(x)\}-(l-m)|<\epsilon$, যখন $0<|x-a|<\delta$.
$\therefore \underset{x\to a}{Lt}\ \{f(x)-g(x)\}=l-m.$

A-2. অক্ষবর্ত্তী স্থানাঙ্কে বক্ররেখার সমীকরণ :

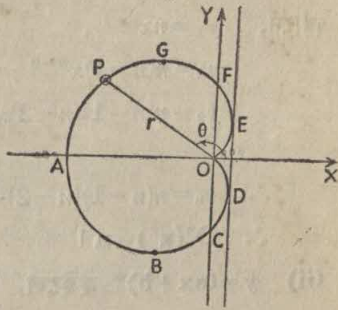


মনে করি, OX এবং OY যথাক্রমে সমকৌণিক কার্তেশিয়ান্ x-অক্ষ এবং y-অক্ষ এবং AB একটি বক্ররেখা। AB বক্ররেখার উপরে $P(x, y)$ অবস্থিত। $PN \perp OX$; সুতরাং, $ON=x$; $PN=y$. মনে করি, $OP=r$; এবং OP, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহা হইলে, P বিন্দুর অক্ষবর্ত্তী স্থানাঙ্ক হইবে (r, θ) এবং AB বক্ররেখার সমীকরণ হইবে : $r=f(\theta)$, যেখানে O কে মূল বিন্দু এবং OX কে মূল রেখা বলা হয়।

দৃষ্টান্ত : Cardioid :



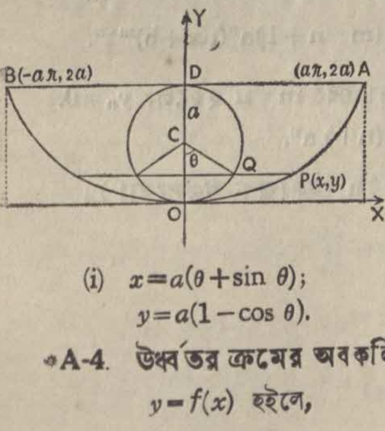
(i) $r=a(1+\cos\theta)$



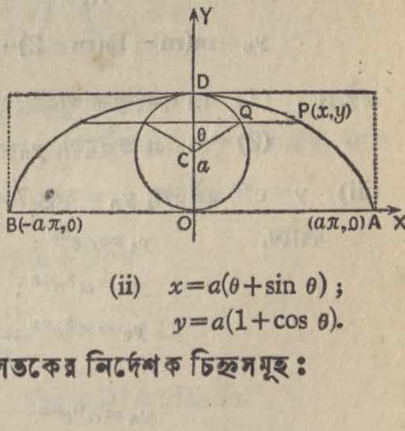
(ii) $r=a(1-\cos\theta)$

A-3. প্যারামেট্রিক আকারে বক্ররেখার সমীকরণ :

দৃষ্টান্ত : Cycloid :



(i) $x=a(\theta+\sin\theta)$;
$y=a(1-\cos\theta)$.



(ii) $x=a(\theta+\sin\theta)$;
$y=a(1+\cos\theta)$.

A-4. উর্ধ্বতর ক্রমের অবকলিতকের নির্দেশক চিহ্নসমূহ :

$y=f(x)$ হইলে,

$$\frac{dy}{dx}=y_1=y'=f'(x)=Dy=Df(x);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y_2=y''=f''(x)=D^2y=D^2f(x);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=y_3=y'''=f'''(x)=D^3y=D^3f(x);$$

... ...

$$\frac{d^ny}{dx^n}=y_n=y^{(n)}=f^{(n)}(x)=D^ny=D^nf(x).$$

A·5. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণঃ

(i) $y=x^n$ হইলে, y_n এর মান কত? (n=ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)।

এখানে, $y_1=nx^{n-1}$;

$y_2=n(n-1)x^{n-2}$;

$y_3=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$;

... ...

$\therefore\ y_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1.=n!$

$\therefore\ D^n(x^n)=n!$

(ii) $y=(ax+b)^m$ হইলে, y_n=কত? (n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)।

এখানে, $y_1=m(ax+b)^{m-1}.a$;

$y_2=m(m-1)(ax+b)^{m-2}.a^2$;

$y_3=m(m-1)(m-2)(ax+b)^{m-3}.a^3$;

... ...

$\therefore\ y_n=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$.

দ্রষ্টব্য : (1) m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $m<n$ হইলে, $y_n=0$.

(2) $m=n$ হইলে, $y_n=(n!)\,a^n$.

(iii) $y=e^{ax}$ হইলে, y_n=কত? (n=ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)।

এখানে, $y_1=ae^{ax}$;

$y_2=a^2e^{ax}$;

$y_3=a^3e^{ax}$;

... ...

$\therefore\ y_n=a^ne^{ax}$.

$\therefore\ D^n(e^{ax})=a^ne^{ax}$.

দ্রষ্টব্য : $f(D)\,e^{ax}=f(a)\,e^{ax}$.

(iv) অনুরূপভাবে দেখানো যাইবে :

(a) $D^n\left(\frac{1}{x+a}\right)=\frac{(-1)^n(n!)}{(x+a)^{n+1}}$;

(b) $D^n\{\log_e(x+a)\}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$.

(v) $y=\sin(bx+c)$ হইলে, y_n = কত ? (n=ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)।

এখানে, $y_1=b\cos(bx+c)=b\sin(bx+c+\pi/2)$;

$$y_2=-b^2\sin(bx+c)=b^2\sin(bx+c+2.\pi/2);$$

$$y_3=-b^3\cos(bx+c)=b^3\sin(bx+c+3.\pi/2);$$

... ...

$$\therefore\ y_n=b^n\sin(bx+c+n\pi/2).$$

$$\therefore\ \mathbf{D^n\sin(bx+c)=b^n\sin(bx+c+n\pi/2).}$$

দ্রষ্টব্য : (1) $D^2\sin(bx+c)=(-b^2)\sin(bx+c)$;

(2) $D^4\sin(bx+c)=(-b^2)^2\sin(bx+c)$;

(3) $f(D^2)\sin(bx+c)=f(-b^2)\sin(bx+c)$.

(iv) অনুরূপভাবে দেখানো যাইবে :

(1) $D^n\cos(bx+c)=b^n\cos(bx+c+n\pi/2)$;

(2) $D^2\cos(bx+c)=(-b^2)\cos(bx+c)$;

(3) $D^4\cos(bx+c)=(-b^2)^2\cos(bx+c)$;

(4) $f(D^2)\cos(bx+c)=f(-b^2)\cos(bx+c)$.

(vii) $y=e^{ax}V$, যদি V = x এর অবকলনযোগ্য অপেক্ষক হয়, তবে y_n = কত ? (n=ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)।

এখানে, $y_1=ae^{ax}V+e^{ax}\dfrac{dV}{dx}=e^{ax}(a+D)V$;

$$y_2=a^2e^{ax}V+2ae^{ax}\frac{dV}{dx}+e^{ax}\frac{d^2V}{dx^2}=e^{ax}(a+D)^2V;$$

$[(a+D)^2\equiv a^2+2aD+D^2$; $(a+D)^2\not\equiv D^2+2Da+a^2$,

$\because\ Da=0]$.

একইভাবে, $y_3=e^{ax}(a+D)^3V$;

... ...

$$y_n=e^{ax}(a+D)^nV.$$

দ্রষ্টব্য : অনুরূপভাবে দেখানো যাইবে :

$$f(D)(e^{ax}V)=e^{ax}f(a+D)V.$$

***A-5. সমাকলনের ক্ষেত্রে D এর ব্যবহার :**

'সমাকলন'কে 'অবকলনের' বিপরীত প্রক্রিয়া মনে করিলে, আমরা

$Df(x)=f'(x)$ হইতে পাই :

$$f(x)=D^{-1}f'(x)=\int f'(x)\,dx,$$

যেখানে, $\int \equiv \frac{1}{D}$, (সূচকচিহ্ন হিসাবে)।

$$\therefore \quad \int \phi(x)\,dx=\frac{1}{D}\,\phi(x)\;;$$

$$\frac{1}{D^2}\,\phi(x)=\int\left\{\int \phi(x)\cdot dx\right\}dx\;;$$ ইত্যাদি।

***A-6. D-সম্পর্কিত সূত্রাবলী :** (ইহাদের প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত)।

I. $f(D)\,e^{ax}=f(a)\,e^{ax}$; $f(a)=$ সসীম ;

II. $f(D)(e^{ax}V)=e^{ax}\,f(a+D)\,V$;

III. $f(D^2)\sin(bx+c)=f(-b^2)\sin(bx+c)$; $f(-b^2)$ সসীম ;

IV. $f(D^2)\cos(bx+c)=f(-b^2)\cos(bx+c)$; $f(-b^2)$ সসীম ;

V. $(D+a)(D+b)\,y=\{D^2+(a+b)\,D+ab\}\,y$

$\qquad =(D+b)(D+a)\,y$; (a, b ধ্রুবক) ;

VI. $\frac{1}{D}(e^{ax}V)=e^{ax}\,\frac{1}{a+D}\,V=e^{ax}\,\frac{a-D}{a^2-D^2}\,V$;

VII. $\frac{1}{D}\,\phi(x)=\int \phi(x)\,dx$;

VIII. $\frac{1}{D^2}\,\phi(x)=\int\left\{\int \phi(x)\,dx\right\}dx$; ইত্যাদি।

A-7. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. মান বাহির কর : $\int e^{2x}x^3 dx.$

$$I=\frac{1}{D}(e^{2x}x^3)=e^{2x}\frac{1}{2+D}x^3$$

$$=e^{2x}\times\frac{1}{2}\left(1+\frac{D}{2}\right)^{-1}x^3$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\left(1-\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}-\frac{D^3}{8}+\cdots\cdots\right)x^3+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}\right)+C.$$

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর : $\int e^{ax}\cos(bx+c)\,dx.$

$$I=\frac{1}{D}e^{ax}\cos(bx+c)=e^{ax}\frac{1}{a+D}\cos(bx+c)$$

$$=e^{ax}\frac{a-D}{a^2-D^2}\cos(bx+c)$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-D)\cos(bx+c)+k\ ;\ k=\text{অস্থায়ী ধ্রুবক}$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cos(bx+c)+b\sin(bx+c)\}+k.$$

উদাহরণ 3. মান বাহির কর : $\int e^{ax}\sin(bx+c)\,dx.$

$$I=\frac{1}{D}e^{ax}\sin(bx+c)=e^{ax}\frac{1}{a+D}\sin(bx+c),$$

$$=e^{ax}\frac{a-D}{a^2-D^2}\sin(bx+c)$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-D)\sin(bx+c)+k\ ;\quad k=\text{অস্থায়ী ধ্রুবক}$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\sin(bx+c)-b\cos(bx+c)\}+k$$

সমাকলন

[Integral Calculus]

প্রথম অধ্যায়

Indefinite Integral

1-1. সংজ্ঞা : কোন চলরাশির সাপেক্ষে একটি অপেক্ষকের **'Integration'** বলিতে ঐ চলরাশির সাপেক্ষে ঐ অপেক্ষকের **'Differentiation'**-এর বিপরীত পদ্ধতিকে বুঝাইবে।

মনে করি, $\frac{d}{dx}\phi(x)=f(x).$ ... ... (1)

তাহা হইলে x-এর সাপেক্ষে $\phi(x)$-কে $f(x)$-এর **Primitive** বা, **Indefinite Integral** বা, **Antiderivative** বলা হইবে এবং তখন লেখা হইবে,

$$\int f(x)dx=\phi(x). \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

এখানে, $f(x)$-কে **Integrand** বলা হইবে। কোন একটি অপেক্ষকের **Integral** বাহির করিবার পদ্ধতিকে **Integration** বলে। (2)-এতে **'$\int$'** দ্বারা **Integration** চিহ্ন এবং $\int dx$ দ্বারা x-এর সাপেক্ষে **integration**-কে বুঝাইতেছে।

দ্রষ্টব্য : $\int f(x)dx=\phi(x)$ কে অনেক সময়

(i) $\frac{1}{D}f(x)=\phi(x)$, বা, (ii) $D^{-1}f(x)=\phi(x)$

বা, (iii) $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}f(x)=\phi(x)$ রূপে লেখা হয়, যেখানে $D\equiv\frac{d}{dx}$.

কয়েকটি দৃষ্টান্ত :

(i) $\because \frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$; $\therefore \int \cos x\, dx=\sin x.$

এখানে, x-এর সাপেক্ষে $\cos x$ এর integral (বা primitive) $\sin x$

(ii) $\because \frac{d}{d\theta}(\tan\theta)=\sec^2\theta$; $\therefore \int \sec^2\theta\, d\theta=\tan\theta$.

এখানে θ এর সাপেক্ষে $\sec^2\theta$-এর integral (বা primitive) $\tan\theta$.

(iii) $\because \frac{d}{dz}(z^5)=5z^4$; $\therefore \int 5z^4 dz=z^5$.

(iv) $\because \frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$; $\therefore \int nx^{n-1}dx=x^n$.

মন্তব্য : মনে করি, $\frac{d}{dx}\phi(x)=f(x)$. ... ... (1)

তাহা হইলে, Integration-এর সংজ্ঞা অনুযায়ী

$$\int f(x)dx=\phi(x)\ ; \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=\frac{d}{dx}\phi(x),$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$. ... ... (3)

সেইজন্য 'Differentiation' এবং 'Integration'—এই প্রক্রিয়া দুইটির একটিকে অপরটির বিপরীত পদ্ধতি বলা হয়।

আবার, (1) এবং (2) হইতে দেখা যাইতেছে,

$$\int\left\{\frac{d}{dx}\phi(x)\right\}dx=\phi(x)$$

অর্থাৎ, $\int \phi'(x)dx=\phi(x)$. ... ... (4)

1·2. Constant of Integration :

যদি, $\frac{d}{dx}\phi(x)=f(x)$ হয়, তবে,

$$\frac{d}{dx}\{\phi(x)+c\}=f(x),$$

যেখানে c, x-নিরপেক্ষ **একটি অস্থায়ী ধ্রুবক (an arbitrary constant).** সুতরাং, $f(x)$ এর একটি Integral $\phi(x)$ হইলে, ঐ $f(x)$ এর সাধারণ Integral $\phi(x)+c$ হইবে। সুতরাং, সাধারণভাবে,

$$\int f(x)dx=\phi(x)+c,$$

যেখানে c, x-নিরপেক্ষ একটি অস্থায়ী ধ্রুবক। এখানে, $\{\phi(x)+c\}$ কে 'Indefinite Integral' বলা হয়।

আবার, এই c-কে **Constant of Integration'** বলা হয়।

দৃষ্টান্ত :

(i) $\because \frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$; $\therefore \int \cos x\, dx=\sin x.$

(ii) $\because \frac{d}{dx}(\sin x+5)=\cos x$; $\therefore \int \cos x\, dx=\sin x+5.$

(iii) $\because \frac{d}{dx}(\sin x-3)=\cos x$; $\therefore \int \cos x\, dx=\sin x-3.$

(iv) $\because \frac{d}{dx}(\sin x+c)=\cos x$; $\therefore \int \cos x\, dx=\sin x+c.$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(1) মনে করি, $\phi'(x)=\psi'(x)$.

$$\therefore \int \phi'(x)dx=\int \psi'(x)dx \text{ ; বা, } \phi(x)+c_1=\psi(x)+c_2,$$

যেখানে, c_1 এবং c_2 দুইটি অস্থায়ী ধ্রুবক।

$$\therefore \phi(x)=\psi(x)+c, \quad (c=c_2-c_1),$$

যেখানে, c, x-নিরপেক্ষ একটি অস্থায়ী ধ্রুবক। সুতরাং, এইরূপ ক্ষেত্রে, উভয়পক্ষে Integration ধ্রুবক না দিয়া কেবল এক পার্শ্বে দিলেই চলিবে।

(2) আবার, $\frac{d}{dx}\int \phi(x)dx=\phi(x)$;

$$\text{কিন্তু, } \int \left\{\frac{d}{dx}\phi(x)\right\}dx=\int \phi'(x)dx=\phi(x)+c.$$

সুতরাং, সাধারণতঃ, $\frac{d}{dx}\int \phi(x)dx$ এবং $\int \left\{\frac{d}{dx}\phi(x)\right\}dx$-এর মান সমান নাও হইতে পারে।

মন্তব্য : সংক্ষেপে লেখার সুবিধার জন্য এই পুস্তকে Indefinite Integral-এর সমাধানে অনেক সময় constant of integration লেখা থাকিবে না; কিন্তু ধরিয়া লইতে হইবে যে, ঐখানে constant of integration উহ্য আছে। তবে, স্মরণ রাখা দরকার, প্রতিটি Indefinite Integral সমাধান করার পর অতি অবশ্যই constant of integration দিতেই হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

(i) $\frac{d}{dx}(x)=1$ বলিয়া, $\int 1\, dx=x$ অর্থাৎ, $\int dx=x.$

(ii) x এর যে কোন নির্দিষ্ট (definite) ধনাত্মক বাস্তব মানের জন্য $\log_e x$ এর মান সুনির্দিষ্ট এবং বাস্তব ; এবং তখন,

$$\int \frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x} \text{ বলিয়া } \int \frac{1}{x}dx=\log_e x,\ (x>0).$$

আবার, x এর যে কোন নির্দিষ্ট ঋণাত্মক বাস্তব মানের জন্য $\log_e(-x)$ এর মান সুনির্দিষ্ট এবং বাস্তব ; এবং তখন,

$$\frac{d}{dx}\{\log_e(-x)\}=\frac{1}{x} \text{ বলিয়া, } \int \frac{1}{x}dx=\log_e(-x),\ (x<0).$$

সুতরাং, সাধারণভাবে, $\int \frac{1}{x}dx=\log_e |x| =\frac{1}{2}\log_e x^2,\ (x\neq 0).$

1-3. Elementary Integrals :

(1) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$; $(n\neq -1)$; (2) $\int dx=x.$

(3) $\int \frac{1}{x}dx=\text{lox}_e |x|$, $(x\neq 0)$; (4) $\int e^x dx=e^x.$

(5) $\int \sin x\, dx=-\cos x$; (6) $\int \cos x\, dx=\sin x.$

(7) $\int \sec^2 x\, dx=\tan x$; (8) $\int \text{cosec}^2 x\, dx=-\cot x.$

(9) $\int \sec x \tan x\, dx=\sec x$; (10) $\int \text{cosec}\, x \cot x\, dx = -\text{cosec}\, x$;

(11) $\int \sinh x\, dx=\cosh x$; (12) $\int \cosh x\, dx=\sinh x$;

(13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x$; (14) $\int \frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x$;

(15) $\int \frac{dx}{(ax+b)}=\frac{1}{a}\log|(ax+b)|$.

এখানে, $\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$, $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

'sinhx' কে 'sine hyperbolic x' এবং 'coshx' কে 'cos hyperbolic x' রূপে পড়া হয়।

1-4. Two Important Rules :

(1) $\int Af(x)\,dx=A\int f(x)\,dx.$

(2) $\int \{f(x)\pm g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$

প্রমাণ :

(1) মনে করি, $\int f(x)\,dx=\phi(x).$

$\therefore\ \frac{d}{dx}\phi(x)=f(x)$, এবং $\frac{d}{dx}\{A\,\phi(x)\}=A\,f(x)$

যেখানে, A একটি x-নিরপেক্ষ ধ্রুবক।

$\therefore\ \int A\,f(x)\,dx=A\,\phi(x)=A\int f(x)\,dx.$

দৃষ্টান্ত : (i) $\int 3\cos x\,dx=3\int\cos x\,dx=3\sin x+c.$

(ii) $\int 5x^4\,dx=5\int x^4\,dx=5.\frac{x^5}{5}+c=x^5+c.$

দ্রষ্টব্য : $\int A\,dx=A\int dx=A\,x+c.$

(2) মনে করি, $\int f(x)\,dx=\phi(x)$, এবং $\int g(x)\,dx=\psi(x).$

তাহা হইলে, $\frac{d}{dx}\phi(x)=f(x)$, এবং $\frac{d}{dx}\psi(x)=g(x).$

$\therefore\ \frac{d}{dx}\{\phi(x)\pm\psi(x)\}=\frac{d}{dx}\phi(x)\pm\frac{d}{dx}\psi(x)=f(x)\pm g(x).$

$\therefore\ \int\{f(x)\pm g(x)\}\,dx=\varphi(x)\pm\psi(x)=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$

এই নিয়মটি দুই এর অধিক সসীম (finite) সংখ্যক অপেক্ষকের জন্যও প্রযোজ্য হইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ মনে করি, $F'(x)=\phi'(x)+\psi'(x)$.

$$\therefore \int F'(x)\,dx=\int \phi'(x)\,dx+\int \psi'(x)\,dx\,;$$

বা, $F(x)=\phi(x)+c_1+\psi(x)+c_2$

$$=\phi(x)+\psi(x)+c\,;\quad (c=c_1+c_2).$$

সুতরাং, এইরূপ ক্ষেত্রে, কেবলমাত্র একটি constant of integration দিলেই যথেষ্ট।

1-5. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ (Illustrative Examples) :

দ্রষ্টব্য : প্রতিক্ষেত্রেই প্রদত্ত Integral কে I দ্বারা সূচিত করা হইবে।

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর : $\int (3+\sin x)\,dx.$

এখানে, $I\equiv\int(3+\sin x)\,dx=\int 3\,dx+\int \sin x\,dx$

$$=3\int dx+\int \sin x\,dx$$

$$=3x-\cos x+c.$$

উদাহরণ 2. মান বাহির কর : $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-5\cos x\right)dx.$

$$I=\int(3x^{-\frac{1}{2}}-5\cos x)\,dx$$

$$=\int 3x^{-\frac{1}{2}}\,dx-\int 5\cos x\,dx$$

$$=3\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx-5\int \cos x\,dx$$

$$=3\times 2\times\sqrt{x}-5\times\sin x+c$$

$$=6\sqrt{x}-5\sin x+c.$$

উদাহরণ 3. মান বাহির কর : $\int \frac{\cot x}{\tan x}\,dx$

$$I=\int \cot^2 x\,dx$$

$$=\int(\operatorname{cosec}^2 x-1)\,dx$$

$$=\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx-\int dx=-\cot x-x+c.$$

উদাহরণ 4. মান বাহির কর : $\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx.$

$$I=\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$$

$$=\int \sqrt{(\sin^2 x+\cos^2 x)+2 \sin x \cos x}\ dx$$

$$=\int \sqrt{(\cos x+\sin x)^2}\, dx$$

$$=\int (\cos x+\sin x)\, dx\ ;\ \text{যখন } (\cos x+\sin x)>0$$

$$=\int \cos x\, dx+\int \sin x\, dx=\sin x-\cos x+c.$$

উদাহরণ 5. মান বাহির কর : $\int \frac{d\theta}{1-\sin \theta}.$

$$I=\int \frac{1}{1-\sin \theta}\, d\theta=\int \frac{1+\sin \theta}{1-\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$=\int \frac{1+\sin \theta}{\cos^2\theta}\, d\theta=\int (\sec^2\theta+\sec \theta \tan \theta)\, d\theta$$

$$=\tan \theta+\sec \theta+c.$$

উদাহরণ 6. মান বাহির কর : $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx.$

$$I=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$$

$$=\int (\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x)\, dx$$

$$=\tan x-\cot x+c.$$

উদাহরণ 7. $\frac{dy}{dx}=2x+1$ এবং $y=1$ যখন $x=0$, হইলে, y বাহির কর।

এখানে, $y=\int (2x+1)\, dx=x^2+x+c.$

এখন, যেহেতু, $y=1$ যখন $x=0$; $\therefore\ 1=0+0+c$;

$\therefore\ c=1.\quad \therefore\ y=x^2+x+1.$

প্রশ্নমালা 1

মান নির্ণয় কর : (Examples 1 to 44) :

1. $\int (x^4+3x+1)\, dx$;   2. $\int (x+1)^3 dx$;

3. $\int (x+2)(x-3)^2 dx$;   4. $\int \frac{(1+x)^3}{x^2}\, dx$;

5. $\int \frac{x^5+3x^4-2}{x^3}\, dx$:   6. $\int x\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$;

7. $\int \frac{3x-2}{x\sqrt{x}}\, dx$;   8. $\int \sqrt{x}\left(x^2+\frac{2}{x}\right) dx$;

9. $\int (5\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x})\, dx$;   10. $\int (2\sqrt{x}+3x)^2 dx$;

11. $\int (\sqrt[3]{x}+2e^x)\, dx$;   12. $\int (5-2\sin x)\, dx$;

13. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\cos x+2\right) dx$;   14. $\int \left(\frac{1}{x}-\operatorname{cosec}^2 x\right) dx$;

15. $\int (x+2e^x+\sec^2 x)\, dx$;   16. $\int (x^2+3\sin x-2)\, dx$;

17. $\int \tan^2\theta\, d\theta$;   18 $\int \cot^2\theta\, d\theta$;

19. $\int \frac{\sec^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta}\, d\theta$;   20. $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

21. $\int \sec x\,(\sec x-\tan x)\, dx$; 22. $\int \frac{\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta}{\tan\theta}\, d\theta$;

23. $\int \frac{1}{1+\cos x}\, dx$;   24. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$;

25. $\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$;   26. $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$;

27. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$;   28. $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$;

29. $\int \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{1+\sin 2\theta}}\, d\theta$;   30. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\, dx$;

31. $\int \tanh^2\theta\, d\theta$;   32. $\int \coth^2\theta\, d\theta$;

33. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx$; 34. $\int (a^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}})^3 dx$;

35. $\int\frac{x^3-6x+9}{x+3} dx$; 36. $\int\frac{2x^2-7x-15}{2x+3} dx$;

37. $\int\frac{2x^3-x^2+3x+2}{x^2-x+2} dx$; 38. $\int\frac{(x^3+8)(x-1)}{(x^2-2x+4)} dx$;

39. $\int\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} d\theta$; 40. $\int \cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{8}\right) dx$

41. $\int\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x} dx$; 42. $\int\frac{\sec^3 x+\operatorname{cosec}^3 x}{\sec x \operatorname{cosec} x} dx$;

43. $\int\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x} dx$; 44. $\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sqrt{1+\cos 4x}} dx$;

45. দেওয়া আছে, $f'(x)=x^2+\sin x$; $f(x)$ বাহির কর, যদি $f(x)=0$ হয়, যখন $x=0$.

46. যদি $\frac{dy}{dx}=3x^2-4x+1$ এবং $y=-1$ যখন $x=1$, দেওয়া থাকে, তবে y এর মান বাহির কর।

1—6. Some Standard Integrals :

(1) $\int e^{ax} dx=\frac{e^{ax}}{a}$; (2) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\log_e a}, (a>0)$;

(3) $\int \sin mx\, dx=-\frac{\cos mx}{m}$; (4) $\int \cos mx\, dx=\frac{\sin mx}{m}$;

(5) $\int \sinh mx dx=\frac{\cosh mx}{m}$; (6) $\int \cosh mx\, dx=\frac{\sinh mx}{m}$.

[ইঙ্গিত : $\because\ \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)=e^{ax}$; $\therefore\ \int e^{ax} dx=\frac{e^{ax}}{a}$; etc.]

1·7. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ।

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর : $\int (3e^{3x}+\sin 2x)\, dx.$

$$I=3\int e^{3x}dx+\int \sin 2x\; dx$$
$$=3\times\frac{e^{3x}}{3}-\frac{\cos 2x}{2}+c$$
$$=e^{3x}-\tfrac{1}{2}\cos 2x+c.$$

উদাহরণ 2. মান বাহির কর : $\int (x^4+4^x)\, dx.$

$$I=\int x^4 dx+\int 4^x dx$$
$$=\frac{x^5}{5}+\frac{4^x}{\log_e 4}+c.$$

উদাহরণ 3. মান বাহির কর : $\int \sin^3 x\, dx.$

$$I=\int \tfrac{1}{4}(4\sin^3 x)\, dx$$
$$=\tfrac{1}{4}\int (3\sin x-\sin 3x)\, dx$$
$$=\tfrac{1}{4}\left(-3\cos x+\frac{\cos 3x}{3}\right)+c.$$

উদাহরণ 4. মান বাহির কর : $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx.$

$$I=\int \sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}\, dx$$
$$=\int \left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)dx\;;\text{ যেখানে } \left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)>0,$$
$$=2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}+c.$$

উদাহরণ 5. মান নির্ণয় কর : $\int \frac{e^{3x}+e^{5x}}{e^x+e^{-x}}\, dx.$

$$I=\int \frac{e^{4x}(e^{-x}+e^x)}{(e^{-x}+e^x)}\, dx$$
$$=\int e^{4x}dx=\tfrac{1}{4}e^{4x}+c.$$

উদাহরণ 6. মান বাহির কর : $\int \sin 2x \cos 4x\, dx$.

$$I=\frac{1}{2}\int (2\cos 4x \sin 2x)\, dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \{\sin 6x-\sin 2x\}\, dx$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\left(-\frac{\cos 6x}{6}\right)-\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\right]+c$$

$$=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{12}\cos 6x+c.$$

প্রশ্নমালা 2

মান বাহির কর :

1. $\int (e^{-3x}+5^x)\, dx$;
2. $\int (e^{2x}+1)^2\, dx$;
3. $\int \sin^2 x\, dx$;
4. $\int \cos^2 x\, dx$;
5. $\int \cos^3 x\, dx$;
6. $\int \sin^4 x\, dx$;
7. $\int \cos^4 x\, dx$;
8. $\int \sqrt{1-\sin x}\, dx$;
9. $\int \sqrt{1+\cos x}\, dx$;
10. $\int \sqrt{1-\cos x}\, dx$;
11. $\int (\sin x-\cos x)^2\, dx$;
12. $\int \cos^2 2x\, dx$;
13. $\int \sin x \cos x\, dx$;
14. $\int \cos^2 \alpha x\, dx$;
15. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$;
16. $\int \sin x \cos 3x\, dx$;
17. $\int (8^{1+2x}+4^{1-x})\, dx$;
18. $\int (a^{-2x}+a^{2x})\, dx$, $(a>0)$;
19. $\int (e^{x\log a}+e^{a\log x})\, dx$; $(a>0)$;
20. $\int \frac{e^{3x}+e^{5x}}{e^x+e^{3x}}\, dx$;

21. $\int \cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx$; 22. $\int \sin 2x \cos 3x\,dx$;

23. $\int \cos x \cos 4x\,dx$; 24. $\int \sin 3x \sin x\,dx$;

25. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$; 26. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx$;

27. $\int (\sin^3 x+\cos^3 x)dx$; 28. $\int (\sin^4 x+\cos^4 x)\,dx$;

29. $\int (2+\cos 2x)^2 dx$; 30. $\int \sin^2 x \cos 2x\,dx$;

31. $\int \cos^2 x \sin 2x\,dx$; 32. $\int \frac{\cos 2\alpha-\cos 2x}{\cos\alpha+\cos x}\,dx$;

33. $\int \frac{\cos^6 x+\sin^6 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$; 34. $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}(2+2\sin 2x)dx$;

35. $\int \cos\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)dx$; 36. $\int \cos^2 x \cos^2 2x\,dx$.

1-8. Method of Substitution for Integration :

মনে করি, $\int f(x)dx=\text{I}$. $\therefore\ \frac{d\text{I}}{dx}=f(x)$.

এখন, $x=\phi(z)$ ধরিলে, $\frac{dx}{dz}=\phi'(z)$.

$$\therefore\ \frac{d\text{I}}{dz}=\frac{d\text{I}}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}=f(x)\cdot\phi'(z)$$

অর্থাৎ, $\frac{d\text{I}}{dz}=f\{\phi(z)\}\cdot\phi'(z)$.

সুতরাং, Integration এর সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\text{I}=\int f\{\phi(z)\}\cdot\phi'(z)dz.$$

$\therefore\ \int f(x)dx=\int f\{\phi(z)\}\phi'(z)dz$, যদি $x=\phi(z)$ হয়।

সুতরাং, $\int f(x)dx$-এর মান নির্ধারণে $x=\phi(z)$ ধরিলে, Integrand $f(x)$-এ x-এর পরিবর্তে $\phi(z)$ এবং dx-এর পরিবর্তে $\phi'(z)dz$ লিখিতে হইবে। অবশ্য $\phi(z)$-এর আকার বিভিন্ন অঙ্কের জন্য বিভিন্ন এবং এমনকি একই অঙ্কের জন্যও বিভিন্ন হইতে পারে।

অবশ্য, অনেক সময়, $\int f(x)dx$-এর জন্য, $z=g(x)$ ধরিলে, সহজভাবে সমাধান করা যাইতে পারে। এখানেও, $g(x)$-এর আকার বিভিন্ন অঙ্কের জন্য বিভিন্ন, এবং এমনকি একই অঙ্কের জন্যও বিভিন্ন হইতে পারে।

দৃষ্টান্ত :

আমরা জানি, $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$; $\therefore \int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x.$

এখন, $x=\tan\theta$ ধরিলে, $dx=\sec^2\theta\, d\theta.$

$$\begin{aligned}\therefore\ I&=\int\frac{1}{1+x^2}dx\\&=\int\frac{1}{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta\, d\theta\\&=\int d\theta=\theta=\tan^{-1}x.\end{aligned}$$

কিন্তু, $z=\tan^{-1}x$ ধরিলে, $dz=\frac{1}{1+x^2}dx$;

$$\begin{aligned}\therefore\ I&=\int\frac{1}{1+x^2}dx\\&=\int dz=z=\tan^{-1}x.\end{aligned}$$

মন্তব্য : Integration-এর সময় একই অঙ্কে বিভিন্নভাবে Substitution-এর জন্য বিভিন্ন আকারে উত্তর পাওয়া গেলেও, প্রকৃতপক্ষে তাহারা একই অপেক্ষকের derivative হইবে; এবং তাহাদিগকে সরলীকরণ করিলে দেখা যাইবে Integral-গুলির মধ্যে কেবলমাত্র ধ্রুবকের পার্থক্য থাকিবে।

দৃষ্টান্ত :

$I=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$-এর জন্য $x=\sin\theta$ ধরিলে,

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\, d\theta\\&=\int d\theta=\theta+c=\sin^{-1}x+c.\end{aligned}$$

আবার, $I=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$-এর জন্য $x=\cos\theta$ ধরিলে,

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\sin\theta\, d\theta)$$

$$=-\int d\theta=-\theta+k$$

$$=-\cos^{-1}x+k$$

$$=\sin^{-1}x-\frac{\pi}{2}+k, \qquad \left(\because\ \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\sin^{-1}x+\left(k-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\sin^{-1}x+c, \qquad \left(c=k-\frac{\pi}{2}\right)$$

1-9. Two Important Rules :

(1) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log_e|f(x)|$.

(2) $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx=e^x f(x)$.

সমাধান : (1) ধরি, $z=f(x)$; $\therefore\ f'(x)dx=dz$.

$$\therefore\ \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int\frac{dz}{z}$$

$$=\log_e|z|=\log|f(x)|.$$

(2) ধরি, $z=e^x f(x)$.

$$\therefore\ \frac{dz}{dx}=e^x f(x)+e^x f'(x);$$

$$\therefore\ dz=e^x[f(x)+f'(x)]dx.$$

$$\therefore\ \int e^x[f(x)+f'(x)]dx$$

$$=\int dz=z=e^x f(x).$$

দৃষ্টান্ত :

$$I=\int x^2(x+3)e^x dx$$
$$=\int e^x[x^3+3x^2]dx$$
$$=\int dz, \qquad (z=e^x \cdot x^3)$$
$$=z+c=e^x x^3+c.$$

1-10. Some Standard Integrals :

(1) $\int \tan x\, dx=\log|\sec x|$.

(2) $\int \cot x\, dx=\log|\sin x|$.

(3) $\int \sec x\, dx=\log|\sec x+\tan x|$
$$=\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|.$$

(4) $\int \operatorname{cosec} x\, dx=\log|\operatorname{cosec} x-\cot x|$
$$=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

সমাধান :

(1) $\int \tan x\, dx=\int \frac{\sec x \tan x}{\sec x}\, dx=\log|\sec x|$

অথবা, $\int \tan x\, dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$
$$=-\int \frac{dz}{z}, \quad (z=\cos x)$$
$$=-\log|z|$$
$$=-\log|\cos x|=\log|\sec x|.$$

(2) $\int \cot x\, dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx=\log|\sin x|$.

আবার, $\int \cot x\, dx=\int \frac{\operatorname{cosec} x \cot x}{\operatorname{cosec} x}\, dx$
$$=-\log|\operatorname{cosec} x|=\log|\sin x|.$$

(3) $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx$

$$= \log | \sec x + \tan x | .$$

কিন্তু, $\sec x + \tan x = \frac{1 + \text{s n}\, x}{\cos x}$

$$= \frac{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{x}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\therefore \int \sec x\, dx = \log \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right|.$$

(4) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x - \cot x)}{(\operatorname{cosec} x - \cot x)} dx$

$$= \log | \operatorname{cosec} x - \cot x | .$$

কিন্তু, $\operatorname{cosec} x - \cot x = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

$$= \frac{2 \sin^2\frac{x}{2}}{2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}.$$

$$\therefore \int \operatorname{cosec} x\, dx = \log \left| \tan\frac{x}{2} \right|.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ $\int \tan mx\, dx = \frac{1}{m} \int \frac{m \sin mx}{\cos mx} dx$

$$= -\frac{1}{m} \log | \cos mx |$$

$$= \frac{1}{m} \log | \sec mx | .$$

1-11. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ।

উদাহরণ 1. মান বাহির কর: $\int x(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

ধরি, $1+2x^2=z$;

$$\therefore \frac{dz}{dx}=4x\,; \quad \therefore x\,dx=\frac{1}{4}\,dz.$$

$$\therefore \int x(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\int(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}.\,x\,dx$$

$$=\int z^{\frac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{4}dz \quad =\tfrac{1}{4}\int z^{\frac{3}{2}}dz=\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot z^{\frac{5}{2}}+c$$

$$=\tfrac{1}{10}(1+2x^2)^{\frac{5}{2}}+c.$$

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর: $\int\frac{\cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

ধরি, $\sqrt{x}=z$; $\therefore \frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\therefore \int\frac{\cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx=\int\cot(\sqrt{x})\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$=\int\cot z\,(2dz)=2\int\frac{\cos z}{\sin z}\,dz$$

$$=2\log|\sin z|+c=2\log|\sin\sqrt{x}|+c.$$

উদাহরণ 3. মান নির্ণয় কর: $\int\frac{e^x}{x}(1+x\log x)\,dx,\ x>0.$

$$I=\int\frac{e^x}{x}(1+x\log x)\,dx=\int e^x\left(\log x+\frac{1}{x}\right)dx,$$

ধরি, $e^x\log x=z$; $\therefore dz=e^x\left(\log x+\frac{1}{x}\right)dx.$

$$\therefore I=\int dz=z+c=e^x\log x+c.$$

উদাহরণ 4. মান বাহির কর: $\int\frac{\tan x}{\log\cos x}\,dx.$

ধরি, $z=-\log\cos x$; $(\cos x>0)$.

$$\therefore \frac{dz}{dx}=-\left(\frac{1}{\cos x}\right)\times(-\sin x)=\tan x.$$

$$\therefore \tan x\,dx=dz.$$

সুতরাং, $I=\int \frac{1}{\log \cos x} \tan x\, dx$

$$=\int \frac{dz}{-z}=-\int \frac{1}{z} dz$$

$$=-\log z+c=-\log(-\log \cos x)+c$$

$$=-\log(\log \sec x)+c.$$

উদাহরণ 5. মান নির্ণয় কর : $\int \frac{x^7 dx}{(1-x^4)^3}$.

ধরি, $1-x^4=z$.

$\therefore \quad \frac{dz}{dx}=-4x^3$; অর্থাৎ, $x^3 dx=-\frac{1}{4} dz$.

$$\therefore \quad I=\int \frac{x^7 dx}{(1-x^4)^3}=\int \frac{x^4}{(1-x^4)^3}(x^3 dx)$$

$$=\int \frac{1-z}{z^3}\left(-\tfrac{1}{4} dz\right)$$

$$=\tfrac{1}{4}\int \{z^{-2}-z^{-3}\} dz$$

$$=\tfrac{1}{4}\{-z^{-1}+\tfrac{1}{2} z^{-2}\}+c$$

$$=\frac{1}{8(1-x^4)^2}-\frac{1}{4(1-x^4)}+c.$$

উদাহরণ 6. মান বাহির কর : $\int \frac{\cos x\, dx}{(a+b \sin x)^2}$.

ধরি, $a+b \sin x=z$.

$\therefore \quad dz=b \cos x\, dx$.

$$\therefore \quad \int \frac{\cos x\, dx}{(a+b \sin x)^2}=\frac{1}{b}\int \frac{dz}{z^2}$$

$$=-\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{z}+c$$

$$=-\frac{1}{b(a+b \sin x)}+c.$$

উদাহরণ 7. মান নির্ণয় কর : $\int \frac{2x+3}{3x+4}\,dx$.

$$\int \frac{2x+3}{3x+4}\,dx = \tfrac{1}{3}\int \frac{6x+9}{3x+4}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{3}\int \frac{2(3x+4)+1}{(3x+4)}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{3}\int 2dx + \tfrac{1}{3}\int \frac{1}{3x+4}\,dx$$
$$= \tfrac{2}{3}\int dx + \tfrac{1}{9}\int \frac{3}{3x+4}dx$$
$$= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{9}\log|3x+4| + c.$$

উদাহরণ 8. মান বাহির কর : $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

ধরি, $x = a\sin\theta$; $\therefore\ dx = a\cos\theta\, d\theta$.

$$\therefore \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a^3\cos^3\theta}$$
$$= \frac{1}{a^2}\int \sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{a^2}\tan\theta + c$$
$$= \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + c.$$

উদাহরণ 9. মান নির্ণয় কর : $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

এখন, $\sin x+\cos x = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\therefore \int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sec z\, dz,\ \left(z = x-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)\right| + c$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| + c.$$

উদাহরণ 10. মান বাহির কর : $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}\, dx.$

$$I=\int \frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})}{(x+3)-(x+2)}\, dx$$

$$=\int \sqrt{x+3}\, dx-\int \sqrt{x+2}\, dx$$

$$=\tfrac{2}{3}\,(x+3)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{2}{3}\,(x+2)^{\frac{3}{2}}+c.$$

উদাহরণ 11. মান বাহির কর : $\int \frac{x^2\sec^2 x+\tan^2 x}{1+x^2}\, dx$

প্রদত্ত $\text{Integral}=\int \frac{x^2(1+\tan^2 x)+\tan^2 x}{1+x^2}\, dx$

$$=\int\left(\frac{x^2}{1+x^2}+\tan^2 x\right) dx=\int\left(\frac{x^2}{1+x^2}+\sec^2 x-1\right) dx$$

$$=\int \sec^2 x\, dx-\int \frac{dx}{1+x^2}\ ;\ x=\tan\phi\ ;\ \phi=\tan^{-1}x\ ;$$

$$=\tan x-\int \frac{\sec^2\phi\, d\phi}{\sec^2\phi}=\tan x-\int d\phi$$

$$=\tan x-\phi+c=\tan x-\tan^{-1}x+c.$$

উদাহরণ 12. মান নির্ণয় কর : $\int \tan x\tan 2x\tan 3x\, dx\cdot$

আমরা জানি, $\tan 3x=\tan(x+2x)=\frac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x\tan 2x}.$

$\therefore\ \tan 3x-\tan x\tan 2x\tan 3x=\tan x+\tan 2x$

$\therefore\ \tan x\tan 2x\tan 3x=\tan 3x-\tan 2x-\tan x.$

$\therefore$ প্রদত্ত $\text{Integral}=\int(\tan 3x-\tan 2x-\tan x)\, dx,$

যেখানে $\int \tan mx\, dx=\frac{1}{m}\log|\sec mx|.$

$\therefore$ প্রদত্ত Integral

$$=\tfrac{1}{3}\log|\sec 3x|-\tfrac{1}{2}\log|\sec 2x|-\log|\sec x|+c.$$

প্রশ্নমালা 3

মান নির্ণয় কর :

1. $\int \frac{dx}{(2x-1)^5}$; 2. $\int x^2(x^3+a^3)^4 dx$;

3. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^4}}$; 4. $\int \frac{2x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

5. $\int \frac{x^5 dx}{(2+x^3)^2}$; 6. $\int \frac{x^3 dx}{1+x^8}$; [put $x^4 = \tan\phi$].

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} dx$; 8. $\int (2x-3)\sqrt{x+4}\, dx$;

9. $\int \frac{(x+3)\, dx}{\sqrt{2x+5}}$; 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^3}$;

11. $\int \frac{\cos x\, dx}{3+2\sin x}$; 12. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{1-\tan x}}$;

13. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\sin x}}$; 14. $\int \frac{(1+\cos x)\, dx}{\sqrt[3]{x+\sin x}}$;

15. $\int \frac{\sin^{-1}x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 16. $\int \frac{\cot^{-1}x}{1+x^2} dx$;

17. $\int \frac{\cos \log x}{x} dx$; 18. $\int \frac{dx}{x(\log x)^2}$;

19. $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2} dx$; 20. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+\tan^{-1}x}}$;

21. $\int \frac{\cot x\, dx}{\log \sin x}$; 22. $\int \frac{\sec x \operatorname{cosec} x\, dx}{\log \tan x}$;

23. $\int \sec x \log(\sec x + \tan x)\, dx$; 24. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x}$;

25. $\int \frac{2x-1}{2x+3} dx$; [C. U. 1971] 26. $\int \frac{a+bx}{c+dx} dx$; [C. U. 1970]

27. $\int \frac{2x-5}{3x+7} dx$; 28. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+5}} dx$;

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-3}}$; 30. $\int e^x(\sin x + \cos x) dx$;

31. $\int e^x(\log \sin x+\cot x)dx$; 32. $\int e^x(1+\tan x)\sec x\, dx$;

33. $\int e^x(\tan x-\log \cos x)dx$; 34. $\int e^x(x-2)\frac{dx}{x^3}$;

35. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$; 36. $\int \frac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^2}\,dx$;

[C. U. 1969]

37. $\int x^2\operatorname{cosec}(x^3)dx$; 38. $\int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

39. $\int \frac{\sec(\sin^{-1}x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 40. $\int \frac{e^x(1+x)}{\sin(xe^x)}\,dx$;

41. $\int \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}\,dx$; 42. $\int \frac{\cos x\, dx}{(a+b\sin x)^2}$;

43. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$; 44. $\int \frac{\sin^5\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$;

45. $\int \frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta$; [C. U. 1974] 46. $\int \sin^6\theta\cos^3\theta\, d\theta$;

47. $\int \sin^5\theta\, d\theta$; 48. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$;

49. $\int \sin x\cot^3 x\, dx$ 50. $\int \cot^3(2x)dx$; [C. U. 1972]

51. $\int \tan x\sec^4 x\, dx$; 52. $\int \cot x\operatorname{cosec}^5 x\, dx$;

53. $\int \frac{dx}{\sin x-\cos x}$ 54. $\int (\tan x-x)\tan^2 x\, dx$;

[put $(\tan x-x)=v$].

55. $\int \tan^5 x\sec^4 x\, dx$; 56. $\int \frac{\sqrt{(\tan x)}}{\sin x\cos x}\,dx$;

57. $\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$; 58. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$;

[put $x=a\sin^2\phi$] [C. U 1969]

59. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$; 60. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$;

[put $x^2=\sec\phi$].

1-12. Some Standard Integrals :

(1) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$.

(2) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$. বা, $=\sinh^{-1}\frac{x}{a}$.

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|$ বা, $=\cosh^{-1}\frac{x}{a}$.

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}$.

সমাধান :

(1) ধরি, $x=a\tan\theta$. $\therefore\ dx=a\sec^2\theta\, d\theta$.

$$\therefore\ \int \frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\sec^2\theta}$$

$$=\frac{1}{a}\int d\theta=\frac{1}{a}\theta=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}.$$

(2) $$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{1}{(x-a)(x+a)}dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\log|x-a|-\log|x+a|\right]=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$$

(3) ধরি, $z=\log_e(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

$$\therefore\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\times\left\{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+a^2})}\times\frac{(x+\sqrt{x^2+a^2})}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\therefore\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=dz.$$

$$\therefore\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int dz=z=\log(x+\sqrt{x^2+a^2}).$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

ধরি, $x=a\sinh\theta$. $\therefore$ $dx=a\cosh\theta\, d\theta$.

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int \frac{a\cosh\theta\, d\theta}{\sqrt{(a^2\sinh^2\theta+a^2)}}$$

$$=\int \frac{\cosh\theta\, d\theta}{\cosh\theta}=\int d\theta$$

$$=\theta=\sinh^{-1}\frac{x}{a}.$$

(4) ধরি, $z=\log(x+\sqrt{x^2-a^2})$.

$$\therefore \frac{dz}{dx}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\times\left\{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=dz.$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int dz=z=\log\mid x+\sqrt{x^2-a^2}\mid$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

ধরি, $x=a\cosh\theta$; $\therefore$ $dx=a\sinh\theta\, d\theta$.

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int \frac{a\sinh\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\cosh^2\theta-a^2}}$$

$$=\int \frac{\sinh\theta\, d\theta}{\sinh\theta}=\int d\theta$$

$$=\theta=\cosh^{-1}\frac{x}{a}.$$

(5) ধরি, $x=a\sin\theta$; $\therefore$ $dx=a\cos\theta\, d\theta$.

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta}=\int d\theta$$

$$=\theta=\sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

আবার, $x=a\cos\theta$ ধরিলে,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\int d\theta=-\theta=-\cos^{-1}\frac{x}{a}.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$

(ii) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}.$

(iii) $\sinh^{-1} x = \log (x + \sqrt{x^2+1}).$

(iv) $\cosh^{-1} x = \log (x + \sqrt{x^2-1}).$

1-13. Some typical Integrals :

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}$, $(\mathbf{a} \neq 0)$.

যেহেতু, $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$,

$$\therefore \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2 \pm k^2}$$

যেখানে, $z = x + \dfrac{b}{2a}$;

$$k^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2} \text{ যদি, } 4ac > b^2 ;$$

$$\text{বা, } k^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \text{ যদি, } 4ac < b^2.$$

এখন, তাহা হইলে, §1-12-এর (1) অথবা (2)-এর নিয়মে ইহার মান বাহির করা যাইবে।

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathbf{(px+q)\,dx}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}$, $(\mathbf{a, p} \neq 0)$.

ধরি, $px+q \equiv l\,\dfrac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+m$

অর্থাৎ, $px+q \equiv l\,(2ax+b)+m.$

তাহা হইলে, $l = \dfrac{p}{2a}$; $m = q - \dfrac{bp}{2a}.$

সুতরাং, $\displaystyle\int \frac{(px+q)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{l(2ax+b)+m}{ax^2+bx+c}\,dx$

$$= l\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c} + m\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$= l \log |\,ax^2+bx+c\,| + mI ;$$

যেখানে, $I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$; এবং ইহার মান §1-13-এর (1)-এর নিয়মে পাওয়া যাইবে।

(3) $\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \quad (a\neq 0).$

(i) $a>0$ হইলে,

$$\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{1}{\sqrt{z^2\pm k^2}}\,dz$$

যেখানে, $z=x+\frac{b}{2a}$,

$k^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, যদি $4ac>b^2$;

বা, $k^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, যদি $4ac<b^2$.

এখন, তাহা হইলে, §1-12-এর (3) বা (4)-এর নিয়মে নির্ণেয় মান পাওয়া যাইবে।

(ii) $a<0$ হইলে,

$$\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dz}{\sqrt{k^2-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\sin^{-1}\frac{z}{k}.$$

যেখানে, $z=x+\frac{b}{2a}$; $k^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0.$

(4) $\int\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \quad (a, p\neq 0).$

ধরি, $px+q\equiv l\,\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+m$;

অর্থাৎ, $px+q\equiv l\,(2ax+b)+m.$

সুতরাং, $l=\frac{p}{2a}$; $m=q-\frac{bp}{2a}.$

$$\therefore \int\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$=l\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx+m\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$=2l\sqrt{ax^2+bx+c}+mI,$$

যেখানে, $I=\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, যাহার মান § 1-13-এর (3)-এর নিয়মে বাহির করা যাইবে।

(5) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{(px+q)\sqrt{ax+b}}}$.

ধরি, $ax+b=z^2$; $\therefore\ adx=2z\,dz$

$$\therefore\ \int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax+b}}=2\int \frac{dz}{pz^2+(aq-bp)},$$

যাহার মান § 1-12-এর (1) অথবা (2)-এর নিয়মে বাহির করা যাইবে।

(6) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}}$.

এখানে, $px+q=\frac{1}{z}$ ধরিলে, ইহা § 1-13-এর (3)-এর আকারে পরিণত হইবে।

(7) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{(px^2+q)\sqrt{ax^2+c}}}$.

এখানে, $\sqrt{ax^2+c}=xz$ ধরিলে, ইহা § 1-12-এর (1) অথবা (2)-এতে পরিণত হইবে।

(8) $\int \sqrt{\frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}}}\,\mathbf{dx}$.

যেহেতু, $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}=\frac{ax+b}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}=\frac{ax+b}{\sqrt{acx^2+(ad+bc)x+bd}}$

ইহার মান § 1-13-এর (4)-এর নিয়মে নির্ণয় করা যাইবে।

1-14. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ।

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর : $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}=\int \frac{dx}{(2x+1)^2+4}$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+2^2}\ ;\ [2x+1=z]$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z}{2}+c$$
$$=\frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{1}{2}(2x+1)+c.$$

উদাহরণ 2. মান বাহির কর : $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos^2 x}$

$$I = \int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin x - \sin^2 x} = \int \frac{dz}{1+z-z^2}\ ;\ (z=\sin x)$$

$$= \int \frac{dz}{\frac{5}{4}-(z-\frac{1}{2})^2}$$

$$= \int \frac{dt}{(\frac{1}{2}\sqrt{5})^2 - t^2}\ ;\ (t = z - \tfrac{1}{2})$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2-a^2}\ ;\ (a=\tfrac{1}{2}\sqrt{5})$$

$$= -\frac{1}{2a}\log\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+t}{a-t}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|\frac{\sqrt{5}-1+2\sin x}{\sqrt{5}+1-2\sin x}\right| + c$$

উদাহরণ 3. মান নির্ণয় কর : $\int \frac{x}{x^2+3x+2}\, dx$, [C. U. 1974].

ধরি, $x \equiv l\frac{d}{dx}(x^2+3x+2)+m = l\,(2x+3)+m$;

অর্থাৎ $x \equiv 2lx + (3l+m)$

$\therefore\ 2l=1$ এবং $3l+m=0$.

$\therefore\ l=\frac{1}{2}\ ;\ m=-\frac{3}{2}$.

$$\therefore\ \int \frac{x}{x^2+3x+2}\, dx = \int \frac{l\,(2x+3)+m}{x^2+3x+2}\, dx$$

$$= l\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\, dx + m\int \frac{1}{x^2+3x+2}\, dx$$

$$= l \log|x^2+3x+2| + m\int \frac{dx}{(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}$$

$$= l\log|x^2+3x+2| + m\int \frac{dz}{z^2-(\frac{1}{2})^2},$$

$$(z = x+\tfrac{3}{2})$$

$$=l\log|x^2+3x+2|+m\times 1\times\log\left|\frac{z-\frac{1}{2}}{z+\frac{1}{2}}\right|+c$$

$$=\tfrac{1}{2}\log|x^2+3x+2|-\tfrac{3}{2}\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+c.$$

উদাহরণ 4. মান বাহির কর : $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+4}}$.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+4}}=\sqrt{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+6x+8}}$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\{(2x+\frac{3}{2})^2+\frac{23}{4}\}}};$$

ধরি, $z=2x+\frac{3}{2}$; $\therefore\ dz=2dx.$

$$\therefore\ I=\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+a^2}},\quad\left(a=\frac{\sqrt{23}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(z+\sqrt{z^2+a^2})+c\ ;$$

$$\therefore\ \int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\{(2x+\tfrac{3}{2})+\sqrt{4x^2+6x+8}\}+c.$$

উদাহরণ 5. মান নির্ণয় কর : $\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$

$$\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx=\int\frac{(2x+2)+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx.$$

$$=\int\frac{(2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$=2\sqrt{x^2+2x+5}+\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}$$

$$=2\sqrt{x^2+2x+5}+\log\{(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\}+c.$$

উদাহরণ 6. মান বাহির কর : $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$. [C. U. 1970]

ধরি, $\sqrt{x-\alpha}=z$. $\therefore\ x=\alpha+z^2$. $\therefore\ dx=2z\,dz$.

$$\therefore\ \int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}=\int\frac{2z\,dz}{z\sqrt{\beta-\alpha-z^2}}$$

$$=2\int\frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}}, \quad (a=\sqrt{\beta-\alpha})$$

$$=2\sin^{-1}\frac{z}{a}+c$$

$$=2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\right)+c.$$

উদাহরণ 7. মান নির্ণয় কর: $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}}$.

ধরি, $\sqrt{x+2}=z$. $\therefore$ $x+2=z^2$. $\therefore$ $dx=2z\,dz$.

$$\therefore \int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}}=\int\frac{2z\,dz}{(z^2-1)z}$$

$$=2\int\frac{dz}{z^2-1}=2\cdot\tfrac{1}{2}\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+c$$

$$=\log\left|\frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1}\right|+c.$$

উদাহরণ 8. মান বাহির কর: $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

ধরি, $x=\frac{1}{z}$; $\therefore$ $dx=-\frac{1}{z^2}dz$.

$$\therefore \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\cdot\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$=\cos^{-1}z+c=\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+c$$

$$=\sec^{-1}(x)+c.$$

উদাহরণ 9. মান নির্ণয় কর: $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2-a^2}}$.

ধরি, $\sqrt{x^2-a^2}=xz$. $\therefore$ $x^2-a^2=x^2z^2$; $\therefore$ $x^2=\frac{a^2}{1-z^2}$.

$$\therefore \quad x\,dx=\frac{a^2.z\,dz}{(1-z^2)^2}. \quad \therefore \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{dx}{xz}.$$

$$=\frac{a^2dz}{(1-z^2)^2}.\frac{1-z^2}{a^2}=\frac{dz}{1-z^2}.$$

$$\therefore \quad \text{I}=\int\left(\frac{dz}{1-z^2}\right).\frac{1}{\dfrac{a^2}{1-z^2}+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{2-z^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}.\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}+z}{\sqrt{2}-z}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2a^2\sqrt{2}}.\log\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-a^2}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-a^2}}\right|+c.$$

উদাহরণ 10. মান বাহির কর : $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+a^2}}$.

ধরি, $\sqrt{x^2+a^2}=xz$. $\therefore$ $x^2+a^2=x^2z^2$. $\therefore$ $x^2=\frac{a^2}{z^2-1}$.

$$\therefore \quad x\,dx=\frac{-a^2z\,dz}{(z^2-1)^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{dx}{xz}=\frac{-a^2dz}{(z^2-1)^2.x^2}=\frac{-dz}{(z^2-1)}.$$

$$\therefore \quad \text{I}=\int\frac{-dz}{(z^2-1)\left\{\dfrac{a^2}{z^2-1}-a^2\right\}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{z^2-2}$$

$$=\frac{1}{2a^2\sqrt{2}}\log\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2a^2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+a^2}+x\sqrt{2}}\right|+c.$$

উদাহরণ 11. মান নির্ণয় কর : $\int\frac{dx}{(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}$.

ধরি, $\sqrt{x^2+a^2}=xz$ $\therefore$ $x^2+a^2=x^2z^2$. $\therefore$ $x^2=\frac{a^2}{z^2-1}$.

$$\therefore \quad 2\log x=2\log a-\log(z^2-1) \quad \therefore \quad \frac{dx}{x}=\frac{-z\,dz}{z^2-1}.$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{dx}{xz}=\frac{-dz}{z^2-1}.$$

$$\therefore \quad I=\int \frac{-dz}{(x^2-1)}\cdot\frac{1}{2\left(\frac{a^2}{z^2-1}\right)+a^2}$$

$$=\frac{-1}{a^2}\int \frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{a^2}\cot^{-1}z+c$$

$$=\frac{1}{a^2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)+c=\frac{1}{a^2}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+c.$$

প্রশ্নমালা 4

মান নির্ণয় কর ঃ

1. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$;

2. $\int \frac{x^2dx}{x^6-1}$;

3. $\int \frac{1}{(\log x)^2-5}\frac{dx}{x}$;

4. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

5. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$;

6. $\int \frac{1}{3x^2+5x+2}\,dx$;

7. $\int \frac{1}{2x^2-x+1}\,dx$; [C. U. 1972]

8. $\int \frac{1}{2-6x-x^2}\,dx$;

9. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x-3}$;

10. $\int \frac{\cos x\,dx}{5\sin^2 x-12\sin x+4}$; [C. U. 1967]

11. $\int \frac{x\,dx}{x^2+5x+6}$; [C. U. 1973]

12. $\int \frac{3x+1}{2x^2+x-3}\,dx$; [C. U. 1971]

13. $\int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$;

14. $\int \frac{dx}{2+\cos^2 x}$;

15. $\int \frac{(x^2+1)x\,dx}{x^4+1}$;

16. $\int \frac{x^2(x^3+1)\,dx}{x^6+1}$;

17. $\int \frac{x^2+2x}{x^2+x+2}\,dx$;   18. $\int \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,dx$;

19. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+9}}\,dx$;   20. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+3x+x^2}}$;

21. $\int \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$;   22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+1}}$;

[C. U. 1971]

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$;   24. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$;

[C. U. 1975]

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$;   26. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$;

27. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4+x^4}}$;   28. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^8-x^8}}$;

29. $\int \frac{x+b}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$;   30. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$;

31. $\int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$;   32. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$;

33. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;   34. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x}}$;

35. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$;   36. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^3}}\,dx$;

37. $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}\,dx$;   38. $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

39. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+3x}}$;   40. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$;

41. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$;   42. $\int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\,dx$;

43. $\int \sqrt{\frac{3x+2}{2x+3}}\,dx$;   44. $\int \sqrt{\frac{a+x}{x}}\,dx$;

45. $\int \frac{x}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2-3}}$;   46. $\int \frac{dx}{(8x^2+3)\sqrt{4x^2+3}}$;

47. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$; 48. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$;

49. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$; 50. (i) $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

(ii) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; (iii) $\int \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^{\frac{3}{2}}}$.

1-15. Integration by parts :

Rule : $\int \mathbf{u_1 u_2 dx} = \mathbf{u_1} \int \mathbf{u_2 dx} - \int \left\{\frac{\mathbf{du_1}}{\mathbf{dx}} \cdot \int \mathbf{u_2 dx}\right\} \mathbf{dx}$

যেখানে, $u_1 \equiv u_1(x)$; $u_2 \equiv u_2(x)$; এবং ইহাদিগকে যথাক্রমে প্রথম অপেক্ষক ও দ্বিতীয় অপেক্ষক বলা হয়।

প্রমাণ :

যেহেতু, $\frac{d}{dx}\{f(x)\phi(x)\} = f(x)\phi'(x) + f'(x)\phi(x)$;

$\therefore \; f(x)\phi(x) = \int f(x)\phi'(x)dx + \int f'(x)\phi(x).$

ধরা যাক্, $f(x) = u_1$; $\phi'(x) = u_2$.

তাহাহইলে, $\phi(x) = \int u_2 dx$.

সুতরাং, $u_1 \int u_2 dx = \int u_1 u_2 dx + \int \left\{\frac{du_1}{dx} \cdot \int u_2 dx\right\} dx$.

$\therefore \; \int u_1 u_2 dx = u_1 \int u_2 dx - \int \left\{\frac{du_1}{dx} \int u_2 dx\right\} dx$.

দৃষ্টান্ত :

(i) $\int x \cos x \, dx$

$= x \int \cos x \, dx - \int \left\{\frac{d}{dx} x \cdot \int \cos x \, dx\right\} dx$

$= x \sin x - \int \sin x \, dx$

$= x \sin x + \cos x + c.$

(ii) $\int x \log x \, dx = \int (\log x) \times x \, dx$

$= (\log x) \times \int x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\log x) \times \int x \, dx \right\} dx$

$= (\log x) \times \frac{x^2}{2} - \int \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} \right\} dx$

$= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{2} \cdot \int x \, dx$

$= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + c.$

(iii) $\int \sin^{-1} x \, dx = \int (\sin^{-1} x) \times 1 \, dx$

$= (\sin^{-1} x) \times \int 1 \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) \cdot \int 1 \, dx \right\} dx$

$= (\sin^{-1} x) \times x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c.$

(iv) $\int x e^x dx = x \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (x) \times \int e^x dx \right\} dx$

$= x e^x - \int \{e^x\} dx = x e^x - e^x + c$

$= (x-1) e^x + c.$

1-16. Some Standard Integrals :

(1) $\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \log(x + \sqrt{x^2+a^2})$

(2) $\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \log | x + \sqrt{x^2-a^2} |$

(3) $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}.$

সমাধান :

(1) $I = \int \sqrt{x^2+a^2} dx$

$= \sqrt{x^2+a^2} \cdot \int 1 \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\sqrt{x^2+a^2}) \int 1 dx \right\} dx$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx.$$

$$\therefore\quad 2I=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\therefore\quad I=\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2}).$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

ধরি, $x=a\sinh\theta$, $\therefore\ dx=a\cosh\theta\, d\theta$.

$$\therefore\quad \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=a^2\int\cosh^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int(\cosh 2\theta+1)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\sinh 2\theta}{2}+\theta\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}[\sinh\theta\cosh\theta+\theta]$$

$$=\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a}.$$

(2) $I=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

$$=\sqrt{x^2-a^2}\times x-\int\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}\,x\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{(x^2-a^2)+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}-\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$$

$$\therefore \quad 2I = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \log|x+\sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\therefore \quad I = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

ধরি, $x = a\cosh\theta$; $\therefore \quad dx = a\sinh\theta\, d\theta$.

$$\therefore \quad \int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = a^2 \int \sinh^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int(\cosh 2\theta - 1)\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sinh 2\theta}{2} - \theta\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}(\sinh\theta\cosh\theta - \theta)$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}.$$

(3) ধরি, $x = a\sin\theta$. $\therefore \quad dx = a\cos\theta\, d\theta$.

$$\therefore \quad \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int(\cos 2\theta + 1)\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}(\sin\theta\cos\theta + \theta)$$

$$= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

1-17. Some typical Integrals ;

(1) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx.$

ইহাকে § 1-16 এর (1) বা, (2) বা, (3) এর আকারে প্রকাশ করা যাইবে।

(2) $\int (\mathbf{px+q})\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}\,\mathbf{dx}$, $(a, p \neq 0)$.

ধরি, $px+q \equiv l\,\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+m.$

অর্থাৎ, $px+q \equiv l\,(2ax+b)+m.$

$$\therefore \quad l=\frac{p}{2a}\,;\; m=q-\frac{bp}{2a}.$$

$$\therefore \quad \int (px+q)\,\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$=l\int (2ax+b)\,\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx+m\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$=\frac{2l}{3}\,(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}+m\mathrm{I}\,;$$

যেখানে, $\mathrm{I}=\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, যাহা § **1-17** এর **(1)** এর অনুরূপ।

1-18. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ।

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর : $\int x\tan^{-1}x\,dx$.

$$\int x\tan^{-1}x\,dx$$

$$=(\tan^{-1}x)\int x\,dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\times\int x\,dx\right\}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\,x^2\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\,x^2\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\,x^2\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\,x+c.$$

উদাহরণ 2. মান বাহির কর : $\int \frac{\log x}{x^2}\, dx$.

$$\int \frac{\log x}{x^2}\, dx$$

$$=(\log x)\int \frac{1}{x^2}\, dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\times\int \frac{1}{x^2}\, dx\right\}dx$$

$$=-\frac{\log x}{x}+\int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$=-\frac{\log x}{x}-\frac{1}{x}+c.$$

উদাহরণ 3. মান নির্ণয় কর : $\int e^{3x}\sin 4x\, dx$.

$$=\int e^{3x}\sin 4x\, dx$$

$$=e^{3x}\int \sin 4x\, dx-\int\left\{3e^{3x}\int \sin 4x\, dx\right\}dx$$

$$=-e^{3x}\frac{\cos 4x}{4}+\frac{3}{4}\int e^{3x}\cos 4x\, dx$$

$$=-\frac{1}{4}e^{3x}\cos 4x+\frac{3}{4}\left[e^{3x}\cdot\frac{\sin 4x}{4}-\frac{3}{4}\int e^{3x}\sin 4x\, dx\right]$$

$$=-\frac{1}{4}e^{3x}\cos 4x+\frac{3}{16}e^{3x}\sin 4x-\frac{9}{16}\,\mathrm{I}.$$

$$\therefore\ \left(1+\frac{9}{16}\right)\mathrm{I}=\frac{3}{16}e^{3x}\sin 4x-\frac{1}{4}e^{3x}\cos 4x.$$

$$\therefore\ \mathrm{I}=\frac{1}{25}e^{3x}\{3\sin 4x-4\cos 4x\}.$$

$$\therefore\ \int e^{3x}\sin 4x\, dx=\frac{1}{25}e^{3x}(3\sin 4x-4\cos 4x)+c.$$

উদাহরণ 4. মান বাহির কর : $\int \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\, dx$.

ধরি, $x=\tan\theta$. $\therefore\ dx=\sec^2\theta\, d\theta$.

$$\therefore\ \int \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\, dx=2\int \theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$=2\left[\theta \tan\theta-\int \tan\theta\, d\theta\right]$$

$$=2\theta \tan\theta-2\log|\sec\theta|+c$$

$$=2x\tan^{-1}x-2\log(\sqrt{1+x^2})+c$$

$$=2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)+c.$$

উদাহরণ 5. মান নির্ণয় কর : $\int\sqrt{5-2x+x^2}\,dx$.

$$\int\sqrt{5-2x+x^2}\,dx$$

$$=\int\sqrt{(x-1)^2+2^2}\,dx$$

$$=\int\sqrt{z^2+2^2}\,dz\ ;\ (z=x-1).$$

$$=\frac{z\sqrt{z^2+2^2}}{2}+\frac{2^2}{2}\log\{z+\sqrt{z^2+2^2}\}+c$$

$$=\tfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{5-2x+x^2}+2\log\{(x-1)+\sqrt{5-2x+x^2}\}+c.$$

উদাহরণ 6. মান বাহির কর : $\int(3x+1)\sqrt{7+2x-3x^2}\,dx$.

ধরি, $3x+1\equiv l\dfrac{d}{dx}(7+2x-3x^2)+m$;

অর্থাৎ, $3x+1\equiv l(2-6x)+m$.

$$\therefore\ 3=-6l\ ;\quad 1=2l+m.$$

$$\therefore\ l=-\tfrac{1}{2}\ ;\quad m=2.$$

$$\therefore\ \int(3x+1)\sqrt{7+2x-3x^2}\,dx$$

$$=l\int(2-6x)\sqrt{7+2x-3x^2}\,dx+m\int\sqrt{7+2x-3x^2}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}l(7+2x-3x^2)^{\frac{3}{2}}+m\sqrt{3}\int\sqrt{\frac{7}{3}+\frac{2}{3}x-x^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}(7+2x-3x^2)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{3}\int\sqrt{\left(\frac{\sqrt{22}}{3}\right)^2-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}(7+2x-3x^2)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{3}\left\{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{7}{3}+\frac{2}{3}x-x^2}\right.$$

$$\left.+\frac{22}{2\times 9}\sin^{-1}\frac{3x-1}{\sqrt{22}}\right\}+c$$

$$=-\frac{1}{3}(7+2x-3x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}(3x-1)\sqrt{7+2x-3x^2}$$

$$+\frac{22}{3\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{3x-1}{\sqrt{22}}+c.$$

প্রশ্নমালা 5

মান নির্ণয় কর :

1. $\int x\sec^2 x\,dx$;
2. $\int x\operatorname{cosec}^2 x\,dx$;
3. $\int x\sec x\tan x\,dx$;
4. $\int x\sin x\cos x\,dx$;
5. (i) $\int \log x\,dx$, (ii) $\int xd\log x\,dx$;
6. $\int x\cot^{-1}x\,dx$;
7. $\int x\sin^{-1}x\,dx$;
8. $\int \tan^{-1}x\,dx$;
9. $\int \sec^{-1}x\,dx$;
10. $\int \operatorname{cosec}^{-1}x\,dx$;
11. $\int x^2\cos x\,dx$;
12. $\int x^2\sin 2x\,dx$;
13. $\int x^2 e^x dx$;
14. $\int x\sin^2 x\,dx$;
15. $\int x(\log x)^2 dx$;
16. $\int \frac{\log(1+x)}{(1+x)^2}\,dx$;
17. $\int \sin x\log(\sec x+\tan x)\,dx$;
18. $\int \log(x+\sqrt{x^2+a^2})\,dx$;
19. $\int\left\{\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right\}dx$;
20. $\int x^2\log(1+x^n)\,dx$;

21 $\int \frac{x}{1+\cos x}\,dx$; 22. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx$;

23. $\int (\sin^{-1}x)^2\,dx$; 24. $\int \frac{\cos^{-1}x}{x^2}\,dx$;

25. $\int \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\,dx$; 26. $\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

27. $\int \sin^{-1}(3x-4x^3)\,dx$; 28. $\int \cos^{-1}(4x^3-3x)\,dx$;

29. $\int \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}\,dx$; 30. $\int \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\,dx$;

31. $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}\,dx$; [put $x=a\tan^2\phi$]; 32. $\int e^x\cos x\,dx$;

33. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$; 34. $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$;

35. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$; 36. $\int 2^x\sin x\,dx$;

37. $\int \sqrt{5+2x+x^2}\,dx$; 38. $\int \sqrt{3+5x-2x^2}\,dx$;

39. $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx$; 40. $\int \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\,dx$;

41. $\int (x+b)\sqrt{x^2+a^2}\,dx$; 42. $\int (x+1)\sqrt{x^2-1}\,dx$;

43. $\int (x-1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx$; 44. $\int (2x+1)\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$;

45. $\int \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx$; 46. (i) $\int \frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$;

(ii) $\int \frac{x^2dx}{(x\cos x-\sin x)^2}$.

1-19. Some Special types of Integrals :

$\int$ n^{2m+1}x dx ; (2) $\int \sin^{2m+1}x \cos^{p}x\, dx$.

যেথানে, m যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং p যে কোন মূলদ সংখ্যা।
এইরূপ ক্ষেত্রে, $z=\cos x$ ধরিলে স্থবিধা হইবে।

দৃষ্টান্ত :

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x \sin x\, dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx$$
$$= -\int (1-z^2)^2 dz\ ; \qquad (z=\cos x).$$
$$= -\int (1-2z^2+z^4) dz$$
$$= -z + \frac{2}{3}z^3 - \frac{z^5}{5} + c\ ; \quad (z=\cos x).$$

(3) $\int \cos^{2m+1}x\, dx$, (4) $\int \cos^{2m+1}x \sin^{p}x\, dx$

যেথানে, m যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং p যে কোন মূলদ রাশি।
এইরূপ ক্ষেত্রে, $z=\sin x$ ধরিলে স্থবিধা হইবে।

দৃষ্টান্ত :

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$$
$$= \int \sin^4 x (1-\sin^2 x)\cos x\, dx$$
$$= \int z^4 (1-z^2) dz\ ; \quad (z=\sin x)$$
$$= \int (z^4 - z^6) dz$$
$$= \tfrac{1}{5} z^5 - \tfrac{1}{7} z^7 + c$$
$$= \tfrac{1}{5} \sin^5 x - \tfrac{1}{7} \sin^7 x + c.$$

(5) $\int \sin^{p}x \cos^{q}x\, dx$;

$p+q=-2n$, যেথানে, n যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। তাহা হইলে এইরূপ ক্ষেত্রে, $z=\tan x$ ধরিলে সহজে মান বাহির করা যাইবে।

দৃষ্টান্ত ঃ

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sec^4 x}{\tan^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx}{\tan^2 x}$$

$$= \int \frac{(1+z^2)}{z^2}\,dx\,; \qquad (z=\tan x)$$

$$= \int \left(1+\frac{1}{z^2}\right) dz = z - \frac{1}{z} + c$$

$$= \tan x - \cot x + c.$$

(6) $\displaystyle\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{a\cos x + b\sin x + c}}$

এখানে, $c = c\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$,

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ এবং $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ লিখিয়া,

$z = \tan\frac{x}{2}$ ধরিলে, সুবিধা হইবে।

দৃষ্টান্ত ঃ

$$\int \frac{dx}{3+\cos x}$$

$$= \int \frac{1}{3\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)+\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}\,dx.$$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{4+2\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{dz}{z^2+2}\,; \qquad \left(z=\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)+c.$$

(7) $\int \frac{\mathbf{A \cos x + B \sin x + C}}{\mathbf{a \cos x + b \sin x + c}} \mathbf{dx}$.

এখানে, $A \cos x + B \sin x + C$

$\equiv l(a \cos x + b \sin x + c) + m \frac{d}{dx}(a \cos x + b \sin + c) + n$ ধরিলে, সহজভাবে মান বাহির করা যায়।

(8) $\int \frac{\mathbf{lx+m}}{\mathbf{(ax+b)(cx+d)}} \mathbf{dx}$.

এখানে, $\frac{lx+m}{(ax+b)(cx+d)} \equiv \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$ ধরিয়া সহজেই মান নির্ণয় করা যাইবে।

দৃষ্টান্ত :

$$I = \int \frac{7x+5}{(x+2)(2x+1)} dx.$$

এখানে, $\frac{7x+5}{(x+2)(2x+1)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x+1}$.

$$\therefore \quad 7x+5 \equiv A\,(2x+1) + B\,(x+2).$$

$$\therefore \quad 7 = 2A + B\,;\; 5 = A + 2B.$$

$$\therefore \quad A = 3\,;\; B = 1.$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{A}{x+2}\, dx + \int \frac{B}{2x+1}\, dx$$

$$= 3 \int \frac{1}{x+2}\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1}\, dx$$

$$= 3 \log |\, x+2 \,| + \frac{1}{2} \log |\, 2x+1 \,| + c.$$

(9) $\int \frac{\mathbf{lx^2+mx+n}}{\mathbf{(ax+b)^2(cx+d)}} \mathbf{dx}$.

এখানে, $\frac{lx^2+mx+n}{(ax+b)^2(cx+d)} \equiv \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{ax+b} + \frac{C}{(ax+b)^2}$ ধরিলে, সহজেই মান বাহির করা যায়।

(10) $\int \frac{lx^2+mx+n}{(ax^2+bx+c)(px+q)} dx.$

এখানে, $\frac{lx^2+mx+n}{(ax^2+bx+c)(px+q)} \equiv \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{C}{px+q}$ ধরিলে, মান বাহির করা যাইবে।

প্রশ্নমালা 6

মান নির্ণয় কর

1. $\int \sin^3 x \, dx$;
2. $\int \cos^5 x \, dx$;
3. $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx$;
4. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$;
5. $\int \sec^3 x \, dx$;
6. $\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx$;
7. $\int \sec x^4 \, dx$;
8. $\int \operatorname{cosec}^6 x \, dx$;
9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$;
10. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$;
11. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$;
12. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$;
13. $\int \frac{\sqrt{(\tan x)}}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$;
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^3 x \sin^5 x}}$;
15. $\int \frac{dx}{5+4 \sin x}$;
16. $\int \frac{dx}{5+3 \cos x}$;
17. $\int \frac{5 \cos x - \sin x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$;
18. $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$;
19. $\int \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx$;
20. $\int \frac{x \, dx}{(x+a)(x+b)}$;
21. $\int \frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+4)} dx$;
22. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)}$;
23. $\int \frac{x^3 dx}{(x+1)(x^2+1)}$;
24. $\int \frac{x^5 dx}{(x+a)^2(x^2+a^2)}$;
25. $\int \frac{dx}{(5+4 \cos x)^2}$;
26. $\int \frac{(1+\sin x) \, dx}{\sin x \, (1+\cos x)}$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

Definite Integrals

2-1. Definite Integral কে যোগফলের সীমারূপে প্রকাশ :

মনে করি, $[a, b]$-এর মধ্যে x-এর যেকোন একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য অপেক্ষক $f(x)$-এর কেবলমাত্র একটি **সুনির্দিষ্ট সসীম** মান আছে এবং $[a, b]$-তে $f(x)$ সন্তত **(continuous)**, যেখানে a এবং b সসীম ও $b>a$.

এখন $[a, b]$-কে n-সংখ্যক সমান ভাগে ভাগ করা যাক্। তাহা হইলে, প্রাতটি Sub-interval-এর দৈর্ঘ্য h হইলে, বিভাগ বিন্দুগুলি হইবে :

$$x=a+h, a+2h, \cdots\cdots, a+(n-1)h.$$

যেখানে, $b-a=nh.$

তখন, $\underset{h\to 0}{Lt}\, h\,[f(a+h)+f(a+2h)+\cdots\cdots+f(a+nh)]$

অর্থাৎ, $\underset{h\to 0}{Lt}\, h \sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$-কে $[a, b]$-তে অপেক্ষক $f(x)$-এর '**Definite Integral**-এর যোগফলের সীমা' বলা হয়, এবং ইহাকে লেখা হয় $\int_a^b f(x)dx$ অর্থাৎ

$$\int_a^b f(x)\, dx=\underset{h\to 0}{Lt}\, h \sum_{r=1}^{n} f(a+rh)\ ; \quad (b>a)\ ; \quad b-a=nh.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(i) $a>b$ হইলে, আমরা সংজ্ঞা দিয়ে লিখিব :

$$\int_a^b f(x)\, dx=-\int_b^a f(x)\, dx.$$

(ii) $b=a$ হইলে, আমরা সংজ্ঞা দিয়ে লিখিব :

$$\int_a^a f(x)\, dx=0.$$

মন্তব্য ঃ 'Definite Integral as the limit of a sum'-এর সাধারণ সংজ্ঞা এবং তাহার অস্তিত্ব (**Existence**) উপরের শ্রেণীতে আলোচিত হইবে।

2.2. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ ঃ

উদাহরণ 1. সংজ্ঞা অনুসারে মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\int_2^4 5dx$; (ii) $\int_1^3 2x\,dx$; (iii) $\int_a^b x^2 dx,\ (b>a)$.

সমাধান ঃ

(i) এখানে, $f(x)=5$; $a=2$; $b=4$;

$\therefore\ b-a=4-2=2$. $\therefore\ nh=b-a=2$

এবং $f(a+rh)=5$.

$$\therefore \int_2^4 5\,dx = \underset{h\to 0}{Lt}\, h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\, h(5n)$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\, 5(nh)$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\, (5\times 2)=10.$$

(ii) এখানে, $f(x)=2x$; $a=1$; $b=3$.

$\therefore\ b-a=3-1=2$. $\therefore\ nh=b-a=2$.

এবং $f(a+rh)=2(a+rh)=2(1+rh)$.

$$\therefore \int_1^3 2x\,dx = \underset{h\to 0}{Lt}\, h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\, h\sum_{r=1}^{n} 2(1+rh)$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\, 2h\,[n+h(1+2+3+\cdots\ \cdots+n)]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ 2h\left[n + h\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ [2(nh) + (nh)\{(nh)+h\}]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ [2+2+2\times(2+h)] = 4+4 = 8.$$

(iii) এখানে, $f(x) = x^2$; $b - a = nh$;

$$f(a+rh) = (a+rh)^2.$$

$$\therefore \int_a^b x^2 dx = \underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=1}^{n}(a+rh)^2$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=1}^{n}\left\{a^2 + 2arh + r^2h^2\right\}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h\left\{na^2 + 2ah\,(1+2+3+\cdots\cdots+n) + h^2(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)\right\}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h\left\{na^2 + 2ah\cdot\frac{n(n+1)}{2} + h^2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\left\{a^2(nh) + a(nh)(nh+h) + \frac{(nh)(nh+h)(2nh+h)}{6}\right\}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\left\{a^2(b-a) + a\,(b-a)(b-a+h) + \frac{(b-a)(b-a+h)(2b-2a+h)}{6}\right\}$$

$$= a^2(b-a) + a\,(b-a)^2 + \tfrac{1}{3}\,(b-a)^3$$

$$= \tfrac{1}{3}\,(b^3 - a^3).$$

উদাহরণ 2. সংজ্ঞানুসারে $\int_0^1 (2x+3)\,dx$ কে একটি যোগফলের সীমারূপে প্রকাশ কর এবং তদ্দ্বারা উহার মান বাহির কর।

সমাধান ঃ

এখানে, $f(x)=2x+3$; $a=0$; $b=1$;

$\therefore\ f(a+rh)=2\,(a+rh)+3=3+2rh$; $nh=b-a=1.$

$$\therefore \int_0^1 (2x+3)\,dx=\underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=1}^{n} f\,(a+rh)$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=1}^{n}(3+2rh)$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ h\left\{3n+2h\,(1+2+3+\cdots\ \cdots+n)\right\}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ h\left\{3n+2h\cdot\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\left\{3\,(nh)+(nh)(nh+h)\right\}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\left\{3\times 1+1+(1+h)\right\}=3+1=4.$$

উদাহরণ 3. $\int_a^b e^x dx$ কে একটি যোগফলের সীমারূপে প্রকাশ কর এবং তদ্দ্বারা উহার মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

এখানে, $f(x)=e^x$; $\therefore\ f(a+rh)=e^{a+rh}=e^a.e^{rh}.$

$$\therefore \int_a^b f\,(x)\,dx=\underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=1}^{n} f\,(a+rh)$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=1}^{n} e^a.e^{rh}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt}\ he^a \left\{ e^h + e^{2h} + e^{3h} + \cdots \cdots + e^{nh} \right\}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt}\ he^a e^h \left\{ 1 + e^h + e^{2h} + \cdots \cdots + e^{(n-1)h} \right\}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt}\ he^a . e^h . \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1}\ ;\ nh = b - a$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt}\ he^a . e^h . \frac{e^{b-a} - 1}{e^h - 1}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \left[(e^b - e^a) \times \frac{he^h}{e^h - 1} \right]$$

$$= (e^b - e^a) \times \underset{h \to 0}{Lt}\ \frac{h}{e^h - 1} \times e^h$$

$$= (e^b - e^a) \times 1 \times 1 = e^b - e^a.$$

প্রশ্নমালা 7

সংজ্ঞানুসারে মান নির্ণয় কর :

1. $\int_1^4 5\, dx$;

2. $\int_a^b 3\, dx$;

3. $\int_1^3 x\, dx$;

4. $\int_a^b x\, dx$;

5. $\int_0^3 2x\, dx$;

6. $\int_{-1}^1 3x\, dx$;

7. $\int_0^3 (2x - 3)\, dx$;

8. $\int_0^1 (ax + b)\, dx$;

9. $\int_{-1}^1 \frac{2x+3}{4} dx$;

10. $\int_0^3 x^2 dx$;

11. $\int_{-3}^{3} x^2 dx$;　　12. $\int_{0}^{1} (3x^2+1)\, dx$;

13. $\int_{-4}^{5} (x^2+6x)\, dx$;　　14. $\int_{0}^{2} x^3 dx$;

15. $\int_{0}^{1} e^x dx$;　　16. $\int_{0}^{1} e^{-x} dx$,

17. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$;　　18. $\int_{0}^{1} \sinh x\, dx$;

2-3. Fundamental Theorem of Integral Calculus

বিবৃতি (Statement) :

"মনে করি, [a, b] বদ্ধ অন্তরাতে অপেক্ষক f(x) সন্তত, যেখানে a এবং b নির্দিষ্ট সসীম রাশি ; এবং ধরা যাক্,

$$F(x)=\int_{a}^{x} f(t)\, dt.$$

তাহা হইলে, $F'(x)=f(x)$, যেখানে, $a\leqslant x\leqslant b$.

অধিকন্তু, যদি $f(x)=\phi'(x)$ হয়, যখন $a\leqslant x\leqslant b$, তাহা হইলে,

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx=\phi(b)-\phi(a)."$$

মন্তব্য ঃ

$\{\phi(b)-\phi(a)\}$-কে সংক্ষেপে $\Big[\phi(x)\Big]_a^b$ —এইরূপ লেখা হয়।

সুতরাং, $f(x)=\phi'(x)$ হইলে,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \phi'(x)\,dx$$

$$=\Big[\phi(x)\Big]_a^b=\phi(b)-\phi(a).$$

দ্রষ্টব্য ঃ ধরি, $f(x)=\phi'(x)$.

$$\therefore\ \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \phi'(x)\,dx=\Big[\phi(x)+c\Big]_a^b$$

$$=\Big\{\phi(b)+c\Big\}-\Big\{\phi(a)+c\Big\}=\phi(b)-\phi(a).$$

সুতরাং, Definite Integral-এর নির্ণেয় মানে কোন অস্থায়ী ধ্রুবক (**arbitrary constant**) থাকিবে না।

2·4. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ ঃ

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর ঃ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\Big[\tan^{-1}x\Big]_0^1=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}-0=\pi/4.$$

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর ঃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx.$

$$\int \cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right).$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\frac{1}{2}\left(0+0\right)=\pi/4.$$

উদাহরণ 3. মান নির্ণয় কর ; $\int_0^1 xe^x dx$.

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x = (x-1)e^x.$$

$$\therefore \int_0^1 xe^x dx = \left[(x-1)e^x\right]_0^1$$

$$=(1-1)\cdot e^1-(0-1)\cdot e^0=1.$$

উদাহরণ 4. মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \sin^{-1}x\,dx$.

$$\int \sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$\therefore \int_0^1 \sin^{-1}x\,dx = \left[x\sin^{-1}x \times \sqrt{1-x^2}\right]_0^1$$

$$=\sin^{-1}1-1=\frac{1}{2}(\pi-2).$$

উদাহরণ 5. মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\sin^{-1}x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sin^{-1}\frac{1}{2}-0=\pi/6.$$

উদাহরণ 6. মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta \cos^3\theta \, d\theta.$

$$\int \sin^6\theta \cos^3\theta \, d\theta = \int \sin^6\theta(1-\sin^2\theta)\cos\theta \, d\theta$$

$$= \int z^6(1-z^2)\, dz, \quad (z=\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{7} z^7 - \frac{1}{9} z^9$$

$$= \frac{1}{7}\sin^7\theta - \frac{1}{9}\sin^9\theta.$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta \cos^3\theta \, d\theta = \left[\frac{1}{7}\sin^7\theta - \frac{1}{9}\sin^9\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{2}{63}.$$

উদাহরণ 7. মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 4x \, dx.$

$$\int \sin 2x \cos 4x \, dx = \frac{1}{2}\int \left\{\sin 6x - \sin 2x\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 6x}{6} + \frac{\cos 2x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x.$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 4x \, dx = \left[\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\cos\pi - \frac{1}{12}\cos 3\pi\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$=-\frac{1}{3}.$$

উদাহরণ 8 মান নির্ণয় কর : $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{6x-5-x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x-5-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-3)^2}}$$

$$=\int \frac{dz}{\sqrt{4-z^2}},\ [z=x-3]$$

$$=\sin^{-1}\frac{z}{2}=\sin^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right).$$

$$\therefore\ \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{6x-5-x^2}}=\left[\sin^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right)\right]_2^3$$

$$=\sin^{-1}0-\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$=0-\left(\frac{-\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

উদাহরণ 9. মান নির্ণয় কর : $\int_2^3 \sqrt{(x-2)(3-x)}\,dx.$

$$\int \sqrt{(x-2)(3-x)}\,dx=\int \sqrt{5x-x^2-6}\,dx$$

$$=\int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)\sqrt{5x-x^2-6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin^{-1}2\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(2x-5)\sqrt{(x-2)(3-x)}+\frac{1}{8}\sin^{-1}(2x-5).$$

$$\therefore \int_2^3 \sqrt{(x-2)(3-x)}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(2x-5)\sqrt{(x-2)(3-x)}+\frac{1}{8}\sin^{-1}(2x-5)\right]_2^3$$

$$=\frac{1}{8}\sin^{-1}1-\frac{1}{8}\sin^{-1}(-1)$$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

উদাহরণ 10. মান নির্ণয় কর : $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$.

ধরি, $x-1=\frac{1}{z}$; $\therefore$ $dx=-\frac{1}{z^2}dz$.

$$\therefore \int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}}$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$=-\sin^{-1}z=-\sin^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\therefore \int_2^3\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}=\left[-\sin^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\right]_2^3$$

$$=-\sin^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}1$$

$$=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

উদাহরণ 11. মান নির্ণয় কর: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\cos x}$.

$$\int \frac{dx}{4+5\cos x} = \int \frac{dx}{4\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) + 5\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)}$$

$$= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}\, dx}{9 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{2\, dz}{9 - z^2}, \quad \left[z = \tan \frac{x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[\frac{1}{3+z} + \frac{1}{3-z}\right] dz$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\log(3+z) - \log(3-z)\right\}$$

$$= \frac{1}{3} \log\left(\frac{3+z}{3-z}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \log\left(\frac{3+\tan \frac{x}{2}}{3-\tan \frac{x}{2}}\right).$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\cos x} = \left[\frac{1}{3} \log\left(\frac{3+\tan \frac{x}{2}}{3-\tan \frac{x}{2}}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \log_e 2 - \frac{1}{3} \log_e 1$$

$$= \frac{1}{3} \log_e 2.$$

প্রশ্নমালা 8

মান নির্ণয় কর :

1. $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$;

2. $\int_{-2}^{+2} \frac{dx}{x^2+4}$;

3. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^2}$;

4. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$;

5. $\int_0^1 (1-x)^n dx$; $(n+1)>0$;

6. $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^5}$;

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$;

8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^2 x \, dx$;

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 q \, dq$;

10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx$;

11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x \, dx$ **[C. U. 1972]** ;

12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 \theta \sec^2 \theta \, d\theta$;

13. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x \, dx$;

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \theta \, d\theta$;

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$;

16. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\cos x}$;

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^6 x \, dx$;

[C. U. 1970]

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \theta \cos^5 \theta \, d\theta$;

[C. U. 1971]

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} \theta \cos^3 \theta \, d\theta$;

[C. U. 1974]

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos 5x \, dx$;

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta) \, d\theta$;

22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sqrt[3]{\sin x} \, dx$;

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos 2\theta \, d\theta$;

24. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$;

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sec \theta - \tan \theta) \, d\theta$;

26. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin x} \, dx$;

27. $\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$;

28. $\int_0^1 \cos^{-1} x \, dx$;

29. $\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$;

30. $\int_0^1 x^2 \tan^{-1} x \, dx$;

[C. U. 1971]

31. $\int_0^1 x \log (x+3) \, dx$;

[C. U. 1972]

32. $\int_0^1 x \sin^{-1} x \, dx$;

33. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$;

34. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$;

35. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$;

36. $\int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2}\, dx$;

37. $\int_1^5 \sqrt{(x-1)(5-x)}\, dx$;

38. $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$;

[C. U. 1973]

39. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$;

40. $\int_\alpha^\beta \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\, dx$;

41. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+7\cos x}$;

42. $\int_{-1}^{+1} \cosh x\, dx$;

43. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$;

44. $\int_0^\pi x\sin^2 x\, dx$;

45. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$;

46. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

2-5. Series represented by Definite Integrals :

আমরা জানি, $[a, b]$-তে অপেক্ষক $f(x)$ সন্তত হইলে, সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{h\to 0}{Lt}\, h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh); \quad \text{যেখানে, } nh=b-a.$$

এখন, $a=0$ এবং $b=1$ ধরিলে, $nh=1$ অর্থাৎ, $h=\dfrac{1}{n}$.

সুতরাং, $n\to\infty$ যখন $h\to 0+$.

$$\therefore \quad \underset{n\to\infty}{\mathbf{Lt}}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{r=1}^{n}\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{n}}\right)=\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx}.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

যেহেতু, $f(a)$ এবং $f(b)$ সসীম, সুতরাং, $hf(a)\to 0$ এবং $hf(b)\to 0$ যখন $h\to 0$.

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,dx = \underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=0}^{n} f(a+rh)$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)\ ; \quad \text{যেখানে, } nh=b-a.$$

সুতরাং, $a=0$ এবং $b=1$ হইলে,

$$\underset{n\to\infty}{\mathbf{Lt}}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{r=0}^{n}\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{n}}\right)=\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx}\ ;$$

এবং $$\underset{n\to\infty}{\mathbf{Lt}}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{r=0}^{n-1}\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{n}}\right)=\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx}.$$

2-6. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর :

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1^4+2^4+3^4+\cdots\ \cdots+n^4}{n^5}.$$

এখন, $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \dfrac{1^4+2^4+3^4+\cdots\ \cdots+n^4}{n^5}$

$$=\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\cdots\ \cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right\}$$

$$=\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{r}{n}\right)^4$$

$$=\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{1}{5}.$$

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর :

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots\ \cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right].$$ [C. U. 1973]

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\left[\frac{n^2}{n^2+1^2}+\frac{n^2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right]$$

$$=\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{r}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\left[\tan^{-1}x\right]_0^1=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}.$$

প্রশ্নমালা 9

মান নির্ণয় কর ঃ

1. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots\cdots+n^p}{n^{p+1}}, \quad (p>-1)$;

2. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right]$; [C. U. 1970]

3. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\dfrac{1}{n+m}+\dfrac{1}{n+2m}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n+nm}\right]$;

4. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\dfrac{1^2}{n^3+1^3}+\dfrac{2^2}{n^3+2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^3}\right]$; [C. U. 1975]

5. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left\{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots\cdots+\sqrt{2n}\right\}n^{-\frac{3}{2}}$;

6. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left\{\dfrac{n+1}{n^2+1^2}+\dfrac{n+2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n^2}\right\}$; [C. U. 1974]

7. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ n\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\dfrac{1}{n^2+p^2}$;

8. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\dfrac{p}{p^2+n^2}$;

9. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}\sqrt{n^2-r^2}$;

10. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\sin\left(\dfrac{r\pi}{2n}\right)$;

11. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \displaystyle\sum_{r=0}^{n}\dfrac{n^2}{(n^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$;

12. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{r=0}^{n}\tan\left(\dfrac{r\pi}{4n}\right)$;

13. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \dfrac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$;

14. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \displaystyle\sum_{r=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{nr}}$;

15. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left\{\displaystyle\prod_{r=1}^{n}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$;

16. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left\{\displaystyle\prod_{r=1}^{n}\left(1+\dfrac{r^2}{n^2}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$;

2-7. $$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

মনে করি, $f(x)$ এবং $g(x)$ অপেক্ষকদ্বয় $[a, b]$-তে সন্তত এবং a ও b সসীম এবং $b>a$.

এখন $[a, b]$-কে n সংখ্যক সমান ভাগে ভাগ করা যাক্, যাহাতে $nh=b-a$.

এখন, $$\underset{h\to 0}{Lt}\, h\sum_{r=1}^{n}\{f(a+rh) \pm g(a+rh)\}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\, h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh) \pm \underset{h\to 0}{Lt}\, h\sum_{r=1}^{n} g(a+rh).$$

সুতরাং, সংজ্ঞানুসারে,

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

দৃষ্টান্ত ঃ

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + \sin 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx$$

$$=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big[-\frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=(1-0)+(0+\tfrac{1}{2})=\tfrac{3}{2}.$$

2-8. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \ (a<c<b).$$

মনে করি, $f(x)=\phi'(x)$. $\therefore \int f(x)dx=\phi(x)$.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \Big[\phi(x)\Big]_a^b = \phi(b)-\phi(a)\,;$$

5

$$\int_a^c f(x)dx = \Big[(\phi x)\Big]_a^c = \phi(c) - \phi(a)\ ;$$

এবং, $\phi \displaystyle\int_c^b f(x)dx = \Big[\phi(x)\Big]_c^b = \phi(b) - \phi(c).$

$$\therefore\ \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \{\phi(c) - \phi(a)\} + \{\phi(b) - \phi(c)\}$$

$$= \phi(b) - \phi(a).$$

$$\therefore\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

দৃষ্টান্ত :

$$\int_0^\pi \sin x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\ dx$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

2-9. $\displaystyle\int_a^b \mathbf{f(x)dx} = \int_a^b \mathbf{f(t)\ dt}.$

মনে করি, $f(x) = \phi'(x)$. তাহা হইলে, $f(t) = \phi'(t)$.

$$\therefore\ \int_a^b f(x)dx = \Big[\phi(x)\Big]_a^b = \phi(b) - \phi(a)\ ;$$

এবং $\int_a^b f(t)dt = \Big[\phi(t)\Big]_a^b = \phi(b) - \phi(a).$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

দৃষ্টান্ত :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\tan^{-1}x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4};$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\tan^{-1}t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}. \quad \therefore \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

2-10. Method of Substitutions for Definite Integrals :

মনে করি, $[a, b]$-তে অপেক্ষক $f(x)$ সন্তত, যেখানে, a এবং b সসীম ও $b > a$.

তাহা হইলে, $\int_a^b f(x)dx$ এর নির্দিষ্ট মান থাকিবে।

এখন $x = \phi(t)$ ধরা যাক্। $\therefore \; dx = \phi'(t)dt.$

মনে করি, $t = \alpha$ যখন $x = a$ এবং $t = \beta$ যখন $x = b$. তাহা হইলে,

$$\int_a^b \mathbf{f(x)dx} = \int_\alpha^\beta \mathbf{f\{\phi(t)\}\,\phi'(t)\,dt}.$$

ইহার প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া এখানে দেওয়া হইল না।

দৃষ্টান্ত : মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

ধরি, $x = \tan\theta. \quad \therefore \; dx = \sec^2\theta\, d\theta.$

এখন, $\theta = 0$ যখন $x = 0$; $\theta = \frac{\pi}{4}$, যখন $x = 1$.

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta = \Big[\log(\sec\theta + \tan\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \log(1+\sqrt{2})$$

2-11. Some Important Rules :

(1) $\int_0^a \mathbf{f(x)dx} = \int_0^a \mathbf{f(a-x)dx}.$

(2) $\int_{-a}^{+a} \mathbf{f(x)dx} = 2\int_0^a \mathbf{f(x)dx}$, যদি $\mathbf{f(-x)=f(x)}$;

অথবা, $=\mathbf{0}$, যদি $\mathbf{f(-x)=-f(x)}$

(3) $\int_0^{2a} \mathbf{f(x)dx} = 2\int_0^a \mathbf{f(x)dx}$, যদি $\mathbf{f(2a-x)=f(x)}$

অথবা, $=\mathbf{0}$, যদি $\mathbf{f(2a-x)=-f(x)}$.

প্রমাণ :

(1) ধরি, $x=a-t$. $\therefore\ dx=-dt$;

এবং $t=a$ যখন $x=0$; $t=0$ যখন, $x=a$.

$$\therefore \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(a-t)dt$$

$$= \int_0^a f(a-t)dt = \int_0^a f(a-x)dx.$$

(2) $\int_{-a}^{+a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$

ধরি, $x=-t$; তাহা হইলে,

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

$$\therefore \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{a} \left\{f(x)+f(-x)\right\} dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{ যদি } f(-x)=f(x)$$

অথবা, $=0$, যদি $f(-x)=-f(x)$.

(3) $$\int_{0}^{2a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{2a} f(x)dx$$

ধরি, $x=2a-t$; $dx=-dt$,

এবং $t=a$, যখন $x=a$; $t=0$ যখন $x=2a$. তাহা হইলে,

$$\int_{a}^{2a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(2a-t)dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(2a-t)dt = \int_{0}^{a} f(2a-x)dx.$$

$$\therefore \int_{0}^{2a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(2a-x)dx$$

$$=\int_0^a \left\{f(x)+f(2a-x)\right\} dx$$

$$=2\int_0^a f(x)dx, \text{ যদি } f(2a-x)=f(x)$$

অথবা, $=0$, যদি $f(2a-x)=-f(x)$.

2·12. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx.$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\, dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\, dx.$$

$$\therefore\ 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\, dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi/2.$$

$\therefore \quad I=\pi/4.$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx=\pi/4.$$

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx.$

ধরি, $f(x)=\cos^3 x$; এখানে, $f(-x)=f(x)$.

$$\therefore \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$$=2\int_0^1 (1-z^2)\,dz,\ (z=\sin x)$$

$$=2\Big[z-\frac{z^3}{3}\Big]_0^1=2\Big(1-\frac{1}{3}\Big)=4/3.$$

উদাহরণ 3. মান নির্ণয় কর : $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx.$

ধরি, $f(x)=\sin^3 x$; এখানে, $f(\pi-x)=f(x)$.

$$\therefore \int_0^{\pi} \sin^3 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x) \sin x\, dx \;;\; (z=\cos x)$$

$$= -2\int_1^0 (1-z^2)dz = 2\int_0^1 (1-z^2)dz$$

$$= 2\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

উদাহরণ 4. মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\pi} \cos^3 x dx$

ধরি, $f(x) = \cos^3 x$; এখানে, $f(\pi - x) = -f(x)$.

$$\therefore \int_0^{\pi} \cos^3 x dx = 0.$$

উদাহরণ 5. মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\pi} x \sin^2 x dx.$

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} x \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin^2 (\pi - x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin^2 x dx = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \mathrm{I}.$$

$$\therefore\ 2\mathrm{I} = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} (1-\cos 2x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}. \quad \therefore\ \mathrm{I} = \frac{\pi^2}{4}.$$

প্রশ্নমালা 10

মান নির্ণয় কর:

1. $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$; [Put $x=a\tan\theta$]

2. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; [Put $x=\tan\theta$]

3. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

4. $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

5. $\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$; [Put $u=\tan\theta$]

6. $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$; [Put $x=a\sin\theta$]

7. $\int_0^1 \frac{dx}{3+2x+x^2}$; [Put $x+1=z$]

8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$ [Put $x+1=z$]

9. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

10. $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$;

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\,d\theta$;

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\,d\theta$;

13. $\int_0^{\pi} \sin\theta\cos^3\theta\,d\theta$;

14. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,d\theta$;

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$;

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}d\theta$;

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cot x}}{1+\sqrt{\cot x}}\,dx$; 18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan^4 x}}$

19. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^4 x}$; 20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x dx}{\sin x+\cos x}$

[C. U. 1976]

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x \cos x}\,dx$; 22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,dx$;

[C. U. 1975]

23. $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx$; 24. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\cos^2 x}$

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x+\cos x}$ 26. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$;

[C. U. 1974]

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\,dx$; 28. $\int_0^{1} \frac{\log(1+x)\,dx}{1+x^2}$;

29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x\,dx$; 30. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx$;

31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x\,dx}{(a^2 \cos^2 x+b^2 \sin^2 x)^2}$.

তৃতীয় অধ্যায়

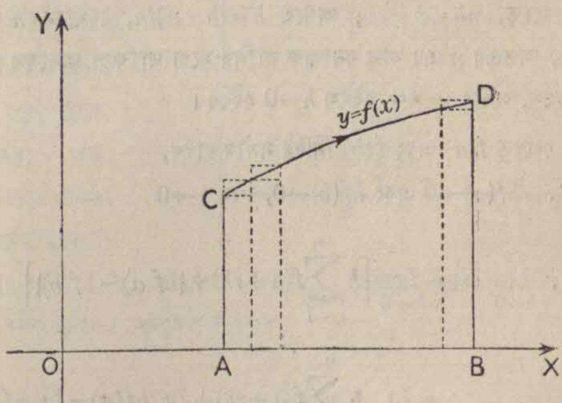
ক্ষেত্রফল

(Area)

3-1. ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র :

মনে করি, $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরাতে $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট সন্তত অপেক্ষক, যেখানে a এবং b নির্দিষ্ট সসীম ও $b>a$.

অধিকন্তু, মনে করা যাক্, a হইতে b পর্য্যন্ত x এর মানের অবিচ্ছিন্নভাবে (continuously) বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে অপেক্ষক $f(x)$ এর মানগুলিও অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রমবর্দ্ধমান (monotonic increasing), এবং $f(x)$ এর মান সর্বদা ধনাত্মক।



চিত্রে, $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরাতে $y=f(x)$ এর লেখ CD বক্ররেখা, যেখানে, $OA=a$, $OB=b$; $AC=f(a)$; $BD=f(b)$.

বক্ররেখা $y=f(x)$, সরলরেখাদ্বয় $x=a$, $x=b$, এবং x-অক্ষ দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল S দ্বারা সূচিত করা যাক্।

এখন AB রেখাংশকে সমান n-সংখ্যক ভাগে বিভক্ত করি, এবং মনে করি, এইরূপক্ষেত্রে, প্রতিটি ভাগের দৈর্ঘ্য h. তাহা হইলে, $nh=b-a$; অর্থাৎ $a+nh=b$.

মনে করি,

$$S_1 = hf(a) + hf(a+h) + \cdots \quad \cdots + hf(a+\overline{n-1}\,h)$$

$$= h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh) + \{hf(a) - hf(a+nh)\}$$

$$= h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh) + \{hf(a) - hf(b)\}\ ;$$

$$S_2 = hf(a+h) + hf(a+2h) + \cdots \quad \cdots + hf(a+nh)$$

$$= h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh).$$

চিত্র হইতে স্পষ্টতঃই দেখা যাইতেছে, $S_1 < S < S_2$.

এখন, যেহেতু, $nh = b - a$; অর্থাৎ $h = (b-a)/n$, যেখানে a এবং b নির্দিষ্ট সসীম রাশি, অতএব n এর মান ধনাত্মক রাশির মধ্যে থাকিয়া অনন্তের দিকে অগ্রসর হইতে থাকিলে, অর্থাৎ $n \to \infty$ হইলে $h \to 0$ হইবে।

আবার যেহেতু $f(a)$ এবং $f(b)$ নির্দিষ্ট সসীম রাশি,

$\therefore \quad hf(a) \to 0$ এবং $hf(b) \to 0$, যখন $h \to 0$

সুতরাং, $\underset{h\to 0}{Lt}\ S_1 = \underset{h\to 0}{Lt}\left[h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh) + \{hf(a) - hf(b)\}\right]$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh) + \underset{h\to 0}{Lt}\ hf(a) - \underset{h\to 0}{Lt}\ hf(b)$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh) + 0 - 0$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx\ ;$$

এবং $\underset{h\to 0}{Lt}\, S_2 = \underset{h\to 0}{Lt}\, h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh) = \int_a^b f(x)\,dx$;

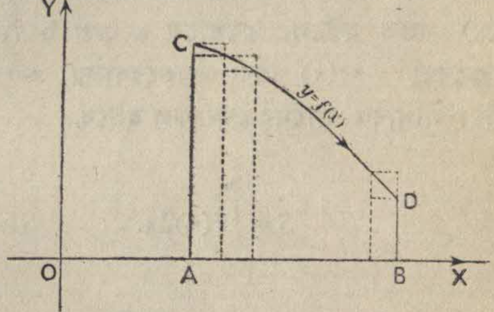
অর্থাৎ, যখন, $h\to 0$,

$S_1 \to \int_a^b f(x)\,dx$ এবং $S_2 \to \int_a^b f(x)\,dx.$

কিন্তু, $S_1 < S < S_2$.

$$\therefore \quad S = \int_a^b f(x)\,dx$$

সুতরাং, জ্যামিতিক অর্থে, বক্ররেখা $y=f(x)$, সরলরেখাদ্বয় $x=a$, এবং $x=b$, ও x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\int_a^b f(x)\,dx$ কে বুঝাইবে ; এবং বিপরীতক্রমে।



$[a, b]$-তে $f(x)$ সন্তত ও ধনাত্মক হইলে এবং a হইতে b পর্য্যন্ত x এর মানের অবিচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে অপেক্ষক $f(x)$ এর মান অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিলে, অনুরূপভাবে দেখানো যাইবে যে, বক্ররেখা $y=f(x)$, সরলরেখাদ্বয় $x=a$ এবং $x=b$ ও x অক্ষ দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল হইবে :

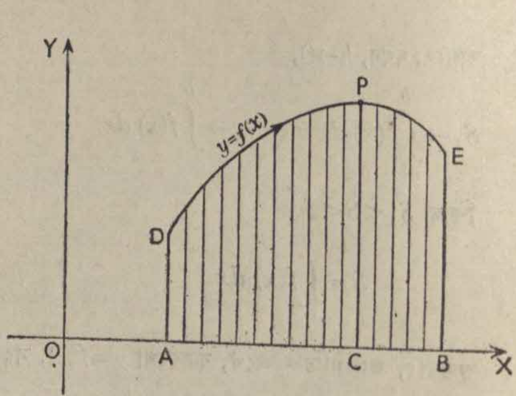
$$S = \int_a^b f(x)\,dx\cdot$$

এখন, মনে করি, $[a, b]$-তে $f(x)$ সন্তত এবং ধনাত্মক ; এবং $[a, c]$-তে $f(x)$ monotonic increasing এবং $[c, b]$-তে monotonic decreasing যেখানে, $a<c<b$.

এইরূপক্ষেত্রে, বক্ররেখা $y=f(x)$, এবং সরলরেখাত্রয় $x=a$, $x=b$, $y=0$ দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল হইবে,

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx;$$

অর্থাৎ, $\int_a^b f(x)\,dx\cdot$



সুতরাং, [a, b] এই বদ্ধ অন্তরাতে x এর এক একটি মানের জন্য f(x) এর কেবলমাত্র এক একটি ধনাত্মক মান থাকিলে এবং f(x) সন্তত হইলে, যেখানে a এবং b নির্দ্দিষ্ট সসীম ও b>a, বক্ররেখা y=f(x) এবং সরলরেখাত্রয় x=a, এবং x=b ও y=0 দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল হইবে,

$$S=\int_a^b \mathbf{f(x)dx}.$$

3-2. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. $y=3x^2+2x$ বক্ররেখা, x-অক্ষ, এবং $x=2$ ও $x=4$ সরল-রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

সমাধান : সংক্ষিপ্ত তালিকা :

$x=$	0	1	2	3	4
$y=$	0	5	16	33	56

OX এর দিকে একক $=1$, OY এর দিকে একক $=0{\cdot}1$—এই হিসাবে ছবি আঁকা হইয়াছে। এখানে $f(x)=3x^2+2x$; $a=2$; $b=4$.

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল :

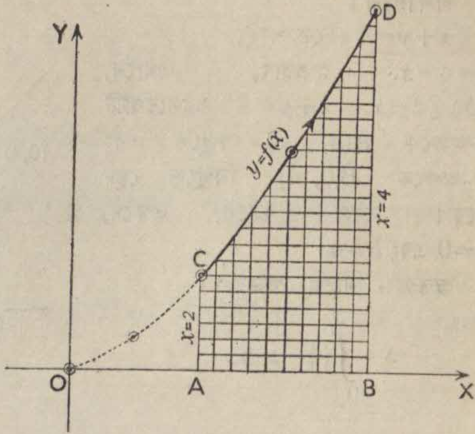
$$S=\int_2^4 f(x)dx$$

$$=\int_2^4 (3x^2+2x)dx$$

$$=\Big[x^3+x^2\Big]_2^4$$

$$=(4^3+4^2)-(2^3+2^2)$$

$$=80-12=68 \text{ বর্গ একক।}$$



উদাহরণ 2. বক্ররেখা $y^2=12x$, x-অক্ষ, এবং সরলরেখা $x=3$ দ্বারা বেষ্টিত সমতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

এখানে, $f(x)=\sqrt{12x}$;

$a=0$; $b=3$.

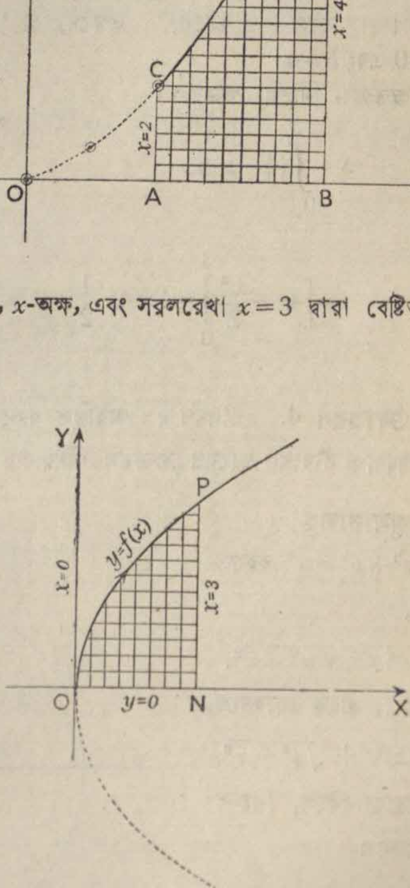
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল :

$$S=\int_0^3 \sqrt{12x}\, dx$$

$$=2\sqrt{3}\int_0^3 \sqrt{x}\, dx$$

$$=2\sqrt{3}\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{3}\Big[3^{\frac{3}{2}}-0\Big]=\frac{4}{3}\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}=12 \text{ বর্গ একক।}$$



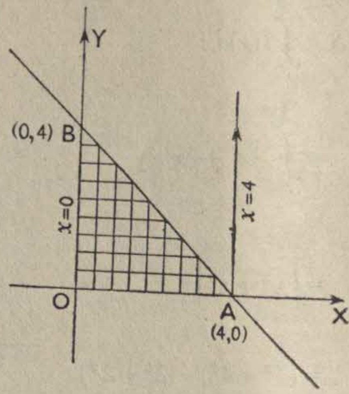
উদাহরণ 3. $x+y=4$, এবং স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতলের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

সমাধান :

$x+y=4$ হইতে পাই, $y=4-x$. সুতরাং, এখানে, $f(x)=4-x$. $x+y=4$ সরলরেখাটি x-অক্ষকে A(4, 0) বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে B(0, 4) বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে, এক্ষণে, $a=0$ এবং $b=4$.

সুতরাং, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল :

$$S=\int_0^4 (4-x)dx$$



$$=\left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_0^4=4\times4-\frac{1}{2}\times4^2=8 \text{ বর্গ একক।}$$

উদাহরণ 4. প্রথমপাদ অবস্থিত বক্ররেখা $x^2+y^2=a^2$ এবং স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

$x^2+y^2=a^2$ হইতে পাই,

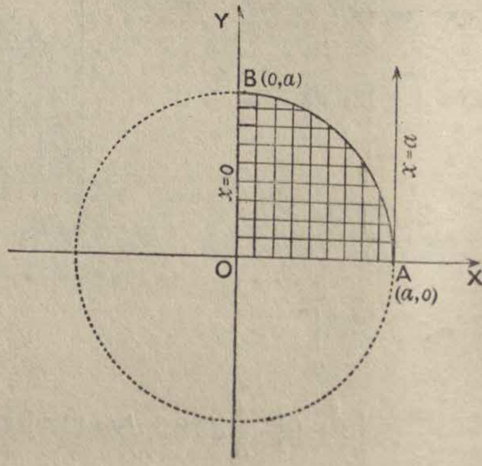
$=y\pm\sqrt{a^2-x^2}$.

সুতরাং, প্রদত্ত উদাহরণে,

$f(x)=+\sqrt{a^2-x^2}$.

তাহা হইলে, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল :

$$S=\int^a \sqrt{a^2-x^2}\ dx$$



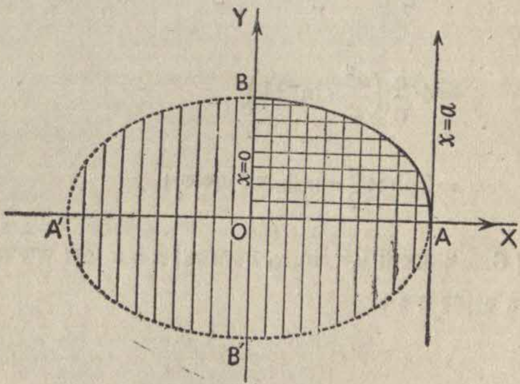
$$=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{2}a^2\times\sin^{-1}1=\frac{1}{2}a^2\times\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\pi a^2 \text{ বর্গ একক।}$$

দ্রষ্টব্য ঃ $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের পূর্ণ ক্ষেত্রফল $=4\times S=4\times\frac{1}{4}\pi a^2=\pi a^2$ বর্গ একক।

উদাহরণ 5. বক্ররেখা $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।



সমাধান ঃ

$x^2/a^2+y^2/b^2=1$ হইতে পাই,

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

উপবৃত্তটি x-অক্ষকে $A(a, 0)$ ও $A'(-a, 0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $B(0, b)$ ও $B'(0, -b)$ বিন্দুতে ছেদ করে। উপবৃত্তটি x-অক্ষ ও y-অক্ষ উভয়ের সাপেক্ষে প্রতিসম (symmetrical). সুতরাং প্রথম পাদে অবস্থিত এবং বক্ররেখা $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ও স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ

স্থানের ক্ষেত্রফল S হইলে, নির্ণেয় স্থানের (অর্থাৎ, পূর্ণ উপবৃত্তের অন্তর্গত) ক্ষেত্রফল $4S$ হইবে।

সুতরাং, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল :

$$4S=4\times\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

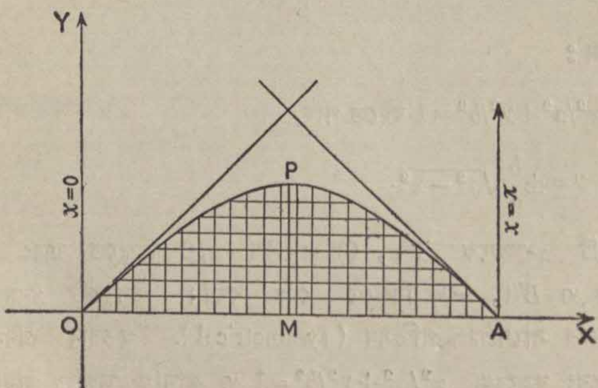
$$=\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4\cdot\frac{b}{a}\cdot\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$=4\cdot\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right)$$

$$=2ab\times\frac{\pi}{2}=\pi ab, \text{ বর্গ একক।}$$

উদাহরণ 6. বক্ররেখা $y=\sin x$, সরলরেখা $x=\pi$ এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।



সমাধান :

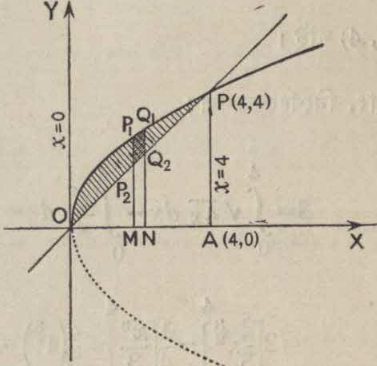
এখানে, $f(x)=\sin x$; $a=0$; $b=\pi$; $f(x)\geqslant 0$ in $[0, \pi]$.

সুতরাং, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল :

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2 \text{ বর্গ একক ।}$$

উদাহরণ 7. বক্ররেখা $y^2=4x$ এবং সরলরেখা $y=x$ দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :



$y^2=4x$ এবং $y=x$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া উহাদের ছেদবিন্দু $O\ (0, 0)$ এবং $P\ (4, 4)$ পাই।

$y^2=4x$ হইতে পাই,

$y=\pm 2\sqrt{x}$.

এখন, বক্ররেখা $y=+2\sqrt{x}$, সরলরেখা $x=4$ এবং x—অক্ষের মধ্যবর্তী স্থানের ক্ষেত্রফল S_1 হইলে,

$$S_1=\int_0^4 2\sqrt{x}\,dx=2\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4$$

$$=2\times\frac{2}{3}\times 4^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\times 8=32/3 \text{ বর্গ একক ।}$$

সরলরেখাদ্বয় $y=x$; $x=4$ এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল S_2 হইলে, $S_2=\int_0^4 x\,dx=\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^4=8$ বর্গ একক।

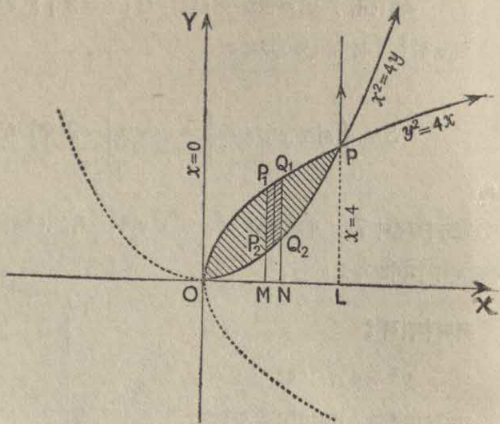
$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল :

$S=S_1-S_2=(32/3-8)$ বর্গ একক $=8/3$ বর্গ একক।

উদাহরণ 8. $y^2=4x$ এবং $x^2=4y$ বক্ররেখা দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

$y^2=4x$ এবং $x^2=4y$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া তাহাদের ছেদ বিন্দু $O(0, 0)$ এবং $P(4, 4)$ পাই।



সুতরাং, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল ঃ

$$S=\int_0^4 \sqrt{4x}\,dx-\int_0^4 \frac{x^2}{4}\,dx=2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx-\frac{1}{4}\int_0^4 x^2 dx$$

$$=2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4-\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{4}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{12}\left(4^3\right)$$

$$=\frac{4}{3}\times 8-\frac{1}{12}\times 64=\frac{16}{3}$$ বর্গ একক।

প্রশ্নমালা 11

1. $y=3x$ এবং $x=5$ সরলরেখাদ্বয় ও x-অক্ষ দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

2. $x/3+y/4=1$ সরলরেখা ও স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

3. $y=2x-4$ এবং $x=5$ সরলরেখাদ্বয় ও x-অক্ষের মধ্যবর্তী স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

4. বক্ররেখা $y=x^2$, সরলরেখাদ্বয় $x=1$ ও $x=4$ এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

5. বক্ররেখা $y^2=4x$, সরলরেখাদ্বয় $x=4$ ও $x=25$ এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. বক্ররেখা $y=x^3$ এবং সরলরেখাদ্বয় $x=6$ ও $y=0$ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

7. অধিবৃত্ত $y^2=4ax$, সরলরেখা $x=4a$ এবং x-অক্ষ দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

8. $y=\sin 2x$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=\pi/2$ সরলরেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

9. বক্ররেখা $y=\cos x$, $x-$অক্ষ এবং সরলরেখাদ্বয় $x=-\pi/2$ ও $x=\pi/2$ এর মধ্যবর্তী স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

10. বক্ররেখা $y^2=x$, ও সরলরেখা $x=9$ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

11. অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এবং ইহার নাভিলম্ব দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

12. বক্ররেখা $x^2+y^2=2ax$ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

13. $y^2=4x$ বক্ররেখা এবং $y=2x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

14. বক্ররেখা $4y=x^2$ এবং সরলরেখা $y=x$ দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [C. U. 1970]

15. বক্ররেখা $x^2+y^2=2ax$ এবং সরলরেখা $y=x$ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

16. বক্ররেখা $y=x\cos x$, x-অক্ষ ও সরলরেখাদ্বয় $x=0$ এবং $x=\pi/2$ দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

17. বক্ররেখা $y=4x^2(3-x)$ এবং $(0, 0)$ ও $(2, 16)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখা দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

18. $y=x^2$ এবং $y=\sqrt{x}$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

19. $y^2=6x$ এবং $x^2=6y$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[C. U. 1972]**

20. $y^2=ax$ এবং $x^2+y^2=2ax$ বক্ররেখা দুইটি দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

21. $y^2=4ax$ এবং $x^2=4ay$ অধিবৃত্তদ্বয়ের মধ্যবর্ত্তী স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

22. $y^2=4ax$ এবং $x^2=4ay$ বক্ররেখা দুইটি মূলবিন্দু ও P বিন্দুতে ছেদ করার ফলে একটি loop উৎপন্ন হয়। Integration দ্বারা এই loop-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং তথা হইতে দেখাও যে, বক্ররেখা দুইটি $y=0$, $y=4a$, $x=0$, $x=4a$ সরলরেখা চারিটি দ্বারা বেষ্টিত বর্গক্ষেত্রকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করে।

23. $y=x^3(\equiv OQP)$ বক্ররেখার উপর $P\,(1, 1)$ বিন্দুটি অবস্থিত; P বিন্দু হইতে x-অক্ষ ও y-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব, যেখানে OX-এর উপর M এবং OY এর উপর N অবস্থিত। দেখাও যে, $OMPQO$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং $OQPNO$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের এক তৃতীয়াংশ।

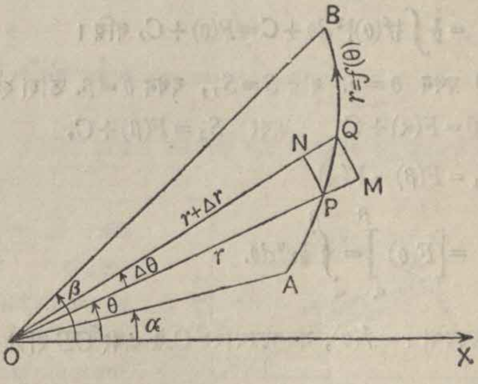
24. বক্ররেখা $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এবং সরলরেখা $x/a+y/b=1$ দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

3-3. অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে ক্ষেত্রফলের সূত্র :

মনে করি, $\alpha \leq \theta \leq \beta$-তে $f(\theta)$ সন্তত, ধনাত্মক এবং α হইতে β পর্যন্ত θ-এর মানের অবিচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে অপেক্ষক $f(\theta)$-এর অনুরূপ মানগুলি অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতে থাকে।

চিত্রে O মূলবিন্দু ; OX মূলরেখা ; AB বক্ররেখা $r=f(\theta)$-এর লেখ, যেখানে, $\angle XOA=\alpha$ এবং $\angle XOB=\beta$.

মনে করি, $P(r, \theta)$ ঐ লেখচিত্রের উপর যে কোন বিন্দু ; তাহা হইলে $OP=r$ এবং $\angle XOP=\theta$; P-এর নিকটে যে কোন বিন্দু Q ঐ লেখ-এর উপর লই, যেখানে $OQ=r+\Delta r$ এবং $\angle XOQ=\theta+\Delta\theta$.



মনে করি, বক্ররেখা $r=f(\theta)$, ও সরলরেখাদ্বয় OA ও OP দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল S ; এবং বক্ররেখা $r=f(\theta)$ ও সরলরেখাদ্বয় OA ও OQ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল $S+\Delta S$.

তাহা হইলে, বক্ররেখা $r=f(\theta)$ এবং সরলরেখাদ্বয় OP ও OQ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল ΔS.

চিত্রে, $ON=OP=r$; $OM=OQ=r+\Delta r$;

$$\therefore \quad \Delta OPN=\tfrac{1}{2}.OP.ON.\sin \widehat{PON}$$
$$=\tfrac{1}{2}r^2 \sin \Delta\theta ;$$

$$\Delta OQM=\tfrac{1}{2}.OQ.OM.\sin \widehat{QOM}$$
$$=\tfrac{1}{2}(r+\Delta r)^2 \sin \Delta\theta.$$

স্পষ্টতঃই,

$$\triangle OPN < \triangle S < \triangle OQM,$$

বা, $\frac{1}{2}r^2 \sin \Delta\theta < \Delta S < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2 \sin \Delta\theta,$

বা, $\frac{1}{2}r^2 \dfrac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} < \dfrac{\Delta S}{\Delta\theta} < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2 \dfrac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}.$

আবার যেহেতু, $\underset{\Delta\theta\to 0}{Lt} \dfrac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} = 1$, এবং $\Delta r \to 0$ যখন, $\theta \to 0$,

সুতরাং, $\underset{\Delta\theta\to 0}{Lt} \dfrac{\Delta S}{\Delta\theta} = \frac{1}{2}r^2$ অর্থাৎ, $\dfrac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2}r^2.$

$$\therefore \; S = \int \tfrac{1}{2}r^2 d\theta + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \{f(\theta)\}^2 d\theta + C = F(\theta) + C, \text{ ধরি ।}$$

এখন, $S=0$ যখন $\theta=\alpha$. ধরি $S=S_1$, যখন $\theta=\beta$. তাহা হইলে,

$$0 = F(\alpha) + C \quad \text{এবং} \quad S_1 = F(\beta) + C.$$

$$\therefore \; S_1 = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$= \Big[F(\theta)\Big]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}r^2 d\theta.$$

সুতরাং, বক্ররেখা $r=f(\theta)$, সরলরেখাদ্বয় OA এবং OB দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :

$$\mathbf{S_1 = \tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 d\theta}, \text{ **যেখানে,** } \mathbf{r = f(\theta)}.$$

দ্রষ্টব্য :

$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$-তে $f(\theta)$ সন্তত, ধনাত্মক এবং α হইতে β পর্যন্ত θ এর মানের অবিচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে অপেক্ষক $f(\theta)$-এর অনুরূপ মানগুলি ক্রমশঃ কমিতে থাকিলে, অনুরূপভাবে দেখানো যাইবে যে, বক্ররেখা $r=f(\theta)$, সরলরেখাদ্বয় OA ও OB দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল :

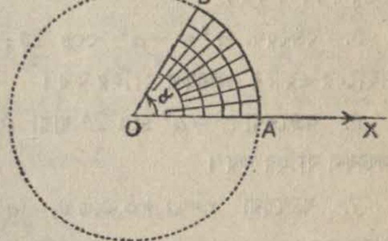
$$\mathbf{S = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta}, \text{ **যেখানে** } \mathbf{r = f(\theta)}.$$

3-4. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. a একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের AB চাপ উহার কেন্দ্র O-তে α রেডিয়ান্ কোণ উৎপন্ন করে। ব্যাসার্ধ OA ও OB এবং বৃত্তচাপ AB দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $r=a$; O মূলবিন্দু। OA বরাবর মূলরেখা OX লই। তাহা হইলে, $\angle XOB=\alpha$ (রেডিয়ান্)।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল :

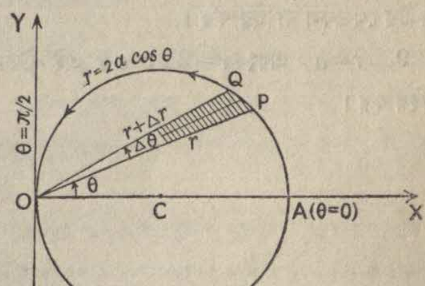


$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} r^2 d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} a^2 d\theta=\frac{1}{2}a^2\alpha.$$

উদাহরণ 2. $r=2a\cos\theta$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :



এখানে, মূলবিন্দু O প্রদত্ত বক্ররেখার উপর অবস্থিত। $\theta=0$ হইলে, $r=2a$; $\theta=\pi/2$ হইলে, $r=0$; $\theta=0$ হইতে $\theta=\pi/2$ পর্যন্ত θ এর মানের ক্রমশঃ বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে r এর অনুরূপ মানগুলি ক্রমশঃ কমিতে থাকে। তাহা ছাড়া, বক্ররেখাটি মূলরেখা OX এর সাপেক্ষে প্রতিসম।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল :

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2 d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2a\cos\theta)^2 d\theta$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=2a^2\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2a^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi a^2.$$

প্রশ্নমালা 12

1. বৃত্ত $r=a$ এবং উহার একটি জ্যা AB দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

2. বক্ররেখা $r=2a \sin \theta$ দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

3. বক্ররেখা $r=a(1+\cos \theta)$ দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

4. বক্ররেখা $r^2=a^2 \cos 2\theta$ দ্বারা যে দুইটি loop উৎপন্ন হয় তাহাদের একটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

5. বক্ররেখা $r^2=-a^2 \cos 2\theta$; দ্বারা যে দুই দুইটি loop উৎপন্ন হয় তাহাদের একটির ক্ষেত্রফল বাহির কর।

6. বক্ররেখা $r^2=a^2 \sin 2\theta$ দ্বারা যে দুইটি loop উৎপন্ন হয় তাহাদের একটির ক্ষেত্রফল বাহির কর।

7. বক্ররেখা $r=a+b \cos \theta$, $(a>b>0)$ দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

8. বক্ররেখা $r=a \cos 3\theta$, $(a>0)$ যে তিনটি loop উৎপন্ন করে, তাহাদের একটির ক্ষেত্রফল বাহির কর।

9. $r=a$ এবং $r=2a \cos \theta$ এই উভয় বৃত্তের সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

চতুর্থ অধ্যায়

অন্তরকলিত সমীকরণ

(Differential Equations)

4-1. উপস্থাপন :

নিরপেক্ষ চলরাশি (Independent Variable), উহার সাপেক্ষে **অধীন চলরাশি (Dependent Variable)** এবং উহাদের **অন্তরকলিতক (differential coefficients)** সম্বলিত সমীকরণকে **অবকলিত** (বা **অন্তরকলিত) সমীকরণ (Differential Equation)** বলা হয়। দৃষ্টান্তস্বরূপ,

(i) $\dfrac{dy}{dx}=x+y$; (ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$;

(iii) $y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-x^2=0$; (iv) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=x+y$;

(v) $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2+3\,\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\,\dfrac{dy}{dx}+5y=x^2$.

কোন অবকলিত সমীকরণের অন্তর্গত অবকলিতকের (differential coefficient) সর্বোচ্চ ক্রমই ঐ সমীকরণের **ক্রম** (order) নির্দেশ করিবে। উদাহরণস্বরূপ, (i) ও (iii) প্রথম ক্রমের সমীকরণ, (ii) ও (iv) দ্বিতীয় ক্রমের সমীকরণ এবং (v) তৃতীয় ক্রমের সমীকরণ।

কোন অবকলিত সমীকরণের সর্বোচ্চ অবকলিতকের ঘাত (power)-কে ঐ সমীকরণের **মাত্রা** (Degree) বলা হইবে অবশ্য সমীকরণের অন্তর্গত অবকলিতকগুলি যদি radicals এবং fractional ঘাত হইতে মুক্ত থাকে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, (i), (ii) ও (iv)-এর মাত্রা এক ; (iii) ও (v)-এর মাত্রা দুই।

4-2. অবকলিত সমীকরণ গঠন :

(a) $y^2=4ax$ ... ... (1)

সমীকরণে a-এর বিভিন্ন মানের জন্য অধিবৃত্তের বিভিন্ন আকার হইবে। এইরূপ ক্ষেত্রে, a-কে **অস্থায়ী ধ্রুবক** (arbitrary constant বা parameter) বলে।

$y^2=4ax$-কে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$2y\frac{dy}{dx}=4a. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

এখন (1) এবং (2) হইতে a-কে অপনয়ন করিয়া পাই

$$2xy\frac{dy}{dx}=y^2\ ; \qquad y\neq 0\ ;$$

অর্থাৎ, $2x\frac{dy}{dx}-y=0.$ ... ... (3)

ইহা একটি অবকলিত সমীকরণ। এই অবকলিত সমীকরণের সমাধান $y^2=4ax$, কারণ, ইহা উক্ত অবকলিত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(b) $y=A\cos x+B\sin x$ ... ... (1)

সমীকরণে A এবং B দুইটি অস্থায়ী ধ্রুবক। এই সমীকরণকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dy}{dx}=-A\sin x+B\cos x. \quad \cdots \quad (2)$$

ইহাকে আবার x-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-A\cos x-B\sin x. \quad \cdots \quad (3)$$

এখন, (1), (2), ও (3) হইতে A ও B অপনয়ন করিয়া পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0, \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

যাহা একটি অবকলিত সমীকরণ। স্পষ্টতঃই, $y=A\cos x+B\sin x$ সমীকরণ (4) এর সমাধান, কারণ, ইহা অবকলিত সমীকরণ (4)-কে সিদ্ধ করে।

সাধারণ নিয়ম ঃ

(i) $f(x, y, c)=0$ ... ... (1)

সমীকরণে c একটি অস্থায়ী ধ্রুবক। এই সমীকরণকে x-এর সাপেক্ষে একবার মাত্র অবকল করিয়া যে সমীকরণ পাওয়া যাইবে সেইটি এবং প্রদত্ত (1) এর মধ্যে c-কে অপনয়ন করিলে (1) এর অবকলিত সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

(ii) $f(x, y, c_1, c_2)=0$ ... ... (1)

একটি সমীকরণ যেখানে c_1 এবং c_2 দুইটি অস্থায়ী ধ্রুবক। এখন প্রদত্ত সমীকরণ (1) কে x-এর সাপেক্ষে পর পর দুইবার অবকলন করিলে যে দুইটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে তাহাদের এবং প্রদত্ত সমীকরণের মধ্যে c_1 এবং c_2 কে অপনয়ন করিলে (1) এর অবকলিত সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

অনুরূপভাবে, কোন সমীকরণে যত সংখ্যক অস্থায়ী (arbitrary) ধ্রুবক থাকিবে সমীকরণটিকে x-এর সাপেক্ষে পর পর ঠিক ততবার অবকলন করিয়া ঐ সমীকরণগুলি এবং প্রদত্ত সমীকরণ হইতে অস্থায়ী ধ্রুবকগুলিকে অপনয়ন করিলে, প্রদত্ত সমীকরণের অবকলিত সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

মন্তব্য :

উপরোক্ত আলোচনা হইতে বুঝা যাইতেছে, কোন অবকলিত সমীকরণ যত ক্রমের হইবে, উহার সাধারণ সমাধানে ঠিক তত সংখ্যক পরস্পর **নিরপেক্ষ অস্থায়ী ধ্রুবক** (Indepedent arbitrary constants) থাকিবে।

কোন সমীকরণের সাধারণ সমাধানে অস্থায়ী ধ্রুবকের মান নির্দিষ্ট হইলে, যে সমাধানটি পাওয়া যাইবে তাহাকে নির্দিষ্ট সমাধান (Particular solution) বলে।

4-3. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$ হইতে A এবং B এই দুইটি অস্থায়ী ধ্রুবক অপনয়ন কর।

সমাধান :

এখানে, $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$. ... (1)

(1)-কে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই

$$\frac{dy}{dx}=Ame^{mx}-Bme^{-mx} \quad \cdots \quad (2)$$

(2)-কে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=Am^2e^{mx}+Bm^2e^{-mx} \quad \cdots \quad (3)$$

(1) এবং (3) হইতে পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2}-m^2y=0. \quad \cdots \quad (4)$$

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ 2. $y=A\cos(nx+\alpha)$ হইতে A এবং α অপনয়ন কর।

সমাধান :

এখানে, $y=A\cos(nx+\alpha)$. ... (1)

x-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া (1) হইতে পাই,

$$\frac{dy}{dx}=-An\sin(nx+\alpha) \quad \cdots \quad (2)$$

আবার, (2)-কে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -An^2 \cos(nx+\alpha). \qquad \cdots \quad (3)$$

(1) এবং (3) হইতে A এবং α অপনয়ন করিয়া পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0, \qquad \cdots \quad (4)$$

যাহা নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $V = \frac{A}{r} + B$, $\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0$ কে সিদ্ধ করে ; (A, B দুইটি অস্থায়ী ধ্রুবক)।

সমাধান :

এখানে, $\quad V = \frac{A}{r} + B. \qquad \cdots \quad (1)$

(1)-কে r-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{A}{r^2} \qquad \cdots \quad (2)$$

আবার, (2)-কে r-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d^2V}{dr^2} = 2\frac{A}{r^3} \qquad \cdots \quad (3)$$

তাহা হইলে,

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = \frac{2A}{r^3} + \frac{2}{r}\left(-\frac{A}{r^2}\right) \equiv 0.$$

উদাহরণ 4. দেখাও যে, $x = e^{-t}.(a \cos 2t + b \sin 2t)$, অবকলিত সমীকরণ $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$ কে সিদ্ধ করে।

সমাধান :

এখানে, $x = e^{-t}.(a \cos 2t + b \sin 2t). \qquad \cdots \quad (1)$

(1)-কে t-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dx}{dt} = e^{-t}.(-2a \sin 2t + 2b \cos 2t)$$
$$- e^{-t}(a \cos 2t + b \sin 2t)$$
$$= e^{-t}\{(2b-a) \cos 2t - (b+2a) \sin 2t\}. \qquad \cdots \quad (2)$$

(2)-কে t-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=e^{-t}\{-2(2b-a)\sin 2t-2(b+2a)\cos 2t\}$$

$$-e^{-t}\{(2b-a)\cos 2t-(b+2a)\sin 2t\}$$

$$=e^{-t}\{(4a-3b)\sin 2t-(3a+4b)\cos 2t\} \quad \cdots \quad (3)$$

$$\therefore\ \frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+5x$$

$$=e^{-t}\{(4a-3b)\sin 2t-(3a+4b)\cos 2t\}$$

$$+2e^{-t}\{(2b-a)\cos 2t-(b+2a)\sin 2t\}$$

$$+5e^{-t}\{a\cos 2t+b\sin 2t\}\equiv 0.$$

প্রশ্নমালা 13

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে a অপনয়ন করিয়া অবকলিত সমীকরণ গঠন কর :

(i) $y=a\cos x$; (ii) $y=a\sin mx$;
(iii) $y=mx+a$; (iv) $x^2+y^2=a^2$;
(v) $x^2+y^2=2ax$; (vi) $y=a\log x+5$.

2. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে A এবং B অপনয়ন করিয়া অবকলিত সমীকরণ গঠন কর :

(i) $y=Ae^x+Be^{-x}$; (ii) $y=A\cos x+B\sin x$;
(iii) $y=A\cos mx+B\sin mx$; (iv) $y=A\cosh mx+B\sinh mx$;
(v) $y=(A+Bx)e^{\alpha x}$; (vi) $y=Ax+B+x^2$;
(vii) $y=A\cos 3x+B\sin 3x+\frac{1}{2}e^{3x}$; (viii) $y=Ae^{Bx}$.

3 নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে অস্থায়ী ধ্রুবক a এবং b অপনয়ন করিয়া অবকলিত সমীকরণ গঠন কর :

(i) $x^2+y^2=2ax+b$; (ii) $y=ax^3+bx$;
(iii) $y=ax+bx^2$; (iv) $x=a\sin t+b\cos t$;
(v) $y=ae^{kx}+be^{-kx}$; (vi) $xy=ae^x+be^{-x}$;
(vii) $ax^2+by^2=1$; (viii) $(y-b)^2=4\lambda(x-a)$.

4. দেখাও যে, $y=Ae^{-x}\cos 2x$, অবকলিত সমীকরণ $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+5y=0$ কে সিদ্ধ করে।

5. দেখাও যে, $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\mu^2x=0$ সমীকরণের একটি সমাধান $x=a\cos\mu t$.

6. দেখাও যে, $x^2+y^2=a^2$, অবকলিত সমীকরণ $y=x\dfrac{dy}{dx}+a\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ এর সমাধান।

7. দেখাও যে, $x=a\cos(\omega t+\epsilon)$, অবকলিত সমীকরণ $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ কে সিদ্ধ করে।

8. দেখাও যে, $x=A\cosh(t\sqrt{\mu}+\epsilon)$, অবকলিত সমীকরণ $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\mu x$ কে সিদ্ধ করে।

9. দেখাও যে, (i) $x=A\cos(\omega t+\epsilon)+\dfrac{\lambda}{\omega^2-p^2}\sin pt$,

$$\text{(ii)}\quad x=A\cos(\omega t+\epsilon)-\frac{\lambda t}{2\omega}\cos\omega t,$$

সর্বদাই, A এবং ϵ এর যে কোন মানের জন্য, যথাক্রমে

(i) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\lambda\sin pt$ এবং (ii) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\lambda\sin\omega t$ কে সিদ্ধ করে।

10. $s=\exp(-\lambda t)\{A\cos\mu t+B\sin\mu t\}$, A এবং B এর যে কোন মানের জন্য, দ্বিতীয় ক্রমের যে অবকলিত সমীকরণকে সিদ্ধ করে তাহা নির্ণয় কর।

11. দেখাও যে, α এবং β এর যে কোন মানের জন্য, $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$ সর্বদাই $\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3=\left(a\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ কে সিদ্ধ করে।

12. যে সমস্ত অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$ একক এবং যাহাদের অক্ষসমূহ x-অক্ষের সমান্তরাল, তাহাদের অবকলিত সমীকরণ বাহির কর।

4-4. প্রথম ক্রম ও একঘাত বিশিষ্ট অবকলিত সমীকরণের সমাধান প্রণালী :

প্রথম ক্রমের একটি অবকলিত সমীকরণের সাধারণ সমাধানে কেবলমাত্র একটি অস্থায়ী ধ্রুবক থাকিবে।

4-5. (Variables Separable) : $\phi(x)dx+\psi(y)dy=0$ আকারের অবকলিত সমীকরণ সমাধান প্রণালী :

এইরূপক্ষেত্রে, প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান হইবে :

$$\int\phi(x)dx+\int\psi(y)dy=c$$

যেখানে, c একটি অস্থায়ী ধ্রুবক।

4-6. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. সমাধান কর :

$$(x^2+x+1)dx+(y^2+y+1)dy=0.$$

সমাধান :

প্রদত্ত সমীকরণকে Integration দ্বারা পাই,

$$\int(x^2+x+1)dx+\int(y^2+y+1)dy=c\ ;$$

বা, $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)+\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+y\right)=c\ ;$

বা, $2(x^3+y^3)+3(x^2+y^2)+6(x+y)+k=0,$

যেখানে k একটি অস্থায়ী ধ্রুবক।

উদাহরণ 2. সমাধান কর :

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1+y^2}{1+x^2}=0.$$

সমাধান :

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{1}{1+x^2}dx+\frac{1}{1+y^2}dy=0$$

ইহাকে Integration দ্বারা পাই,

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx+\int\frac{1}{1+y^2}dy=k\ ;$$

বা, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}c.$

$\therefore\ \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}=\tan^{-1}c.$

সুতরাং, $\dfrac{x+y}{1-xy}=c\ ;$

অর্থাৎ, $x+y=c(1-xy)\ ;$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান, যেখানে c একটি অস্থায়ী ধ্রুবক।

উদাহরণ 3. সমাধান কর :

$$(yx^2+y)dy-(xy^2+x)dx=0.$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$y(1+x^2)dy=x(1+y^2)dx\ ;$

বা, $\dfrac{ydy}{1+y^2}-\dfrac{x}{1+x^2}\,dx=0.$

ইহাকে Integration দ্বারা পাই,

$$\int\frac{y}{1+y^2}\,dy-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx=k\ ;$$

বা, $\displaystyle\int\frac{2y}{1+y^2}\,dy-\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx=2k\ ;$

বা, $\log(1+y^2)-\log(1+x^2)=2k\ ;$

বা, $\log\left(\dfrac{1+x^2}{1+y^2}\right)=\log c$

$\therefore\ 1+x^2=c(1+y^2)\ ;$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান, যেখানে c একটি অস্থায়ী ধ্রুবক।

উদাহরণ 4. সমাধান কর :

$$x\,dx+ye^y\cos^2x\,dy=0$$

সমাধান :

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$x\sec^2x\,dx+ve^ydy=0.$$

ইহাকে Integration দ্বারা পাই,

$$\int x \sec^2 x\, dx + \int y e^y dy = c\ ;$$

বা, $\left\{x \tan x - \int \tan x\, dx\right\} + \left\{y e^y - \int e^y dy\right\} = c\ ;$

বা, $x \tan x + \log |\cos x| + y e^y - e^y = c.$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

উদাহরণ 5. সমাধান কর : $x\, dx - y\, dy = 0$;
দেওয়া আছে, $y = 0$ যখন $x = 2$.

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\int x\, dx - \int y\, dy = c\ ;$$

বা, $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c$; বা, $x^2 - y^2 = 2c.$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী, ($\therefore$ $y = 0$, যখন $x = 2$),
$4 - 0 = 2c.$ $\therefore$ $c = 2.$

সুতরাং, নির্ণেয় নির্দিষ্ট সমাধান : $x^2 - y^2 = 4.$

উদাহরণ 6. যে বক্ররেখাটি ($a, 0$) বিন্দুগামী এবং যাহার উপরিস্থ যে কোন বিন্দু (x, y) এ তে উহার নতিমাত্রা $-x/y$, তাহার সমীকরণ বাহির কর।

সমাধান :

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $\frac{dy}{dx} = -x/y$; বা, $x\, dx + y\, dy = 0.$

$\therefore$ $\int x\, dx + \int y\, dy = c\ ;$

বা, $x^2 + y^2 = 2c.$

এখন, দেওয়া আছে, $y = 0$ যখন $x = a$.

$\therefore$ $a^2 + 0 = 2c$; বা, $2c = a^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় বক্ররেখার সমীকরণ :

$x^2 + y^2 = a^2.$

প্রশ্নমালা 14

সমাধান কর : (1 হইতে 30) :

1. $3x^2dx+2y\,dy=0$;
2. $x^2dx-y^2dy=0$;
3. $(x+1)dx+(y+1)dy=0$;
4. $(x^2-1)dx=(y^2-1)dy$;
5. $e^x dy+e^y dx=0$;
6. $xe^x dx+ye^y dy=0$;
7. $\cos^2 y\,dx-\cos^2 x\,dy=0$;
8. $x(y^2+1)\,dx-y(x^2+1)dy=0$;
9. $(1+y^2)dx-xy\,dy=0$;
10. $\sqrt{1-x^2}dy+\sqrt{1-y^2}dx=0$;
11. $y\,dx-x\,dy=xy\,dy$;
12. $y^2dx+x^2dy=x^2y^2dy$;
13. $\tan^2 x\,dx+\tan^2 y\,dy=0$;
14. $x\cos^2 y dx-y\cos^2 x dy=0$;
15. $\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}=0$;
16. (i) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-x+1}{y^2-y+1}$;

    (ii) $(dy/dx)=(y^2-y+1)/(x^2-x+1)$;
17. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y(y-1)}{x(x-1)}=0$;
18. $\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{\dfrac{1+y^2}{1+x^2}}=0$;
19. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$;
20. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$; [C. U. 1971]
21. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$; [C. U. 1974]
22. $(x^2-yx^2)dy+(y^2+xy^2)dx=0$;
23. $y\,dx+(1+x^2)\tan^{-1}x\,dy=0$;
24. $x^2(1+y)\dfrac{dy}{dx}+y^2(1+x)=0$;
25. $3e^x\tan y\,dx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$;
26. $(e^x+1)ydy-(y+1)e^x dx=0$; [C U. 1975]
27. $\left(y-x\dfrac{dy}{dx}\right)=a\left(y^2+\dfrac{dy}{dx}\right)$;
28. $xy^2dy-y^3dx+y^2dy=dx$;
29. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}}{xy}=0$;
30. $xy\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}(1+x+x^2)$;
31. দেওয়া আছে, $y=1$ যখন $x=0$; সমাধান কর :

    $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0.$
32. দেওয়া আছে, $y=-1$ যখন $x=0$. দেখাও যে,
    $x(y^2+1)dx+y(x^2+1)dy=0$ সমীকরণের সমাধান $(1+x^2)(1+y^2)=2.$

33. যে বক্ররেখাটি (2, 1) বিন্দুগামী এবং যাহার উপর যে কোন বিন্দু $P(x, y)$-এতে স্পর্শকের নতিমাত্রা x/y, তাহার সমীকরণ বাহির কর।

34. মূলবিন্দুগামী যে বক্ররেখার উপর (x, y) বিন্দুতে $\frac{dv}{dx}+\frac{x+1}{y+1}=0$, তাহার সমীকরণ বাহির কর।

35. (0, 2) বিন্দুগামী কোন একটি বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে উহার নতিমাত্রা e^x হইলে, বক্ররেখাটির সমীকরণ বাহির কর।

36. একটি বস্তুকণা কোন সরলরেখা বরাবর চলিতে থাকিলে যদি t সেকেণ্ড সময়ে উহার বেগ $\frac{ds}{dt}=3t^2+4$ হয় এবং $s=3$ সে. মি. যখন $t=0$ হয়, তবে $t=3$ সেকেণ্ডের সময়ে বস্তুকণাটি মূলবিন্দু হইতে কতদূরে যাইবে ?

37. t সেকেণ্ড সময়ে সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণার বেগ নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা সূচিত : $\frac{dx}{dt}=3t^2+2t+5$.

যদি $x=0$ যখন $t=0$ দেওয়া থাকে, তাহা হইলে, 3 সেকেণ্ডে বস্তুকণাটি কতদূর যাইবে ; এবং তখন উহার ত্বরণ এবং বেগ কত হইবে ?

4-7. Method of Substitution :

কখনও কখনও কোন বিশেষ ধরণের অবকলিত সমীকরণে চলরাশির পরিবর্তন দ্বারা উহাকে রূপান্তরিত করিলে, সমাধান করা সহজ হইবে। নিম্নের দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ্যণীয়।

4-8. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\frac{dv}{dx}=(y-x)^2$.

সমাধান :

সমীকরণটি : $\frac{dy}{dx}=(y-x)^2$. ... ... (1)

ধরি, $y-x=v$. $\therefore$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}+1$.

তাহা হইলে, (1) হইতে পাই,

$$\frac{dv}{dx}+1=v^2\ ; \quad \text{বা,}\quad \frac{dv}{dx}=v^2-1.$$

বা, $dx=\dfrac{1}{v^2-1}\,dv$

ইহাকে সমাকলন দ্বারা পাই,

$$c+x=\int\frac{1}{v^2-1}\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v+1}\right]dv$$

$$=\frac{1}{2}\{\log|v-1|-\log|v+1|\}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{v-1}{v+1}\right|$$

$$\therefore\quad x+c=\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-x-1}{y-x+1}\right|;$$

বা, $\left|\dfrac{y-x-1}{y-x+1}\right|=e^{2(x+c)}$;

বা, $(y-x-1)^2=(y-x+1)^2k^2e^{4x}.$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান, যেখানে k একটি অস্থায়ী ধ্রুবক।

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\dfrac{dy}{dx}=\sin(x+y).$

সমাধান :

সমীকরণটি : $\dfrac{dy}{dx}=\sin(x+y)$ ... ... (1)

ধরি, $x+y=v$. $\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}-1.$

তাহা হইলে, প্রদত্ত সমীকরণ (1) হইতে পাই,

$$\frac{dv}{dx}-1=\sin v\ ; \quad \text{বা,}\quad \frac{dv}{dx}=1+\sin v$$

বা, $dx=\dfrac{dv}{1+\sin v}.$

ইহাকে Integration দ্বারা পাই,

$$x+c=\int\frac{1}{1+\sin v}\,dv$$

$$=\int\frac{1-\sin v}{1-\sin^2 v}\,dv=\int\frac{(1-\sin v)}{\cos^2 v}\,dv$$

$$=\int\{\sec^2 v-\sec v\tan v\}\,dv$$

$$=\tan v-\sec v.$$

$$\therefore\quad x+c=\tan(y+x)-\sec(y+x).$$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

প্রশ্নমালা 15

সমাধান কর ঃ (1 হইতে 10) ঃ

1. $\dfrac{dy}{dx}=x+y$;

2. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}$; [C. U. 1976]

3. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x+y}$;

4. $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$;

5. $\log\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=x+y$;

6. $\cos^{-1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=x+y$;

7. $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2$; [C. U. 1972]

8. $(x-y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2$;

9. $\dfrac{dy}{dx}=\tan^2(x+y)$;

10. $\dfrac{dy}{dx}+1=e^{x+y}$.

11. যে বক্ররেখা মূলবিন্দুগামী এবং যাহার উপরিস্থ যে কোন বিন্দু $P(x, y)$-এতে উহার নতিমাত্রা $(y+2x)$, তাহার সমীকরণ বাহির কর। [C. U. 1967]

4-9. (1) $\mathbf{\frac{dv}{dx}=f(y/x)}$ ... ... (1)

আকারের অবকলিত সমীকরণ সমাধান প্রণালী :

এখানে, $\frac{y}{x}=v$, অর্থাৎ $y=vx$, ... (2) ধরিলে,

$\frac{dv}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ ... ... (3) হয়।

$\therefore$ (1)নং সমীকরণটি দাঁড়ায় : $v+x\frac{dv}{dx}=f(v)$;

বা, $\frac{dv}{f(v)-v}=\frac{dx}{x}$ ... ... (4) ;

যাহা § **4-5** অনুযায়ী সমাধান করা যাইবে।

(2) মনে করি, $Mdx+Ndy=0$ সমীকরণে M এবং N উভয়েই সমমাত্রা বিশিষ্ট (x, y) এর অপেক্ষকদ্বয়। এইরূপক্ষেত্রে, সমীকরণটিকে $\frac{dv}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$আকারে অতি সহজেই লেখা যায় ; তখন $\frac{y}{x}=v$, অর্থাৎ $y=vx$, ধরিলে সমীকরণটিকে অতি সহজেই সমাধান করা যাইবে। যেমন,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}=\frac{a_1+b_1(y/x)}{a_2+b_2(y/x)}.$$

এখানে, $y=xv$ ধরিলে, $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$; এবং তখন প্রদত্ত সমীকরণটি দাঁড়ায় :

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{a_1+b_1v}{a_2+b_2v}$$

বা, $$x\frac{dv}{dx}=\frac{a_1+b_1v}{a_2+b_2v}-v$$

$$=\frac{a_1+(b_1-a_2)v-b_2v^2}{a_2+b_2v}.$$

$$\therefore \frac{dx}{x}=\frac{(a_2+b_2v)\,dv}{a_1+(b_1-a_2)v-b_2v^2}.$$

$$\therefore \log|cx|=\int\frac{(a_2+b_2v)\,dv}{a_1+(b_1-a_2)v-b^2v^2};$$

যাহার মান সহজেই জানা যাইবে, যদি a_1, a_2, b_1, b_2 এর মান পূর্বেই দেওয়া থাকে।

4-10. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\frac{dy}{dx}=\frac{3x+2y}{2x-3y}$.

সমাধান :

সমীকরণটি : $\frac{dy}{dx}=\frac{3x+2y}{2x\ \ 3y}$ ... (1)

ধরি, $y=vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$.

তাহা হইলে, (1) হইতে পাই :

$$v+x\,\frac{dv}{dx}=\frac{3+2v}{2-3v};$$

বা, $x\,\frac{dv}{dx}=\frac{3+2v}{2-3v}-v=\frac{3(1+v^2)}{2-3v}$.

বা, $\frac{dx}{x}=\frac{2-3v}{3(1+v^2)}\,dv$

ইহাকে Integration দ্বারা পাই,

$$k+\log|x|=\int\frac{2-3v}{3(1+v^2)}\,dv$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dv}{1+v^2}-\int\frac{vdv}{1+v^2}$$

$$=\frac{2}{3}\tan^{-1}v-\frac{1}{2}\log(v^2+1);$$

বা, $2k+\log x^2+\log(v^2+1)=\frac{4}{3}\tan^{-1}v$;

বা, $2k+\log\{x^2\times(1+v^2)\}=\frac{4}{3}\tan^{-1}v$;

বা, $2k+\log(x^2+y^2)=\frac{4}{3}\tan^{-1}(y/x)$;

বা, $3\log(x^2+y^2)+c=4\tan^{-1}(y/x)$.

উদাহরণ 2. সমাধান কর :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x} \qquad \text{[C. U. 1975]}$$

সমাধান :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

ধরি, $y/x=v$; অর্থাৎ, $y=vx$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}.$$

তাহা হইলে, প্রদত্ত সমীকরণ (1) হইতে পাই

$$v+x\frac{dv}{dx}=v+\tan v\,;$$

বা, $x\dfrac{dv}{dx}=\tan v$ বা, $\dfrac{dx}{x}=\cot v\,dv.$

$$\therefore \quad \log(cx)=\int\frac{\cos v}{\sin v}dv=\log|\sin v|.$$

$\therefore \quad c^2x^2=\sin^2 v$ অর্থাৎ $c^2x^2=\sin^2(y/x)$.

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান : $c^2x^2=\sin^2(y/x)$;

বা, $\sin(y/x)=kx$.

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+3y}{-3x+2y}$.

সমাধান :

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $(2x+3y)dx-(-3x+2y)dy=0$

$\therefore \quad 2x\,dx+3(ydx+xdy)-2y\,dy=0.$

$\therefore \quad 2x\,dx+3d(xy)-2y\,dy=0.$

ইহাকে **Integration** করিয়া পাই :

$x^2+3xy-y^2=c.$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

উদাহরণ 4. সমাধান কর : $(x^2+y^2)\dfrac{dy}{dx}=xy$.

সমাধান :

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

ধরি, $y=vx \quad \therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}.$

তাহা হইলে, (1) হইতে পাই,

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v}{1+v^2}; \quad \text{বা,} \quad x\frac{dv}{dx}=-\frac{v^3}{1+v^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{x}=-\frac{1+v^2}{v^2}dv.$$

ইহাকে Integration করিয়া পাই,

$$\log(cx)=-\int\frac{1+v^2}{v^3}dv$$

$$=-\int\left\{\frac{1}{v^3}+\frac{1}{v}\right\}dv=\frac{1}{2v^2}-\log|v|$$

$$\therefore \quad \log(cxv)=\frac{1}{2v^2};$$

বা, $\log(cxv)^2=v^{-2}$; বা, $\log(cy)^2=(x/y)^2$;

বা, $(cy)^2=e^{x^2/y^2}$.

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান :

$c^2v^2=e^{x^2/y^2}$, যেখানে c যে কোন ধ্রুবক।

উদাহরণ 5. সমাধান কর : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(y+x)}{x(y-x)}$.

সমাধান ঃ

সমীকরণটি : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(y+x)}{x(y-x)}$. ... (1)

ধরি, $y=vx$; $\therefore \dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$.

তাহা হইলে, প্রদত্ত সমীকরণ (1) হইতে পাই,

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v(v+1)}{v-1}$$

বা, $x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v^2+v}{v-1}-v=\dfrac{2v}{v-1}$.

$$\therefore \quad 2\frac{dx}{x}=\frac{v-1}{v}dv.$$

$$\therefore\ 2\log|cx| = \int\frac{v-1}{v}dv$$

$$= \int\left\{1-\frac{1}{v}\right\}dv = v - \log|v|;$$

বা, $2\log|cx| + \log|v| = v$;

বা, $\log|v\times c^2x^2| = v$; বা, $\log|c^2xy| = y/x$

$\therefore\ c^4(xy)^2 = e^{2y/x}$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান : $k^2x^2y^2 = e^{2y/x}$

প্রশ্নমালা 16

সমাধান কর :

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3y}{5y+3x}$;
2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x}{2x+y}$;
3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+2y}{2x+y}$;
4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+3y}{3x+2y}$;
5. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{7x-3y}{3x+7y}=0$;
6. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x+8y}{5x+6y}$;
7. $x^2dy-(xy+y^2)dx=0$;
8. $xy\,dx-(x^2+y^2)dy=0$;
9. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{y^2}{x^2}$;
10. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(x-2y)}{x(x-3y)}$;
11. $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$;
12. $x^2y\,dx-(x^3+y^3)dy=0$;
13. $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$;
14. $x^2\dfrac{dy}{dx}=y^2$;
15. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{y^2}{x^2}$;
16. $\dfrac{1}{2x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=0$; [C. U. 1976]
17. $y^2+x^2\dfrac{dy}{dx}=xy\dfrac{dy}{dx}$;
18. $y^2dx+(xy+x^2)dy=0$;
19. $y^2dx-(x^2-xy)dy=0$; [C. U. 1971]
20. $\left(x+y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx=x\cos\dfrac{y}{x}\,dy$;

21. $\left(\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$;

22. $\left\{y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x}\right\}x\,dy=\left\{x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right\}y\,dx$;

23. $(1+3e^{y/x})dy+3e^{y/x}(1-y/x)dx=0$;

24. $(ax+hy+g)dx+(hx+by+f)dy=0.$

4-11. $\mathbf{\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}}$

আকারের অবকলিত সমীকরণ সমাধান প্রণালী :

(1) যদি $A=-b$ হয়, তবে সমীকরণটি : $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{-bx+By+C}$.

$\therefore\ 2(ax+c)dx+2b(y\,dx+x\,dy)-2(By+C)dy=0.$

$\therefore\ 2(ax+c)dx+2bd(xy)-2(By+C)dy=0.$

$\therefore\ ax^2+2bxy-By^2+2cx-2Cy+K=0.$

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\frac{dy}{dx}=\frac{3x+4y+5}{-4x+3y+6}$.

সমাধান : এখানে, সমীকরণটিকে লেখা যায় :

$$2(3x+5)dx+8(ydx+xdy)-2(3y+6)dy=0$$

$\therefore\ 3x^2+10x+8\int d(xy)-3y^2-12y=c.$

$\therefore\ 3x^2+8xy-3y^2+10x-12y=c.$ **Ans.**

(2) যদি, $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=k$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}=\frac{(ax+by)+c}{k(ax+by)+C}$.

এইরূপ ক্ষেত্রে, $ax+by=V$ ধরিলে প্রদত্ত সমীকরণটিকে সহজেই সমাধান করা যাইবে।

উদাহরণ 2. সমাধান কর :

$$(2x-2y+5)dy-(x-y+3)dx=0.$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-y)+3}{2(x-y)+5} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

ধরি, $x-y=v$; $\therefore \ 1-\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$.

তাহা হইলে, প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$1-\frac{dv}{dx}=\frac{v+3}{2v+5};$$

বা, $\frac{dv}{dx}=1-\frac{v+3}{2v+5}=\frac{v+2}{2v+5}$

$$\therefore \ dx=\frac{2v+5}{v+2}\,dv.$$

$$\therefore \ x+c=\int\frac{2v+5}{v+2}\,dv=\int\frac{2(v+2)+1}{v+2}\,dv$$

$$=\int\left\{2+\frac{1}{v+2}\right\}dv=2v+\log|v+2|$$

$$\therefore \ x+c=2(x-y)+\log|x-y+2|.$$

স্থতরাং নির্ণেয় সমাধান : $\log|x-y+2|=2y-x+c.$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}$.

এই সমীকরণে যদি $A\neq -b$ এবং $\frac{A}{a}\neq\frac{B}{b}$ হয়, তবে

$$x=X+h\,;\ y=Y+k$$

ধরা যাক্ ; যেখানে, h এবং k নির্দিষ্ট ধ্রুবক। তাহা হইলে,

$dx=dX$; $dy=dY$. $\therefore \ \frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$.

তাহা হইলে, প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই :

$$\frac{dY}{dX}=\frac{(aX+bY)+(ah+bk+c)}{(AX+BY)+(Ah+Bk+C)}.$$

মনে করি, h ও k এর মান এমন যে,

$$ah+bk+c=0,$$

এবং $Ah+Bk+C=0.$

এখান হইতে পাই :

$$\frac{h}{bC-cB}=\frac{k}{cA-aC}=\frac{1}{aB-bA}.$$

এইরূপ ক্ষেত্রে, প্রদত্ত সমীকরণ হইবে :

$$\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY}{AX+BY}.$$

এখন, $Y=VX$ ধরিলে, সমীকরণটিকে সহজেই সমাধান করা যাইবে।

উদাহরণ 3. সমাধান কর :

$$(2x-y+1)dx+(2y+x-7)dy=0.$$

সমাধান :

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-2x-1}{2y+x-7} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

ধরি, $x=X+h$; $y=Y+k$;

$$\therefore \quad dx=dX \; ; \; dy=dY. \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}.$$

তাহা হইলে, প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{dY}{dX}=\frac{(Y-2X)-(2h-k+1)}{(2Y+X)+(h+2k-7)} \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

মনে করি, $\left.\begin{aligned} 2h-k+1&=0 \\ \text{এবং } h+2k-7&=0. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

উহাদের সমাধান করিয়া পাই, $h=1$; $k=3.$

তখন (2) হইতে পাই,

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y-2X}{2Y+X}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

এখন ধরি, $Y=VX.$

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX}=V+X\frac{dV}{dX}.$$

তাহা হইলে, (4) হইতে পাই,

$$V+X\frac{dV}{dX}=\frac{V-2}{2V+1};$$

বা, $$X\frac{dV}{dX}=\frac{V-2}{2V+1}-V=\frac{2(-1-V^2)}{(2V+1)}.$$

$$\therefore\quad 2\frac{dX}{X}+\frac{(2V+1)dV}{V^2+1}=0.$$

ইহাকে Integration দ্বারা পাই,

$$2\log X+\log(V^2+1)+\tan^{-1}V=C_1;$$

বা, $$\log(Y^2+X^2)+\tan^{-1}(Y/X)=\log C^2.$$

$$\therefore\quad X^2+Y^2=C^2e^{-\tan^{-1}(Y/X)};\ X=(x-1);\ Y=(y-3).$$

$$\therefore\quad (x-1)^2+(y-3)^2=C^2e^{-\tan^{-1}\{(y-3)/(x-1)\}}.$$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

প্রশ্নমালা 17

সমাধান কর ঃ

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x+y-1}$; 2. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y-1}$;

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{2x+2y+1}$; 4. $\frac{dy}{dx}=\frac{6x-2y-7}{3x-y+4}$;

5. $(x-y-2)\,dx-(2x-2y-3)\,dy=0$; **[C. U. 1972]**

6. $(3y+2x+4)\,dx+(4x+6y+5)\,dy=0$;

7. $(2x+3y-5)\frac{dy}{dx}+2x+3y-1=0$;

8. $(7y-5x)\,dx+(x-3y+4)\,dy=0$;

9. $(5x+4y-4)\,dx+(4x+5y-5)\,dy=0$;

10. $(3y+2x+4)\,dx-(4x+6y+5)\,dy=0$; **[C. U. 1965]**

11. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-1}{y-3x-2}$; 12. $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by-a}{bx+ay-b}$.

4-12. $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ আকারের অবকলিত সমীকরণ সমাধান প্রণালী, যেখানে P এবং Q উভয়েই x এর অপেক্ষক।

এখন, $\frac{dy}{dx}+Py=0$ হইতে পাই,

$$\frac{dy}{y}=-P\,dx.$$

$$\therefore\ \log(y/c)=-\int P\,dx.$$

$$\therefore\ y/c=e^{-\int P\,dx} \quad \text{বা,} \quad ye^{\int P\,dx}=c$$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে,

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P\,dx}\right)=0$$

অর্থাৎ, $\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)e^{\int Pdx}=0.$

তাহা হইলে, $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ এর উভয় পক্ষকে $e^{\int P\,dx}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)e^{\int P\,dx}=Qe^{\int P\,dx};$$

বা, $\frac{d}{dx}(ye^{\int P\,dx})=Qe^{\int P\,dx}.$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে Integration করিয়া পাই,

$$ye^{\int P\,dx}=\int\{Qe^{\int P\,dx}\}\,dx+c.$$

ইহাই প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

দ্রষ্টব্য: $e^{\int P\,dx}$ কে **Integrating Factor** বলে।

4-13. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ।

উদাহরণ 1. সমাধান কর: $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^5.$

সমাধান:

প্রদত্ত সমীকরণটি $\frac{dy}{dx}+Py=Q.$ আকারের,

যেখানে, $P=\frac{1}{x}$; $Q=x^5$.

এখন, $\int P\,dx=\int \frac{1}{x}\,dx=\log_e x$; $x>0$.

$$\therefore\quad e^{\int P\,dx}=e^{\log_e x}=x.$$

স্তরাং, নির্ণেয় সমাধান :

$$ye^{\int P\,dx}=\int Qe^{\int P\,dx}dx+c\ ;$$

বা, $yx=\int x^5.x\,dx+c=\frac{x^7}{7}+c.$ ... (1)

দ্রষ্টব্য : $x<0$ হইলে, $e^{\int P\,dx}=e^{\log_e(-x)}=-x$, এবং সমাধানটি :

$$-yx=\int x^5(-x)\,dx+c'\ ;$$

বা, $yx=\frac{x^7}{7}-c'$, যাহা (1) এর সঙ্গে একই আকারের।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : $\mathbf{e}^{n\log_e x}=\mathbf{x}^n$.

উদাহরণ 2. সমাধান কর :

$$\frac{dy}{dx}+y\cot x=2\cos x.$$

সমাধান :

প্রদত্ত সমীকরণটি : $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ আকারের,

যেখানে, $P=\cot x$; $Q=2\cos x$.

এখন, $\int P\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\log|\sin x|$.

$$\therefore\quad e^{\int P\,dx}=e^{\log|\sin x|}=|\sin x|$$

স্তরাং, নির্ণেয় সমাধান :

$$ye^{\int P\,dx}=\int Qe^{\int P\,dx}dx+C\ ;$$

বা, $y.|\sin x|=\int 2\cos x.|\sin x|\,dx+C.$

$\therefore\ y\sin x=\int \sin 2x\,dx+C$, যখন $\sin x>0$.

$\therefore\ y\sin x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$, যখন $\sin x>0$ ... (1)

ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

দ্রষ্টব্য : $\sin x<0$ হইলে, $-y \sin x=-\int \sin 2x+C'$.

$$\therefore \quad y \sin x=-\tfrac{1}{2} \cos 2x-C' ; \qquad \cdots \qquad (2)$$

যাহা (1)-এর সঙ্গে একই আকারের।

উদাহরণ 3. সমাধান কর :

$$x \frac{dy}{dx}-2y=x^4 e^x.$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই :

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x} y=x^3 e^x,$$

যাহা $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ আকারের,

যেখানে, $P=-2/x$; $Q=x^3 e^x$.

এখন, $\int P\, dx=-2\int \frac{1}{x}\, dx=-2 \log x$.

$$\therefore \quad e^{\int P\, dx}=e^{-2 \log x}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}.$$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান :

$$y\left(\frac{1}{x^2}\right)=\int\left\{(x^3 e^x) \frac{1}{x^2}\right\} dx+C=\int x e^x dx+C$$

$$=x e^x-\int e^x dx+C=x e^x-e^x+C ;$$

অর্থাৎ, $y=(x^3-x^2)e^x+Cx^2$.

উদাহরণ 4. সমাধান কর : $x \frac{dy}{dx}+2y=3x^5 y^2$.

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\, 2y=3x^4 y^2 ;$$

বা, $$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}\left(\frac{1}{y}\right)=3x^4. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

ধরি, $\left(\frac{1}{y}\right)=z$. $\therefore \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{dz}{dx}$.

তাহা হইলে, (1) হইতে পাই,

$$-\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}\cdot z=3x^4$$

বা, $$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=-3x^4 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

যাহা $\frac{dz}{dx}+P\cdot z=Q$ আকারের,

যেখানে, $P=-2/x$; $Q=-3x^4$.

এখন, $\int P\,dx=-2\int\frac{1}{x}\,dx=-2\log x$.

$\therefore\ e^{\int P\,dx}=e^{-2\log x}=x^{-2}=1/x^2$.

তাহা হইলে, (2) হইতে পাই :

$$z\cdot\frac{1}{x^2}=\int(-3x^4)\times\frac{1}{x^2}\,dx+c$$

$$=-3\times\int x^2dx+c$$

$$=-3\times x^3/3+c=-x^3+c.$$

$$\therefore\ z=-x^5+cx^2\ ;$$

বা, $\frac{1}{y}=-x^5+cx^2$;

বা, $y(c-x^3)x^2=1$. ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

উদাহরণ 5. সমাধান কর :

$$\frac{dy}{dx}+x\sin 2y=x\cos^2 y$$ **[C. U. 1968]**

সমাধান :

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\sec^2 y\,\frac{dy}{dx}+2x\tan y=x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

ধরি, $\tan y=z$. $\therefore\ \sec^2 y\,\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$.

তাহা হইলে, (1) হইতে পাই,

$$\frac{dz}{dx}+2xz=x, \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

যাহা $\frac{dz}{dx}+Pz=Q$ আকারের ;

যেখানে $P=2x$; $Q=x$.

এখন, $e^{\int P\,dx}=e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$.

স্নতরাং, (2) এর সমাধান :

$$ze^{x^2}=\int xe^{x^2}dx+c$$

$$=\frac{1}{2}\int e^t dt+c\ ; \quad [x^2=t]$$

$$=\frac{1}{2}e^t+c=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

∴ নির্ণেয় সমাধান :

$$\tan y.e^{x^2}=\tfrac{1}{2}e^{x^2}+c\ ;$$

অর্থাৎ, $2\tan y=1+2c\,e^{-x^2}$

প্রশ্নমালা 18

সমাধান কর :

1. $\frac{dy}{dx}+2xy=x$;

2. $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=x$;

3. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=2$;

4. $\frac{ds}{dt}-\frac{s}{t}=2t^2$;

5. $\cos t\frac{dx}{dt}+x\sin t=1$;

6. $\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=y^2$;

7. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=4x^2$; **[C. U. 1966]**

8. $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y=1$;

9. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=e^{\tan^{-1}x}$;

10. $\frac{dx}{dy}+\frac{x}{1+y^2}=\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$;

11. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{1+x}=(x+1)^3$;
$y=1$ যখন $x=0$; **[C. U. 1971]**

12. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=y^2$;

13. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$;

14. $x\frac{dy}{dx}+y=xy^3$; [C.U.1971] 15. $\frac{dy}{dx}-y=xy^5$; [C.U.1972]

16. $3\frac{dy}{dx}+\frac{2}{1+x}y=\frac{x^2}{y^2}$; 17. $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^2y^6$;

18. $\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{1-x^2}=x\sqrt{y}$; 19. $\frac{dy}{dx}+x\sin 2y=x^3\cos^2 y$;

20. $\frac{dy}{dx}+\frac{\sin 2y}{x}=x^2\cos^2 y$; [C. U. 1973]

21. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$; [C. U. 1970] ,

22. $\frac{dy}{dx}-\frac{\tan y}{1+x}=(1+x)\,e^x\sec y$; [C. U. 1969]

23. $(x^3-x)\frac{dy}{dx}-(3x^2-1)\,y=x^5-2x^3+x$; [C. U. 1975]

24. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\log y=\frac{y}{x^2}(\log y)^2$.

4-14. যে কোন ঘাতবিশিষ্ট প্রথম ক্রমের অবকলিত সমীকরণের কয়েকটি বিশেষ দৃষ্টান্ত :

(A) মনে করি,

$$(p-R_1)(p-R_2)(p-R_3)\cdots\cdots(p-R_n)=0$$

যেখানে, $p=\frac{dy}{dx}$; $R_1, R_2, \cdots\cdots R_n$-এর প্রত্যেকটি x এবং y-এর অপেক্ষক।

যেহেতু ইহা একটি প্রথম ক্রমের অবকলিত সমীকরণ, ইহার সাধারণ সমাধানে কেবলমাত্র একটি অস্থায়ী ধ্রুবক (parameter) থাকিবে।

এখন, $p-R_1=0$; $p-R_2=0$;$\cdots\cdots$, $p-R_n=0$-এর সাধারণ সমাধান যথাক্রমে $\phi_1(x, y, c)=0$; $\phi_2(x, y, c)=0$;$\cdots\cdots$,$\phi_n(x, y, c)=0$ হইলে ; প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান হইবে :

$$\phi_1(x, y, c)\times\phi_2(x, y, c)\times\cdots\cdots\times\phi_n(x, y, c)=0,$$

যেখানে c একটি অস্থায়ী ধ্রুবক।

উদাহরণ 1. সমাধান কর :

$$p^2-5p+6=0\;;\quad p=\frac{dy}{dx}.$$

প্রদত্ত সমীকরণটি : $(p-2)(p-3)=0.$
এখন, $p-2=0$ হইলে, $dy-2dx=0$;
অর্থাৎ, $y-2x-c=0.$
আবার, $p-3=0$ হইলে, $dy-3dx=0,$
অর্থাৎ, $y-3x-c=0.$
সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান :

$$(y-2x-c)(y-3x-c)=0,$$

যেখানে, c অস্থায়ী ধ্রুবক।

উদাহরণ 2. সমাধান কর :

$$p^2-(x+y)p+xy=0\;;\quad p=\frac{dy}{dx}.$$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই : $(p-x)(p-y)=0.$
এখন, $p-x=0$ হইলে, $dy-x\,dx=0$;
অর্থাৎ, $y-x^2/2=c/2$; বা, $2y-x^2-c=0.$
আবার, $p-y=0$ হইলে, $\dfrac{dy}{y}-dx=0$;
অর্থাৎ, $\log|y|-x-c=0.$
সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান :

$$(2y-x^2-c)(\log|y|-x-c)=0.$$

উদাহরণ 3. সমাধান কর :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4x^2y^2.$$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{dy}{dx}=\pm 2xy$$

$$\text{বা,}\quad \frac{dy}{y}=\pm 2x\,dx$$

Integration দ্বারা পাই,

$$\log|cy|=\pm x^2\;;$$

$$\text{বা,}\quad (\log|cy|-x^2)(\log|cy|+x^2)=0.$$

(B). Clairaut's Form :

$$\mathbf{y=px+f(p)}\;;\quad p=\frac{dy}{dx}\quad \cdots\quad \cdots\quad (1)$$

প্রদত্ত সমীকরণকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx}\;;$$

বা, $\{x+f'(p)\}\dfrac{dp}{dx}=0.$

এখন, $\dfrac{dp}{dx}=0$ হইলে, $p=c$, যেখানে c অস্থায়ী ধ্রুবক।

তখন, প্রদত্ত সমীকরণ এবং $p=c$ হইতে, p অপনয়ন করিয়া পাই :

$\mathbf{y=cx+f(c)}\cdots\cdots(2)$; ইহাই প্রদত্ত সমীকরণের **সাধারণ সমাধান।**

আবার, প্রদত্ত সমীকরণ এবং $x+f'(p)=0$ হইতে p অপনয়ন করিলে $\phi(x, y)=0$ এইরূপ একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে, যাহার মধ্যে কোন অস্থায়ী ধ্রুবক থাকিবে না, কিন্তু, ইহা প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে। এইরূপ ক্ষেত্রে, $\phi(x, y)=0$ কে প্রদত্ত সমীকরণের **Singular Solution** বলা হইবে।

মন্তব্য ঃ

$\phi(x, y)=0$ এর লেখটির parametric equations আমরা $\{y=tx+f(t)\;;\ x=-f'(t)\}$, বা, $\{x=-f'(t)\;;\ y=f(t)-tf'(t)\}\cdots(3)$, আকারে লিখিতে পারি।

এখন, (3) হইতে, $$p\equiv\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}=\frac{\{f'(t)-f'(t)-tf''(t)\}}{\{-f''(t)\}}=t\cdots\cdots(4)$$

$\therefore\ \{y-px-f(p)\}=\{f(t)-tf'(t)\}-t\{-f'(t)\}-f(t)\equiv 0.$

$\therefore$ (3) অথবা, $\phi(x, y)=0$, সমীকরণ (1) কে সিদ্ধ করে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর :

$$y=px+a\sqrt{1+p^2}\;;\qquad p=\frac{dy}{dx}.$$

প্রদত্ত সমীকরণটি : $\quad y=px+a\sqrt{1+p^2}\cdots\quad\cdots\quad\cdots(1)$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+a\frac{1}{2\sqrt{1+p^2}}\times 2p\frac{dp}{dx}$$

$$\text{বা,}\quad \left\{x+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\right\}\frac{dp}{dx}=0\cdots \quad \cdots \quad \cdots(2)$$

$$\text{এখন,}\quad \frac{dp}{dx}=0 \text{ হইলে,}\quad p=c\cdots \quad \cdots \quad \cdots(3)$$

(1) এবং (3) হইতে p অপনয়ন করিয়া পাই,

$$\mathbf{y=cx+a\sqrt{1+c^2}}\cdots \quad \cdots \quad \cdots(4)$$

ইহাই প্রদত্ত সমীকরণের **সাধারণ সমাধান**।

$$\text{আবার,}\quad x+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}=0 \quad \text{হইতে পাই,}$$

$$x=-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\cdots \quad \cdots \quad \cdots(4)$$

$$\text{তখন, (1) হইতে,}\quad y=-\frac{ap^2}{\sqrt{1+p^2}}+\frac{a(1+p^2)}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\cdots \quad \cdots \quad \cdots(5)$$

$$\therefore\ \text{(4) এবং (5) হইতে,}\quad x^2+y^2=\frac{a^2p^2}{1+p^2}+\frac{a^2}{1+p^2}=a^2;$$

$$\text{অর্থাৎ,}\quad x^2+y^2=a^2\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(6)$$

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের **Singular solution :** $\mathbf{x^2+y^2=a^2}$ ...(6)

প্রশ্নমালা 19

সমাধান কর ঃ

1. $p^2-7p+12=0$;
2. $(py+x)(p-2x)=0$;
3. $p^2-(a+b)p+ab=0$;
4. $(p+2x)(p+2y)=0$;
5. $p(p+x)=y(y+x)$;
6. $p^2+2xp-3x^2=0$;
7. $\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dy}=3\frac{1}{3}$;
8. $\frac{dy}{dx}+4xy\frac{dx}{dy}+2(x+y)=0$;
9. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4x^3=0$;
10. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=ax^4$;
11. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4-x^2y^2=0$;
12. $\sqrt[3]{\frac{dy}{dx}}=2xy$;
13. $y=px+a/p$;
14. $y=px+p-p^2$;
15. $y=px+\sqrt{a^2p^2+b^2}$;
16. $y=px+\sqrt{a^2p^2-b^2}$.

4-15. $\mathbf{\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0}$ ... ... (1)

আকারের অবকলিত সমীকরণ যেখানে P এবং Q উভয়েই ধ্রুবক।

ধরি, $\frac{d}{dx}\equiv D$. $\therefore$ $\frac{dy}{dx}=Dy$;

এবং $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=DDy=D^2y.$

তাহা হইলে, সমীকরণ (1) দাঁড়ায়,

$$D^2y+PDy+Qy=0\;;$$

অর্থাৎ $(D^2+PD+Q)\,y=0.$ ... ... (2)

প্রদত্ত সমীকরণ দ্বিতীয় ক্রমের বলিয়া, উহার সাধারণ সমাধানে পরস্পর নিরপেক্ষ দুইটি অস্থায়ী ধ্রুবক **(two independent arbitrary constants)** থাকিবে।

মনে করি, $y=u(x)\equiv u$; $y=v(x)\equiv v$ উভয়েই প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান, যেখানে $u(x)$ এবং $v(x)$ **পরস্পর একঘাতে নিরপেক্ষ (linearly independent),** x এর অপেক্ষক ; অর্থাৎ পরস্পর নিরপেক্ষ দুইটি অস্থায়ী ধ্রুবক C_1 এবং C_2 এর জন্য, $C_1=C_2=0$ ভিন্ন, যদি x এর যে কোন মানের জন্য $C_1u(x)+C_2v(x)\neq 0$ হয়।

যেহেতু, $y=u(x)$ এবং $y=v(x)$ প্রদত্ত সমীকরণ (1) এর সমাধান, সুতরাং উহারা সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিবে ;

অর্থাৎ, $\frac{d^2u}{dx^2}+P\frac{du}{dx}+Qu=0$; ... ... (3)

এবং, $\frac{d^2v}{dx^2}+P\frac{dv}{dx}+Qv=0.$ ... ... (4)

ধরি, $y=C_1u+C_2v.$ ... ... (5)

$$\therefore\; \frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dv}{dx}+Qy$$

$$=\frac{d^2}{dx^2}(C_1u+C_2v)+P\frac{d}{dx}(C_1u+C_2v)+Q(C_1u+C_2v)$$

$$=C_1\left\{\frac{d^2u}{dx^2}+P\frac{du}{dx}+Qu\right\}+C_2\left\{\frac{d^2v}{dx^2}+P\frac{dv}{dx}+Qv\right\}$$

$$=C_1\times 0+C_2\times 0,$$ [(3) এবং (4) হইতে]

$$\equiv 0.$$

তাহা হইলে, $y=C_1u+C_2v$

প্রদত্ত সমীকরণ (1)-কে সিদ্ধ করে। সুতরাং, (1) এর সাধারণ সমাধান :

$y=C_1u+C_2v$—ইহাকে (1) এর **পূর্ণ সমাধান (Complete Integral বা Primitive)** বলে।

মন্তব্য : (i) $\sin nx$ এবং $\cos nx$ পরস্পর একঘাতে নিরপেক্ষ x এর অপেক্ষক।

(ii) e^{ax} এবং e^{bx}, $(a\neq b)$, পরস্পর একঘাতে নিরপেক্ষ x এর অপেক্ষক।

(iii) e^{ax} এবং xe^{ax}, পরস্পর একঘাতে নিরপেক্ষ x এর অপেক্ষক।

(iv) $e^{ax}\cos bx$ এবং $e^{bx}\sin bx$, পরস্পর একঘাতে নিরপেক্ষ x এর অপেক্ষক।

4-16. $$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

এর সমাধান প্রণালী, যেখানে P এবং Q উভয়েই ধ্রুবক।

মনে করি, $y=e^{mx}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি সমাধান। তাহা হইলে, ইহা (1)-কে সিদ্ধ করিবে ; অর্থাৎ, $m^2e^{mx}+Pme^{mx}+Qe^{mx}=0$;

অর্থাৎ, $m^2+Pm+Q=0,$ $\qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$

$(\because \quad e^{mx}\neq 0).$

সমীকরণ (2)-কে (1) এর **সহায়ক সমীকরণ (auxiliary equation)** বলে।

(2) হইতে পাই,

$$m=\frac{-P\pm\sqrt{P^2-4Q}}{2} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (3)$$

মনে করি, $$\left.\begin{aligned} m_1&=\tfrac{1}{2}(-P+\sqrt{P^2-4Q}) ; \\ m_2&=\tfrac{1}{2}(-P-\sqrt{P^2-4Q}). \end{aligned}\right\} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (4)$$

(a) যদি $P^2>4Q$ হয়, তাহা হইলে, m_1 এবং m_2 বাস্তব এবং পরস্পর অসমান হইবে। এইরূপক্ষেত্রে, e^{m_1x} এবং e^{m_2x}, পরস্পর একঘাতে নিরপেক্ষ, x-এর অপেক্ষক হইবে ; এবং $y=e^{m_1x}$ ও $y=e^{m_2x}$ প্রদত্ত সমীকরণ (1)-এর সমাধান হইবে। তখন, (1)-এর পূর্ণ সমাধান বা সাধারণ সমাধান হইবে :

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (5),$$

যেখানে, c_1 এবং c_2, পরস্পর নিরপেক্ষ, যে কোন অস্থায়ী ধ্রুবক।

মন্তব্য : এখানে, সমীকরণটির আকার :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-(m_1+m_2)\frac{dy}{dx}+m_1m_2y=0 \qquad \cdots \qquad (A).$$

(b) যদি $\mathbf{P^2=4Q}$ হয়, তাহা হইলে, m_1 এবং m_2 বাস্তব রাশি ও সমান হইবে, এবং $m_1=m_2=-P/2$. তখন $P=-2m_1$; $Q=m_1^2$. তাহা হইলে, (1) দাঁড়ায়

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2m_1\frac{dy}{dx}+m_1^2y=0. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (6).$$

এইরূপক্ষেত্রে, অবশ্যই $y=e^{m_1x}$, (6)-এর অর্থাৎ (1)-এর একটি সমাধান।

এখন, $y=xe^{m_1x}$ ধরিলে,

$$\frac{dy}{dx}=e^{m_1x}+xm_1e^{m_1x}=(1+m_1x)e^{m_1x};$$

এবং $$\frac{d^2y}{dx^2}=m_1e^{m_1x}+(1+xm_1)m_1e^{m_1x}$$
$$=(2m_1+m_1^2x)e^{m_1x}.$$

এবং, তখন, $$\frac{d^2y}{dx^2}-2m_1\frac{dy}{dx}+m_1^2y$$
$$=(2m_1+m_1^2x)e^{m_1x}-2m_1(1+m_1x)e^{m_1x}+m_1^2xe^{m_1x}$$
$$\equiv 0.$$

তাহা হইলে, $y=xe^{m_1x}$, সমীকরণ (1)-এর আর একটি সমাধান। কিন্তু, e^{m_1x} এবং xe^{m_1x}, পরস্পর একঘাতে নিরপেক্ষ, x-এর অপেক্ষক। সুতরাং, এইরূপ ক্ষেত্রে, (1)-এর পূর্ণ সমাধান বা সাধারণ সমাধান :

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_1x};$$

অর্থাৎ, $$\mathbf{y=(c_1+c_2x)e^{m_1x}}, \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (7),$$

যেখানে, c_1 এবং c_2, পরস্পর নিরপেক্ষ, যে কোন অস্থায়ী ধ্রুবক।

(c) যদি $\mathbf{P^2<4Q}$ হয়, তাহা হইলে, m_1 এবং m_2 পরস্পর প্রতিযোগী অবাস্তব রাশি হইবে। মনে করি, $m_1=\alpha+i\beta$; $m_2=\alpha-i\beta$, যেখানে $i=\sqrt{-1}$.

তাহা হইলে, $2\alpha=m_1+m_2=-P$;

$$\alpha^2+\beta^2=m_1m_2=\tfrac{1}{4}\{P^2-(P^2-4Q)\}=Q.$$

তখন, প্রদত্ত সমীকরণ (1) দাঁড়ায় :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\alpha\frac{dy}{dx}+(\alpha^2+\beta^2)y=0. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (8)$$

ধরি, $y=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+(e^{\alpha x})\cdot\beta\cos\beta x.$$
$$=(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x)e^{\alpha x};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(\alpha\beta \cos \beta x-\beta^2 \sin \beta x)e^{\alpha x}$$
$$+(\alpha \sin \beta x+\beta \cos \beta x)\alpha e^{\alpha x}.$$

তাহা হইলে, $\frac{d^2y}{dx^2}-2\alpha\frac{dy}{dx}+(\alpha^2+\beta^2)y$

$$=(\alpha\beta \cos \beta x-\beta^2 \sin \beta x)e^{\alpha x}$$
$$+(\alpha^2 \sin \beta x+\alpha\beta \cos \beta x)e^{\alpha x}$$
$$-2\alpha(\alpha \sin \beta x+\beta \cos \beta x)e^{\alpha x}$$
$$+(\alpha^2+\beta^2)\sin \beta x . e^{\alpha x}$$
$$\equiv 0.$$

সুতরাং, $y=e^{\alpha x}\sin \beta x$, সমীকরণ (8) এর একটি সমাধান। অনুরূপভাবে দেখানো যাইবে যে, $y=e^{\alpha x}\cos \beta x$, সমীকরণ (8) এর আর একটি সমাধান। কিন্তু $e^{\alpha x}\sin \beta x$ এবং $e^{\alpha x}\cos \beta x$ পরস্পর একঘাতে নিরপেক্ষ x এর অপেক্ষক। তাহা হইলে, (8) এর, অর্থাৎ, (1) ($P^2<4Q$) এর পূর্ণ সমাধান বা সাধারণ সমাধান হইবে :

$$\mathbf{y=e^{\alpha x}(c_1 \sin \beta x+c_2 \cos \beta x)}, \quad \cdots \quad (9)$$

যেখানে, c_1 এবং c_2, পরস্পর নিরপেক্ষ, যে কোন অস্থায়ী ধ্রুবক।

4-17. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. সমাধান কর :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-9\frac{dy}{dx}+14y=0.$$

সমাধান : সমীকরণটি :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-9\frac{dy}{dx}+14y=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

মনে করি, $y=e^{mx}$, (1) এর একটি সমাধান।

তাহা হইলে, $\frac{dy}{dx}=me^{mx}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}$.

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$(m^2-9m+14)e^{mx}=0 \text{ ; } e^{mx}\neq 0 \text{ ;}$$

বা, $m^2-9m+14=0$;

বা, $(m-2)(m-7)=0$. $\therefore$ $m=2$; 7.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান :

$y=c_1e^{2x}+c_2e^{7x}$, যেখানে c_1 এবং c_2, পরস্পর নিরপেক্ষ, যে কোন অস্থায়ী ধ্রুবক।

উদাহরণ 2. সমাধান কর :

$$(D^2-6D+9)\,y=0\;;\;\; D\equiv\frac{d}{dx}.$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণটি :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-6\,\frac{dy}{dx}+9y=0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

মনে করি, উহার একটি সমাধান : $y=e^{mx}$. তাহা হইলে, উহা প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে ;

অর্থাৎ, $m^2-6m+9=0$, $(\because\; e^{mx}\neq 0)$.

$\therefore\; m=3\,;\,3.$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান :

$y=(c_1+c_2x)\,e^{3x}$,

যেখানে, c_1 এবং c_2, পরস্পর নিরপেক্ষ, যে কোন অস্থায়ী ধ্রুবক।

উদাহরণ 3. সমাধান কর :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\,\frac{dy}{dx}+y=0.$$

সমাধান :

মনে করি, $y=e^{mx}$, প্রদত্ত সমীকরণের একটি সমাধান।

তাহা হইলে, $m^2-4m+1=0$, $(\because\; e^{mx}\neq 0)$.

$\therefore\; m=2\pm\sqrt{3}.$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান :

$y=c_1e^{(2+\sqrt{3})x}+c_2e^{(2-\sqrt{3})x}$,

যেখানে, c_1 এবং c_2, পরস্পর নিরপেক্ষ, যে কোন অস্থায়ী ধ্রুবক।

উদাহরণ 4. সমাধান কর :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\,\frac{dy}{dx}+13y=0.$$

সমাধান :

মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের একটি সমাধান : $y=e^{mx}$. তাহা হইলে, ইহা সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে ;

অর্থাৎ, $m^2-4m+13=0$, $(\because\; e^{mx}\neq 0)$.

$$\therefore \quad m=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=2\pm i.3\ ;\ i=\sqrt{-1}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান :

$$y=e^{2x}.(c_1 \sin 3x+c_2 \cos 3x),$$

যেখানে c_1 এবং c_2, পরস্পর নিরপেক্ষ, যে কোন অস্থায়ী ধ্রুবক।

উদাহরণ 5. সমাধান কর :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+25x=0,$$

দেওয়া আছে, $x=0,\ \frac{dx}{dt}=4$, যখন $t=0$.

সমাধান :

সমীকরণটি : $\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+25x=0.$ ... ... (1)

মনে করি, $x=e^{mt}$ (1) এর একটি সমাধান। তাহা হইলে, ইহা সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে; অর্থাৎ $m^2+6m+25=0$, ($\because\ e^{mt}\neq 0$)

$$\therefore \quad m=\frac{-6\pm\sqrt{36-100}}{2}=-3\pm 4i,\ i=\sqrt{-1}.$$

সুতরাং, (1) এর সাধারণ সমাধান :

$$x=e^{-3t}\cdot(c_1 \sin 4t+c_2 \cos 4t), \quad \cdots \quad (2)$$

যেখানে c_1 এবং c_2, পরস্পর নিরপেক্ষ, যে কোন অস্থায়ী ধ্রুবক।

আবার, দেওয়া আছে, $x=0$ যখন $t=0$; $\therefore\ 0=c_2$.

তাহা হইলে, (2) হইতে $x=c_1e^{-3t}\cdot\sin 4t\cdots$ ... ...(3)

এখন, (3) হইতে, $\frac{dx}{dt}=4c_1e^{-3t}\cos 4t-3c_1e^{-3t}\sin 4t$ ...(4)

কিন্তু, দেওয়া আছে, $\frac{dx}{dt}=4$ যখন $t=0$.

সুতরাং, (4) হইতে পাই : $4=4c_1$. $\therefore\ c_1=1$.

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান : $x=e^{-3t}\sin 4t$ ... ...(5)

প্রশ্নমালা 20

সমাধান কর :

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-4y=0$;

2. $\frac{d^2y}{dx^2}-3y=0$;

3. $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0$;

4. $\frac{d^2y}{dx^2}+5y=0$;

5. $(D^2-m^2)y=0$;

6. $(4D^2-5)y=0$;

7. $(4D^2+3)y=0$;

8. $(D^2+D)y=0$;

9. $(D-2)^2\,y=0$;

10. $\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+12y=0$;

11. $\frac{dy^2}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-6y=0$;

12. $(D^2-2mD+m^2)y=0$;

13. $\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=0$;

14. $(D^2+2aD+a^2)y=0$;

15. $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+8x=0$;

16. $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+5y=0$;

[C. U. 1968.]

17. $(D^2-4D+5)y=0$;

18. $(D^2-D+1)y=0$;

19. $(D^2+D+1)y=0$;

20. $(D^2-4D+2)y=0$;

21. $\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+(a^2+b^2)y=0$;

22. $\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+\mu x=0$; $k^2<4\mu$; $n^2=\mu-\frac{1}{4}k^2$;

23. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$, যখন $x=0$, $y=4$; যখন $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$;

24. $\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0$, যেখানে $x=4$, $\frac{dx}{dt}=6$, যখন $t=0$;

25. $\frac{d^2s}{dt^2}+5\frac{ds}{dt}+4s=0$, যেখানে, $s=3$, $\frac{ds}{dt}-0$, যখন $t=0$;

26. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+5y=0$, যেখানে, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=4$, যখন $x=0$.

[C. U. 1975.]

সমাকলন

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1 (পৃষ্ঠা—8)

1. $\frac{x^5}{5}+\frac{3x^2}{2}+x$; 2. $\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{3x^2}{2}+x$;

3. $\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+18x$; 4. $3\log x+\frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{x}$;

5. $\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+\frac{1}{x^2}$; 6. $\frac{x^4}{4}+x^2+\log x$;

7. $6\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}$; 8. $\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}+4\sqrt{x}$;

9. $\frac{10x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7}$; 10. $2x^2+24x^{\frac{5}{2}}/5+3x^3$;

11. $\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+2e^x$; 12. $5x+2\cos x$; 13. $2\sqrt{x}-\sin x+2x$;

14. $\log|x|+\cot x$; 15. $\frac{x^2}{2}+2e^x+\tan x$;

16. $\frac{x^3}{3}-3\cos x-2x$; 17. $\tan\theta-\theta$; 18. $-\cot\theta-\theta$;

19. $\tan\theta-\theta$; 20. $x-\cos x$; 21. $\tan x-\sec x$;

22. $\sin\theta-\operatorname{cosec}\theta$; 23. $-\cot x+\operatorname{cosec} x$;

24. $-\cot x-\operatorname{cosec} x$; 25. $\sin x-\cos x$;

26. $\sqrt{2}\sin x$; 27. $\sin x+\cos x$; 28. $-\sqrt{2}\cos x$;

29. θ; 30. $-\cot x-\tan x$; 31. $\theta-\tanh\theta$;

32. $\theta-\coth\theta$; 33. $\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+2x^{\frac{3}{2}}+6\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}$

34. $a^2x+\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}+\frac{x^3}{3}$ 35. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+3x$;

36. $\frac{x^2}{2}-5x$; 37. x^2+x; 38. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$;

39. $\tan\theta-\theta$; 40. $\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2\sqrt{2}}$

41. $\sec x - \operatorname{cosec} x$; 42. $\sec x - \operatorname{cosec} x$;

43. $x + 2\sin x$; 44. $\frac{x}{\sqrt{2}}$

45. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x + 1$; 46. $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$.

প্রশ্নমালা 2 (পৃষ্ঠা—11)

1. $-e^{-3x}/3 + 5^x/\log 5$; 2. $e^{4x}/4 + e^{2x} + x$;

3. $\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$; 4. $\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$;

5. $\frac{1}{4}(3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x)$; 6. $\frac{1}{8}(3x - 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x)$;

7. $\frac{1}{8}(3x + 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x)$; 8. $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$;

9. $2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$; 10. $-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$; 11. $x + \frac{1}{2}\cos 2x$;

12. $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}\sin 4x)$; 13. $-\frac{1}{4}\cos 2x$;

14. $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2\alpha}\sin 2\alpha x\right)$; 15. $\frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x)$;

16. $\frac{1}{8}(2\cos 2x - \cos 4x)$; 17. $\frac{4.2^{6x}}{3\log 2} - \frac{2.2^{-2x}}{\log 2}$;

18. $\frac{a^{2x}}{2\log a} - \frac{a^{-2x}}{2\log a}$; 19. $\frac{a^x}{\log a} + \frac{x^{a+1}}{a+1}$; 20. $\frac{1}{2}e^{2x}$;

21. $\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin x$; 22. $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x$;

23. $\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{6}\sin 3x$; 24. $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x$;

25. $\frac{1}{4}(\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 4x)$;

26. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin 6x$;

27. $\frac{3}{4}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{12}(\sin 3x + \cos 3x)$;

28. $\frac{3}{4}x + \frac{1}{16}\sin 4x$; 29. $\frac{9}{2}x + 2\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x$;

30. $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x$; 31. $-\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x$;

32. $2x\cos\alpha - 2\sin x$; 33. $-\cot x + \tan x - 3x$;

34. $\sin 2x$; 35. $\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{x}{2\sqrt{2}}$;

36. $\frac{1}{4}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin 6x$.

প্রশ্নমালা 3 (পৃষ্ঠা—21)

1. $-\frac{1}{8(2x-1)^4}$; 2. $\frac{1}{15}(x^3+a^3)^5$;

3. $\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}$; 4. $\frac{2}{3}(x^2-2)\sqrt{x^2+1}$;

5. $\frac{1}{3}\log(x^3+2)+\frac{2}{3(x^3+2)}$; 6. $\frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4)$;

7. $\frac{2}{15}(3x^2-8x+32)\sqrt{x+2}$; 8. $\frac{2}{15}(6x-31)(x+4)^{3/2}$;

9. $\frac{1}{3}(x+4)\sqrt{2x+5}$; 10. $\frac{-1}{(2+\sqrt{x})^2}$;

11. $\frac{1}{2}\log(3+2\sin x)$; 12. $-2\sqrt{1-\tan x}$;

13. $2\sqrt{1+\sin x}$; 14. $\frac{3}{2}(x+\sin x)^{\frac{2}{3}}$; 15. $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$;

16. $-\frac{1}{2}(\cot^{-1}x)^2$; 17. $\sin(\log x)$; 18. $\frac{-1}{\log x}$;

19. $e^{\tan^{-1}x}$; 20. $2\sqrt{1+\tan^{-1}x}$;

21. $-\log(\log \operatorname{cosec} x)$; 22. $\log\log\tan x$;

23. $\frac{1}{2}\{\log(\sec x+\tan x)\}^2$; 24. $\frac{1}{a-b}\log(a\sin^2x+b\cos^2x)$;

25. $x-2\log(2x+3)$; 26. $\frac{bx}{d}+\frac{(ad-bc)}{d^2}\log(c+dx)$;

27. $\frac{2x}{3}-\frac{29}{9}\log(3x+7)$; 28. $\sqrt{3x^2-4x+5}$;

29. $\frac{1}{12}\{(2x+1)^{\frac{3}{2}}-(2x-3)^{\frac{3}{2}}\}$; 30. $e^x\sin x$;

31. $e^x\log(\sin x)$; 32. $e^x\sec x$; 33. $e^x\log(\sec x)$;

34. $e^x.x^{-2}$; 35. $\frac{e^x}{1+x}$; 36. $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)e^x$;

37. $\frac{1}{3}\log|\tan\frac{1}{2}x^3|$; 38. $2\log|\sec\sqrt{x}|$;

39. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$; 40. $\log|\tan\frac{1}{2}(xe^x)|$.

41. $-a\cos^{-1}(x/a)-\sqrt{a^2-x^2}$; 42. $\frac{-1}{b(a+b\sin x)}$;

43. $\cos x+\sec x$; 44. $\dfrac{2\sqrt{\cos\theta}}{45}\cdot(18\cos^2\theta-45-5\cos^4\theta)$;

45. $\frac{1}{3}\tan^3\theta-\tan\theta+\theta$; 46. $\frac{1}{7}\sin^7\theta-\frac{1}{9}\sin^9\theta$;

47. $-\cos\theta+\frac{2}{3}\cos^3\theta-\frac{1}{5}\cos^5\theta$; 48. $\log\tan x$;

49. $-(\operatorname{cosec} x+\sin x)$; 50. $-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2(2x)-\frac{1}{2}\log\sin 2x$;

51. $\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{1}{4}\tan^4 x$; 52. $-\frac{1}{5}\operatorname{cosec}^5 x$;

53. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)$; 54. $\frac{1}{2}(\tan x-x)^2$;

55. $\frac{1}{6}\tan^6 x+\frac{1}{8}\tan^8 x$; 56. $2\sqrt{\tan x}$;

57. $a\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{x(a-x)}$; 58. $\dfrac{(x^2-2a^2)}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

59. $-\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$; 60. $\frac{1}{2}\sec^{-1}(x^2)$.

প্রশ্নমালা 4 (পৃষ্ঠা—32)

1. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)$; 2. $\frac{1}{6}\log\left|\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\right|$;

3. $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\log\left|\dfrac{\log x-\sqrt{5}}{\log x+\sqrt{5}}\right|$; 4. $\tan^{-1}(e^x)$;

5. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x+2}{2}\right)$; 6. $\log\left|\dfrac{3x+2}{x+1}\right|$;

7. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\dfrac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)$; 8. $\dfrac{1}{2\sqrt{11}}\log\left|\dfrac{\sqrt{11}+3+x}{\sqrt{11}-3-x}\right|$;

9. $\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\log\left|\dfrac{e^x+2-\sqrt{7}}{e^x+2+\sqrt{7}}\right|$; 10. $\dfrac{1}{8}\log\left|\dfrac{2-\sin x}{2-5\sin x}\right|$;

11. $3\log|x+3|-2\log|x+2|$;

12. $\frac{7}{10}\log|2x+3|+\frac{4}{5}\log|x-1|$;

13. $\dfrac{1}{(a^2-b^2)}\left\{\dfrac{1}{b}\tan^{-1}(x/b)-\dfrac{1}{a}\tan^{-1}(x/a)\right\}$;

14. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\tan^{-1}\{(\sqrt{\tfrac{2}{3}})\tan x\}$; 15. $\frac{1}{4}\log(x^4+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)$;

16. $\frac{1}{6}\log(x^6+1)+\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)$;

17. $x+\frac{1}{2}\log(x^2+x+2)-\frac{5}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)$;

18. $x-\log(x^2+x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$;

19. $\log\{(x+\frac{3}{2})+\sqrt{x^2+3x+9}\}$;

20. $\log\{(x+\frac{3}{2})+\sqrt{x^2+3x+3}\}$;

21. $\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{3}\right)$; 22. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\{(6x-1)+2\sqrt{3(3x^2-x+1)}\}$;

23. $\sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)$; 24. $2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x+2}{5}}$;

25. $\log|(x+a)+\sqrt{x^2+2ax}|$; 26. $2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{2a}}$;

27. $\frac{1}{2}\log(x^2+\sqrt{x^4+a^4})$; 28. $\frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4/a^4)$;

29. $\sqrt{x^2+a^2}+b\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$;

30. $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\log(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})$;

31. $2\sqrt{x^2-2x+2}+7\log\{(x-1)+\sqrt{x^2-2x+2}\}$;

32. $-2\sqrt{3+2x-x^2}+3\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)$;

33. $-\sqrt{1-x^2}$; 34. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right|$

35. $\log\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|$; 36. $\frac{1}{3}\log\left|\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1}\right|$;

37. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left\{\frac{1-x}{1+x}+\sqrt{\frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2}}\right\}$; 38. $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

39. $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x+3}{x}}$; 40. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x}\right)$; 41. $\frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)$;

42. $\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$;

43. $\frac{1}{2}\sqrt{(2x+3)(3x+2)}-\frac{5}{2\sqrt{6}}\log\left|\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+4/3}\right|$;

44. $\sqrt{x(a+x)}+a\sinh^{-1}\sqrt{x/a}$; 45. $\frac{1}{8}\log\left|\frac{4x+\sqrt{4x^2-3}}{4x-\sqrt{4x^2-3}}\right|$;

46. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{(4x^2+3)}}$; 47. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

48. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$; 49. $2\log(\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta})$;

50. (i) $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$; 50. (ii) $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$;

50. (iii) $\frac{1}{(ac-b^2)}\cdot\frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$.

প্রশ্নমালা 5 (পৃষ্ঠা—41)

1. $x\tan x-\log\sec x$; 2. $-x\cot x+\log\sin x$;

3. $x\sec x-\log(\sec x+\tan x)$;

4. $\frac{1}{2}x\sin^2 x-\frac{1}{4}(x-\sin x\cos x)$; 5. (i) $x\log x-x$;

5. (ii) $\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3$; 6. $\frac{1}{2}x^2\cot^{-1}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cot^{-1}x$;

7. $\frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x-\frac{1}{4}\sin^{-1}x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$;

8. $x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$; 9. $x\sec^{-1}x-\log|x+\sqrt{x^2-1}|$;

10. $x\operatorname{cosec}^{-1}x+\log|x+\sqrt{x^2-1}|$;

11. $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$;

12. $-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x$;

13. $e^x(x^2-2x+2)$; 14. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x$;

15. $\frac{1}{4}x^2\{2(\log x)^2-2\log x+1\}$;

16. $-\frac{\log(1+x)}{(1+x)}-\frac{1}{1+x}$; 17. $x-\cos x\cdot\log(\sec x+\tan x)$;

18. $x\log(x+\sqrt{x^2+a^2})-\sqrt{x^2+a^2}$ 19. $\frac{x}{\log x}$;

20. $\frac{1}{3}(1+x^3)\log(1+x^3)-\frac{1}{3}x^3$;

21. $x\tan\frac{x}{2}-2\log\sec\frac{x}{2}$; 22. $x\tan\frac{x}{2}$;

23. $x(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\cdot(\sin^{-1}x)-2x$;

24. $-\frac{\cos^{-1}x}{x}+\log\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$; 25. $2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)$;

26. $-\sqrt{1-x^2}\times\sin^{-1}x+x$;

27. $3x\sin^{-1}x+3\sqrt{1-x^2}$; 28. $3x\cos^{-1}x-3\sqrt{1-x^2}$;

29. $2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)$; 30. $3x\tan^{-1}x-\frac{3}{2}\log(1+x^2)$;

31. $(x+a)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{ax}$;

32. $\frac{1}{2}e^{x}(\cos x+\sin x)$; 33. $\frac{1}{13}e^{2x}(2\cos 3x+3\sin 3x)$;

34. $-\frac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)$;

35. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$;

36. $\frac{2^x}{1+(\log 2)^2}\{(\log 2)\sin x-\cos x\}$;

37. $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5}+2\log\{(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\}$;

38. $\frac{49}{8\sqrt{2}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{2x+1}{7}}-\frac{1}{8}(5-4x)\sqrt{3+5x-2x^2}$;

39. $a^2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{2a}}+\frac{1}{2}(x-a)\sqrt{2ax-x^2}$;

40. $\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}+\frac{(2x-\alpha-\beta)}{4}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$

41. $\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{b}{2}\left\{x(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+a^2\sinh^{-1}\frac{x}{a}\right\}$;

42. $\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\cosh^{-1}x$;

43. $\frac{1}{3}(x^2-x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})\sqrt{x^2-x+1}-\frac{3}{16}\sinh^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$;

44. $-\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}-2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{2}{3}(3-2x-x^2)^{3/2}$

45. $\frac{(2x-\alpha-\beta)}{4}\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}-\frac{(\alpha-\beta)^2}{8}\cosh^{-1}\left|\frac{2x-\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right|$;

46. (i) $\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}$; (ii) $\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$;

প্রশ্নমালা 6 (পৃষ্ঠা—46)

1. $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x$; 2. $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$;

3. $-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x$; 4. $\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x$;

5. $\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\log(\sec x+\tan x)$;

6. $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x\cot x+\frac{1}{2}\log(\operatorname{cosec} x-\cot x)$;

7. $\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x$; 8. $-\cot x-\frac{2}{3}\cot^3 x-\frac{1}{5}\cot^5 x$;

9. $\frac{1}{2}(\tan^2 x-\cot^2 x)+2\log\tan x$; 10. $\frac{1}{3}\tan^3 x$;

11. $\frac{1}{3}(\tan^3 x-\cot^3 x)+3(\tan x-\cot x)$;

12. $\tan x-2\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x$;

13. $-2\sqrt{\cot x}+\frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x}$; 14. $2\sqrt{\tan x}-\frac{2}{3}\sqrt{\cot^3 x}$;

15. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}\right)$; 16. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x)$;

17. $x+\log(2\sin x+3\cos x)$; 18. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log(\sin x+\cos x)$;

19. $2\log|x+3|-\log|x+2|$;

20. $\dfrac{1}{(a-b)}\{a\log|x+a|-b\log|x+b|\}$;

21. $x-\frac{3}{2}\log|x+2|-\frac{5}{2}\log|x+4|$;

22. $\log|x+2|-\log|x+1|-\dfrac{1}{x+1}$;

23. $x-\frac{1}{2}\log|x+1|-\frac{1}{4}\log|x^2+1|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x$;

24. $\frac{1}{2}x^2-2ax+2a^2\log|x+a|+\dfrac{a^3}{2(x+a)}+\dfrac{a^2}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$;

25. $\frac{10}{27}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{\sin x}{5+4\cos x}$;

26. $\frac{1}{4}\tan^2\dfrac{x}{2}+\tan\dfrac{x}{2}+\frac{1}{2}\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$;

প্রশ্নমালা 7 (পৃষ্ঠা—51)

1. 15; 2. $3(b-a)$; 3. 4; 4. $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$;
5. 9; 6. 0; 7. 0; 8. $\frac{1}{2}a+b$;
9. $3/2$; 10. 9; 11. 18; 12. 2;
13. 90; 14. 4; 15. $e-1$; 16. $1-e^{-1}$;
17. 1; 18. $\cosh 1-1$.

প্রশ্নমালা 8 (পৃষ্ঠা—59)

1. $\frac{\pi}{4a}$; 2. $\frac{\pi}{4}$; 3. $\frac{1}{3}\log 2$; 4. $\sqrt{2}-1$;
5. $\frac{1}{n+1}$; 6. $\frac{10}{81}$; 7. 1; 8. 1;
9. $\frac{\pi}{4}$; 10. $1-\frac{\pi}{4}$; 11. $4/3$; 12. $1/7$;
13. $\frac{1}{4}$; 14. $\frac{16}{35}$; 15. 1; 16. 2;
17. $\frac{8}{693}$; 18. $\frac{1}{120}$; 19. $\frac{2}{143}$; 20. 0;
21. $\frac{1}{4}(a+b)\pi$; 22. $\frac{32}{65}$; 23. $-\frac{1}{3}$;
24. $\frac{80}{9\sqrt{3}}$; 25. $\log 2$; 26. 4; 27. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$;
28. 1; 29. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; 30. $\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\log 2$;
31. $\frac{9}{2}\log 3-8\log 2+\frac{5}{4}$; 32. $\frac{\pi}{8}$; 33. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$;
34. $\log 3$; 35. $\frac{\pi}{2}$; 36. $\frac{\pi a^2}{2}$; 37. 2π;
38. $2\tan^{-1}(\frac{1}{3})$; 39. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$; 40. $\frac{\pi}{8}(\beta-\alpha)^2$;
41. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\log\left(\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}\right)$; 42. $e-\frac{1}{e}$; 43. $\log_e(\frac{4}{3})$;
44. $\frac{\pi^2}{4}$; 45. $\frac{\pi}{2ab}$; 46. $\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$.

প্রশ্নমালা 9 (পৃষ্ঠা—64)

1. $\frac{1}{p+1}$; 2. $\log_e 2$; 3. $\frac{1}{m}\log_e(1+m)$;

4. $\frac{1}{3}\log_e 2$; 5. $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$; 6. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log_e 2$;

7. $\frac{\pi}{4}$; 8. $\frac{1}{2}\log_e 2$; 9. $\frac{\pi}{4}$; 10. $\frac{2}{\pi}$;

11. $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 12. $\frac{2}{\pi}\log_e 2$; 13. e; 14. 2;

15. $4/e$; 16. $2e^{\frac{(\pi-4)}{2}}$.

প্রশ্নমালা 10 (পৃষ্ঠা—73)

1. $\frac{\pi}{4a}$; 2. $\sqrt{2}-1$; 3. $\frac{\pi}{4}a^2$; 4. $\frac{1}{3}a^3$;

5. $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 6. $\frac{\pi}{4}$; 7. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$;

8. $\tan^{-1}(2\sqrt{2}-\sqrt{5})$; 9. $\tan^{-1}e-\frac{\pi}{4}$; 10. $\frac{\pi}{3}$;

11. $\frac{16}{35}$; 12. $\frac{16}{35}$; 13. 0; 14. 0;

15. $\frac{\pi}{4}$; 16. $\frac{\pi}{4}$; 17. $\frac{\pi}{4}$; 18. $\frac{\pi}{4}$;

19. $\frac{\pi}{2}$; 20. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log_e(1+\sqrt{2})$; 21. 0; 22. 0;

23. π; 24. $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$ 25. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log_e(1+\sqrt{2})$;

26. $\frac{\pi^2}{4}$; 27. $-\frac{\pi}{2}\log 2$; 28. $\frac{\pi}{8}\log 2$; 29. 0;

30. $\frac{\pi}{8}\log 2$; 31. $\frac{\pi}{4ab^2(a+b)}$.

প্রশ্নমালা 11 (পৃষ্ঠা—85)

1. 37·5 বর্গ একক ; 2. 6 বর্গ একক ; 3. 9 বর্গ একক ;
4. 21 বর্গ একক ; 5. 156 ব. একক ; 6. 324 ব. একক ;
7. $\frac{32a^2}{3}$ ব. একক ; 8. 1 বর্গ একক ; 9. 2 ব. একক ;
10. 36 বর্গ একক ; 11. $\frac{8a^2}{3}$ ব. একক ;
12. πa^2 ব. একক ; 13. $\frac{1}{3}$ ব. একক ;
14. $\frac{8}{3}$ ব. একক : 15. (i) বৃহত্তর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{4}(3\pi+2)a^2$ বর্গ একক ;
(ii) ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{4}(\pi-2)a^2$ বর্গ একক ;
16. $\frac{1}{2}(\pi-2)$ ব. একক ; 17. 1 বর্গ একক ;
18. $\frac{1}{3}$ ব. একক ; 19. 12 ব. একক ;
20. (i) ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{6}(3\pi-8)a^2$ ব. একক ;
(ii) বৃহত্তর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{6}(3\pi+8)a^2$ ব. একক ;
21. $\frac{16a^2}{3}$ ব. একক ; 22. $\frac{16a^2}{3}$ ব. একক ;
23. $\frac{3}{4}$ বর্গ একক ; 20. (i) ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{4}(\pi-2)\,ab$ বর্গ একক ;
(ii) বৃহত্তর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{4}(3\pi+2)ab$ ব. একক।

প্রশ্নমালা 12 (পৃষ্ঠা—90)

1. $\{\pi a^2-\frac{1}{2}a^2(\alpha-\sin\alpha)\}$ বর্গ একক ;
2. πa^2 বর্গ একক ; 3. $\frac{3\pi a^2}{2}$ বর্গ একক ;
4. $\frac{a^2}{2}$ বর্গ একক ; . $\frac{a^2}{2}$ বর্গ একক ;
6. $\frac{a^2}{2}$ বর্গ একক ; 7. $\pi(a^2+\frac{1}{2}b^2)$ ব. একক ;
8. $\frac{\pi a^2}{12}$ বর্গ একক ; 9. $\frac{1}{6}(4\pi-3\sqrt{3})a^2$ বর্গ একক।

প্রশ্নমালা 13 (পৃষ্ঠা—95)

1. (i) $\frac{dy}{dx}+y\tan x=0$; (ii) $\frac{dy}{dx}-my\cot mx=0$;

(iii) $\frac{dy}{dx}=m$; (iv) $\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=0$;

(v) $(x^2-y^2)+2xy\frac{dy}{dx}=0$; (vi) $(x\log x)\frac{dy}{dx}=y-5$.

2. (i) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$; (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$;

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}+m^2y=0$; (iv) $\frac{d^2y}{dx^2}-m^2y=0$;

(v) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\alpha\frac{dy}{dx}+\alpha^2y=0$; (vi) $\frac{d^2y}{dx^2}-2=0$;

(vii) $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=9e^{3x}$ (viii) $y\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

3. (i) $y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$; (ii) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dy}+3y=0$;

(iii) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$; (iv) $\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$;

(v) $\frac{d^2y}{dx^2}=k^2y$; (vi) $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=xy$;

(vii) $xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y\frac{dy}{dx}$; (viii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2\lambda\frac{d^2y}{dx^2}=0$;

10. $\frac{d^2s}{dt^2}+2\lambda\frac{ds}{dt}+(\lambda^2+\mu^2)s=0$; 12. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2\lambda\frac{d^2y}{dx^2}=0, \lambda=\pm a$.

প্রশ্নমালা 14 (পৃষ্ঠা—100)

1. $x^3+y^2=c$; 2. $x^3-y^3=c$;

3. $x^2+y^2+2x+2y=c$; 4. $x^3-y^3-3x+3y=c$;

5. $e^{-x}+e^{-y}=c$; 6. $(x-1)e^x+(y-1)e^y=c$;

7. $\tan x-\tan y=c$; 8. $(x^2+1)=c(y^2+1)$;

9. $x^2=c(y^2+1)$; 10. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=c$;

11. $\log x^2=\log y^2+2y+c$; 12. $y+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=c$;

13. $\tan x+\tan y=x+y+c$;

14. $2(x \tan x-y \tan y)+\log \cos^2 x-\log \cos^2 y=c$;

15. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=c$;

16. (i) $2x^3-3x^2+6x=2y^3-3y^2+6y+c$;
(ii) $2(xy+1)-(x+y)=c(x-y)$;

17. $(x-1)^2(y-1)^2=(cxy)^2$; 18. $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=c$;

19. $x^2+1=c(y^2+1)$; 20. $(x^2+1)(y^2+1)=cx^2$;

21. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=c$; 22. $\log\left(\frac{x^2}{y^2}\right)-2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=c$;

23. $(y \tan^{-1} x)^2=c^2$; 24. $\log(x^2y^2)-2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=c$;

25. $(1-e^x)^6=(c \tan y)^2$; 26. $\{(y+1)(e^x+1)\}^2=c^2e^{2y}$;

27. $\{(x+a)(1-ay)\}^2=(cy)^2$; 28. $(y^3+1)^2=\{c(x+1)^3\}^2$;

29. $\sqrt{y^2-1}+\sqrt{x^2-1}-\sec^{-1}x=c$;

30. $\log(y^2+1)=\log x^2+2\tan^{-1}x+c$; 31. $(x+1)(y+1)=2$;

33. $x^2-y^2=3$; 34. $x^2+y^2+2x+2y=0$;

35. $y=e^x+1$; 36. 42 সে. মি. ;

37. দূরত্ব : 51 একক ; বেগ : 38 একক ; ত্বরণ : 20 একক ।

প্রশ্নমালা 15 (পৃষ্ঠা—103)

1. $(x+y+1)^2=c^2e^{2x}$;

2. $2\sqrt{y-x}+\log(\sqrt{y-x}-1)^2=x+c$;

3. $2\sqrt{x+y}-\log(\sqrt{x+y}+1)^2=x+c$; 4. $x+y=\tan(x+c)$;

5. $e^x+e^{-y}=c$; 6. $\tan\frac{1}{2}(x+y)=x+c$;

7. $y=a\tan^{-1}\left\{\frac{(x+y)}{a}\right\}+c$; 8. $\log\left(\frac{a-x+y}{a+x-y}\right)^2=\frac{4y}{a}+c$;

9. $\sin(x+y)\cos(x+y)=x-y+c$;

10. $e^{-x-y}=c-x$; 11. $(y+2x+2)^2=4e^{2x}$.

প্রশ্নমালা 16 (পৃষ্ঠা—108)

1. $5\log|y| = \frac{3x}{y}+c$;
2. $(y+3x)^2(y-x)^6=c^2$;
3. $(y-x)^6=c^2(y+x)^2$;
4. $(y-x)^{10}=c^2(y+x)^2$;
5. $(x^2+y^2)^7=c^2e^{-6\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$;
6. $(y-x)^{22}=c^2(2y+x)^4$;
7. $x^2e^{\frac{2x}{y}}=c^2$;
8. $y^2=c^2e^{\frac{x^2}{y^2}}$;
9. $x^2=c^2e^{\frac{-2x}{y}}$;
10. $y^6\cdot e^{\frac{2x}{y}}=c^2x^4$;
11. $(y^2-x^2)^2=(cx)^2$;
12. $y^2=c^2e^{\frac{2x^3}{3y^3}}$;
13. $x^2=4k(y+k)$;
14. $(y-x)^2=(C\,xy)^2$;
15. $(y-2x)^2=(C\,x^2y)^2$;
16. $(y^3+3x^2y+2x^3)^2=C^2$;
17. $y^2=C^2e^{\frac{2y}{x}}$;
18. $x^2y^4=C^2(x+2y)^2$;
19. $x^2y^4=C^2(2y-x)^2$;
20. $x^2=C^2e^{2\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$;
21. $\{y\sin(y/x)\}^2=C^2$;
22. $\{xy\cos(y/x)\}^2=C^2$;
23. $\left(y+3x\,e^{\frac{y}{x}}\right)^2=c^2$;
24. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+C=0.$

প্রশ্নমালা 17 (পৃষ্ঠা—112)

1. $2(y-x)=\log|c(2x+2y-1)|$;
2. $(y-x)=\log|c(x+y)|$;
3. $6y-3x=\log|c(3x+3y+2)|$;
4. $(2x-y)=\log|c(3x-y+19)^{15}|$;
5. $(x-2y)=\log|c(x-y-1)|$;
6. $x+2y=\log|c/(2x+3y-2)^3|$;
7. $(x+y)=\log|c(2x+3y)^4|$;

8. $(3y-5x+10)^2 = |c(y-x+1)|$;

9. $5(x^2+y^2)+8xy-8x-10y=c$;

10. $7(2y-x)=\log|c(14x+21y+22)^3|$;

11. $|(y-\frac{1}{2})^3(y-5x-3)^2| = |c|$;

12. $|(x+y-1)^{a-b}(y-x+1)^{a+b}| = |c|$.

প্রশ্নমালা 18 (পৃষ্ঠা—117)

1. $y=ce^{-x^2}+\frac{1}{2}$; 2. $y=x^2(c+\log|x|)$;

3. $y=ce^{-\tan^{-1}x}+2$; 4. $s=ct+t^3$;

5. $x=c\cos t+\sin t$; 6. $x=\frac{c}{y}+\frac{y^3}{4}$;

7. $y(1+x^2)=c+\frac{4x^3}{3}$; 8. $y=x^2(ce^{\frac{1}{x}}+1)$;

9. $y=ce^{-\tan^{-1}x}+\frac{1}{2}e^{\tan^{-1}x}$; 10. $x=ce^{-\tan^{-1}y}+\tan^{-1}y-1$;

11. $2y=(x+1)^2+(x+1)^4$; 12. $\frac{1}{xy}=c-\log|x|$;

13. $\frac{1}{xy}=c+\frac{1}{2x^2}$; 14. $\frac{1}{x^2y^2}=c+\frac{2}{x}$;

15. $\frac{1}{y^4}=c\,e^{-4x}-x+\frac{1}{4}$; 16. $(1+x)^2y^3=c+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5$;

17. $\frac{1}{x^5y^5}=c+\frac{5}{2x^2}$; 18. $\sqrt{y}=c(1-x^2)^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{3}(1-x^2)$;

19. $\tan y=c\,e^{-x^2}+\frac{1}{2}(x^2-1)$; 20. $x^2\tan y=c+\frac{1}{5}x^5$;

21. $\frac{1}{y^2}=\{c-\log(1+x^2)\}(1+x^2)-1$; 22. $\sin y=(1+x)(c+e^x)$;

23. $y=(x^3-x)(c+\log|x|)$; 24. $\frac{1}{x\log y}=c+\frac{1}{2x^2}$.

প্রশ্নমালা 19 (পৃষ্ঠা—121)

1. $(y-3x-c)(y-4x-c)=0$; 2. $(y^2+x^2-c)(y-x^2-c)=0$;

3. $(y-ax-c)(y-bx-c)=0$;

4. $(y+x^2-c)(\log|y|+2x-c)=0$;

5. $\{\log|y|-x-c\}.\{\log|y+x-1|+x-c\}=0$;

6. $(2y-x^2-c)(2y+3x^2-c)=0$; 7. $(y-3x-c)(3y-x-c)=0$;

8. $(y+x^2-c)(\log|y|+2x-c)=0$; 9. $25(y-c)^2=16x^5$

10. $y=\frac{3}{7}(\sqrt[3]{a})\,x^{\frac{7}{3}}+c$; 11. $(3\sqrt{y}-c)^2=x^3$;

12. $-\dfrac{1}{2y^2}=2x^4+c$;

13. $y=cx+a/c$; singular solution : $y^2=4ax$;

14. $y=cx+c-c^2$; singular solution : $4y=(x+1)^2$;

15. $y=cx+\sqrt{a^2c^2+b^2}$; singular solution : $x^2/a^2+y^2/b^2=1$;

16. $y=cx+\sqrt{a^2c^2-b^2}$; singular solution : $x^2/a^2-y^2/b^2=1$.

প্রশ্নমালা 20 (পৃষ্ঠা—128)

1. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$; 2. $y=c_1e^{x\sqrt{3}}+c_2e^{-x\sqrt{3}}$;

3. $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$;

4. $y=c_1\cos(x\sqrt{5})+c_2\sin(x\sqrt{5})$; 5. $y=c_1e^{mx}+c_2e^{-mx}$;

6. $y=A\cosh(x\sqrt{5}/2)+B\sinh(x\sqrt{5}/2)$;

7. $y=c_1\cos(x\sqrt{3}/2)+c_2\sin(x\sqrt{3}/2)$;

8. $y=c_1+c_2e^{-x}$; 9. $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$;

10. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{6x}$; 11. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}$;

12. $y=(c_1+c_2x)e^{mx}$; 13. $y=(A+Bx)e^{-3x}$;

14. $y=(A+Bx)e^{-ax}$; 15. $y=e^{-2t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)$;

16. $y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$;

17. $y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$;

18. $y=e^{x/2}.\{c_1\cos(x\sqrt{3}/2)+c_2\sin(x\sqrt{3}/2)\}$;

19. $y=e^{-x/2}\{A\cos(x\sqrt{3}/2)+B\sin(x\sqrt{3}/2)\}$;

20. $y=c_1e^{(2+\sqrt{2})x}+c_2e^{(2-\sqrt{2})x}$;

21. $y=e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)$;

22. $x=e^{-\frac{1}{2}kt}.(c_1\cos nt+c_2\sin nt)$; 23. $y=4\cos x$;

24. $x=4\cos 2t+3\sin 2t$; 25. $s=4e^{-t}-e^{-4t}$;

26. $y=2e^x\sin 2x$.

পরিশিষ্ট

P-1. সমাধান কর: $\frac{d^2y}{dx^2}=-n^2y.$ ... ... (1)

প্রদত্ত সমীকরণের উভয় পক্ষকে $2\frac{dy}{dx}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}=-2n^2y\frac{dy}{dx}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে Integration দ্বারা পাই,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-n^2y^2+C_1$$

$$=n^2(a^2-y^2)\ ;\ \ [C_1=n^2a^2].$$

$$\therefore\ \ \frac{dy}{dx}=\pm n\sqrt{a^2-y^2}\ ;$$

$$\text{বা,}\ \ \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\mp n\,dx. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

ইহাকে Integration দ্বারা পাই,

$$\cos^{-1}\frac{y}{a}=\pm nx+C_2.$$

$$\therefore\ \ \frac{y}{a}=\cos\,(\pm nx+C_2)\ ;$$

$$\text{বা,}\ \ \mathbf{y=a\cos(nx+\epsilon)}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

P-2. সমাধান কর: $\frac{d^2y}{dx^2}=n^2y.$ ... ... (1)

ইহার উভয় পক্ষকে $2\,\frac{dy}{dx}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$2\,\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}=2n^2y\,\frac{dy}{dx}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে Integration দ্বারা পাই,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=n^2y^2+C_1$$

$$=n^2(y^2-a^2)\ ;\ \ [C_1=-a^2n^2].$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \pm n \sqrt{y^2 - a^2};$$

বা, $$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = \pm n\, dx. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

ইহাকে Integration দ্বারা পাই,

$$\cosh^{-1} \frac{y}{a} = \pm nx + C_2.$$

$$\therefore \quad \frac{y}{a} = \cosh(\pm nx + C_2);$$

বা, $$\mathbf{y = a \cosh (nx + \epsilon).} \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

প্রশ্নমালা

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$ হইতে দেখাও যে, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2(a^2 - y^2)$; এবং এখান হইতে প্রমাণ কর যে, $y = a \sin(nx + \epsilon)$.

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = 0$ হইতে দেখাও যে, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2(a^2 + y^2)$; এবং এইখান হইতে প্রমাণ কর: $y = a \sinh(nx + \epsilon)$.

3. সরলরেখায় চলমান কোন একটি বস্তুকণার t সেকেণ্ড সময়ে উহার গতি-সমীকরণ: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$, $(\mu > 0)$. যদি $t = 0$ তে $x = a$ হয় এবং তখন বস্তুকণাটি স্থিতাবস্থায় থাকে, তবে দেখাও যে, $x = a \cos t \sqrt{\mu}$.

4. সরলরেখায় চলমান কোন একটি বস্তুকণার গতি-সমীকরণ: $\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2x$, যেখানে t সেকেণ্ডের সময়ে ঐ সরলরেখার উপর O বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব x ফুট (O বিন্দুতে $x = 0$). যদি $t = 0$ এতে $x = a$ এবং $\frac{dx}{dt} = u$ হয়, তবে দেখাও যে, t সেকেণ্ডে O হইতে উহার দূরত্ব: $x = a \cos nt + \frac{u}{n} \sin nt$.

P-3. কতিপয় প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত :

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi=\frac{\pi}{2}$;

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi\, d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\phi\, d\phi=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\phi\, d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\phi\, d\phi=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$;

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\phi\, d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\phi\, d\phi=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$;

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\phi\, d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m}\phi\, d\phi$; (m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)

$$=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2};$$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\, d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\, d\phi=1$;

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi\, d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\phi\, d\phi=\frac{2}{3}\cdot 1$;

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\phi\, d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\phi\, d\phi=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$;

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\phi\, d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\phi\, d\phi=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$;

(10) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1}\phi \, d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1}\phi \, d\phi$$; (m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)

$$= \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots\cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.$$

P-4. (Mean Value) বা মাধ্যমিক মানের সংজ্ঞা :

মনে করি, t একটি নিরপেক্ষ চলরাশি (independent variable), এবং $K(t)$ একটি t–সাপেক্ষ চলরাশি (dependent variable). তাহা হইলে, t এর সাপেক্ষ, $t_1 < t < t_2$ অন্তরাতে (interval), $K(t)$ এর মাধ্যমিক মান

$$= \frac{\int_{t_1}^{t_2} K(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt}.$$

উদাহরণ : মনে করি, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ প্রদত্ত সময়ের অন্তরা, এবং m–ভর বিশিষ্ট একটি বস্তুকণা একটি প্রদত্ত সরলরেখায় গতিশীল, যেখানে $u = t_1$ সময়ের গতিবেগ, $v = t_2$ সময়ের গতিবেগ, f = সময়ের পূর্ণ অন্তরাব্যাপী সুনির্দিষ্ট (ধ্রুব) ত্বরণ। তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, গতিজ শক্তিবিকাশের (Kinetic Energy) মাধ্যমিক মান

$$= \tfrac{1}{6}m\,(u^2 + uv + v^2).$$ [C. U. 1975]

আমরা জানি, $\frac{dV}{dt}$ = ত্বরণ ; V = t সময়ের গতিবেগ ;

এবং গতিজ শক্তি বিকাশের পরিমাণ $K = \frac{1}{2}mV^2$; m = ধ্রুবরাশি।

এখানে, $\frac{dV}{dt} = f$ (ধ্রুবরাশি). $\therefore \; dt = \frac{dV}{f}$. ... (1)

$$\therefore \text{ গতিজ শক্তিবিকাশের মাধ্যমিক মান} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} K dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt}$$

$$= \frac{\int_u^v \frac{1}{2}mV^2 \cdot \frac{dV}{f}}{\int_u^v \frac{dV}{f}} = \frac{1}{2}m \cdot \frac{\int_u^v V^2 dV}{(v-u)}$$

$$= \frac{1}{6}m \cdot \left(\frac{v^3 - u^3}{v-u}\right) = \frac{1}{6}m(u^2 + uv + v^2).$$

পরিশিষ্ট

A. ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে সিম্প্‌সনের নিয়ম (Simpson's rule) :

Statement :

$y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, এবং $y=0$ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল S একক হইলে, সিম্প্‌সনের নিয়ম অনুযায়ী

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b y\,dx$$

$$\simeq\tfrac{1}{3}h\{(y_1+y_{2n+1})+2(y_3+y_5+\cdots\cdots+y_{2n-1})+4(y_2+y_4+\cdots\cdots+y_{2n})\}$$

যেখানে, $b-a=2nh$, $n=$ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ; এবং $y_1, y_2, y_3\cdots\cdots y_{2n+1}$ যথাক্রমে $x=a, (a+h), (a+2h),\cdots\cdots(a+2nh)$ এতে $f(x)$ অর্থাৎ y এর মান।

[ইহার প্রমাণ উপরের শ্রেণীতে দেওয়া হইবে]।

দৃষ্টান্ত 1. [0, 1] অন্তরাটিকে সমান চার ভাগে বিভক্ত করিয়া সিম্প্‌সনের নিয়ম অনুসারে $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ এর মান আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত বাহির কর, এবং দেখাও যে, $\pi=3{\cdot}1416$.

এখানে, $n=2$; $1-0=2nh=4h$; $\therefore\ h=0{\cdot}25$.

আবার, $y=f(x)\equiv\frac{1}{1+x^2}$.

$\therefore\ y_1=f(0)=1$; $y_2=f(0{\cdot}25)=0{\cdot}94118$; $y_3=f(0{\cdot}5)=0{\cdot}8$; $y_4=f(0{\cdot}75)=0{\cdot}64000$; $y_5=f(1)=0{\cdot}5$.

$$\therefore\ \int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\simeq\frac{h}{3}\{(y_1+y_5)+2y_3+4(y_2+y_4)\}$$

$$=\tfrac{1}{3}\times0{\cdot}25\times\{1{\cdot}5+1{\cdot}6+6{\cdot}32472\}\simeq0{\cdot}78539.$$

কিন্তু, $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\left[\tan^{-1}x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

$\therefore\ \pi/4\simeq0{\cdot}785393$; বা, $\pi\simeq\mathbf{3{\cdot}1416\simeq22/7}$.

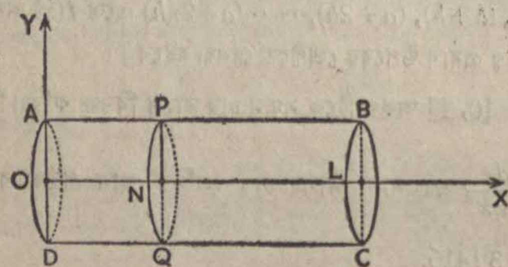
B. The rule to obtain—

(i) **The volume of revolution :** $\mathbf{V}=\int_a^b \pi \mathbf{y}^2 \mathbf{dx}$.

(ii) **The surface of revolution :** $\mathbf{S}=\int_a^b 2\pi \mathbf{y} \mathbf{ds}$.

$$=\int_a^b 2\pi y \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

দৃষ্টান্ত 1. লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন ও বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

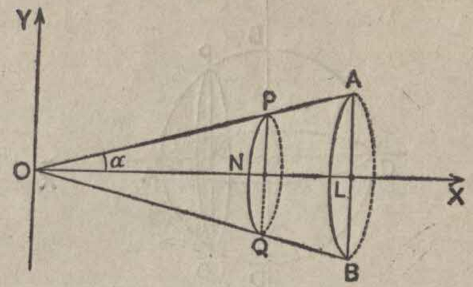


চোঙটির উচ্চতা $=\overline{OL}=h$; উহার ভূমির ব্যাসার্ধ $=\overline{OA}=a$; $\overleftrightarrow{AB}$ এর সমীকরণ : $y=a$; $\overleftrightarrow{DC}$ এর সমীকরণ : $y=-a$. $\overline{AB}$ এর উপর $P(x, a)$ একটি বিন্দু ; $\overline{PQ}$ ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi \times \overline{PN}^2=\pi a^2$.

(i) *ABCD* **বৃত্তাকার চোঙের আয়তন :** $\mathbf{V}=\int_0^h \pi a^2 dx=\pi \mathbf{a}^2\mathbf{h}$;

(ii) **উহার বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল :** $\mathbf{S}=\int_0^h 2\pi a dx=2\pi \mathbf{ah}$.

দৃষ্টান্ত 2. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন ও বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :



$\overline{AB}$= ভূমির ব্যাস $=2\times\overline{AL}=2a$; $\overline{OL}$= উহার উচ্চতা $=h$;

$\angle AOL=\alpha=\angle BOL$. $\overleftrightarrow{OA}$ এর সমীকরণ : $y=x\tan\alpha$;

$\overline{OA}$ এর উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু।

$\overline{PQ}$ ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi y^2=\pi x^2\tan^2\alpha$. যাহার পরিসীমা $=2\pi y$.

(i) AOB শঙ্কুর আয়তন : $V=\int_0^h \pi x^2\tan^2\alpha\, dx=\frac{1}{3}\pi h^3\tan^2\alpha$

$$=\tfrac{1}{3}\pi \mathbf{a}^2\mathbf{h},\ [\because\ \tan\alpha=a/h]$$

$=\frac{1}{3}\times$ **(area of the base)** $\times$ **height.**

(ii) উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল :

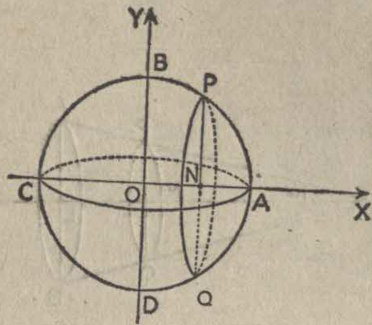
$$S=\int_0^h 2\pi y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx,\quad [y=x\tan\alpha]$$

$$=2\pi\int_0^h x\tan\alpha\sec\alpha\, dx=\pi h^2\tan\alpha\sec\alpha$$

$$=\tfrac{1}{2}\times(2\pi h\tan\alpha)\times(h\sec\alpha)=\tfrac{1}{2}\times(2\pi \mathbf{a})\times \mathbf{l}$$

$=\frac{1}{2}\times$ **(circumference of the base)** $\times$ **slant height.**

দৃষ্টান্ত 3. a একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলকের আয়তন ও বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :



$ABCD$ বৃত্তের সমীকরণ : $x^2+y^2=a^2$ অর্থাৎ $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$.
$P(x, y)$ উহার উপর যে কোন বিন্দু যাহা প্রথম পাদে অবস্থিত।
PQ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi\times\overline{PN}^2=\pi y^2$; যাহার পরিসীমা $=2\pi y$

(i) a একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলকের আয়তন :

$$V=2\times\int_0^a \pi y^2 dx=2\pi\int_0^a (a^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

(ii) উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল :

$$S=2\times\int_0^a 2\pi y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,\ [x^2+y^2=a^2]$$

$$=4\pi\int_0^a\sqrt{y^2+\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=4\pi\int_0^a\sqrt{y^2+x^2}\,dx$$

$$=4\pi a\int_0^a dx=4\pi a^2.$$

বলবিদ্যা

উপক্রমণিকা

0-1. (1) পদার্থ (Matter) :

যাহা আমাদের কোন না কোন ইন্দ্রিয় দ্বারা অনুভব করা সম্ভব এবং কিছু স্থান অধিকার করিয়া আছে তাহাকে **পদার্থ** বলে ; যেমন, ইট, কাঠ, পাথর, মাটি, জল, বাতাস, প্রভৃতি পদার্থের দৃষ্টান্ত। কিন্তু, তাপমাত্রা, শব্দের প্রকার, বর্ণের প্রকৃতি, গন্ধের বৈশিষ্ট্য, ইত্যাদি পদার্থ নহে।

(2) বস্তু (Body) :

সকল দিকে সীমাবদ্ধ নির্দিষ্ট আকার ও আয়তনবিশিষ্ট পদার্থকে বস্তু বলা হয় ; যেমন, একটি টেবিল, একখানি পুস্তক, একখণ্ড প্রস্তর, একটি বল, সূর্য, চন্দ্র, পৃথিবী, প্রভৃতি প্রত্যেকেই এক একটি বস্তু।

(3) ভর (Mass) :

কোন বস্তুতে যে পরিমাণ পদার্থ থাকে, তাহাকে ঐ বস্তুর **ভর** বলা হয়।

(4) কণা (Particle) :

কোন একটি বস্তুর আয়তন যদি এমন ক্ষুদ্র হয় যে, তাহাকে একটি বিন্দু মনে করা যাইতে পারে, তবে তাহাকে একটি **কণা** বলা হইবে। সুতরাং, একটি কণাকে ভরযুক্ত একটি বিন্দু ভাবা যাইতে পারে।

0-2. রাশি ও তাহার একক :

পাঁচ গজ কাপড়, দুই কিলোগ্রাম চা, দশ মিনিট সময়, প্রভৃতি কথা আমরা নিয়তই বলিয়া থাকি। পাঁচ গজ, দুই কিলোগ্রাম, দশ মিনিট—ইহারা এক একটি **বদ্ধ রাশি (Concrete quantity)**। ইহাদিগের মানগুলিকে (অর্থাৎ, পাঁচ, দুই, দশকে) সরল বা **শুদ্ধ** রাশি (Simple, or, abstract quantity) বলা হয়। এইরূপ, আরও বিভিন্ন বদ্ধরাশি আছে।

তাহা ছাড়া, যে কোন সংখ্যাকেও রাশি বলা হয়। ইহাদিগকে **শুদ্ধ রাশি (Abstract quantity, or, number)** বলে। যেমন, 2, 5, 3/2, −3, প্রভৃতি শুদ্ধ রাশি।

কোন বস্তুরাশির মান নির্ণয়কালে সেইজাতীয় একটি **নির্দ্দিষ্ট** বস্তুরাশি লইয়া প্রথমোক্ত রাশিটি ঐ নির্দ্দিষ্ট রাশির কত গুণ বা কত অংশ তাহা ঠিক করিতে হয়; এবং তখন, ঐ নির্দ্দিষ্ট রাশিকে ঐ সমজাতীয় রাশির **একক (Unit)** বলা হয়।

বলবিদ্যায় **(in Mechanics), দৈর্ঘ্য, ভর ও সময়**—ইহাদের একক **প্রাথমিক বা মৌলিক (Fundamental) একক**। অন্যান্য বস্তুরাশির একক এই প্রাথমিক একক হইতে পাওয়া যায় বলিয়া, তাহাদিগকে **উদ্ভূত (Derived)** একক বলা হয়।

দ্রষ্টব্য : বলবিদ্যার সংজ্ঞা **§. 0-4** এতে আছে।

দুইরকম পদ্ধতির একক প্রচলিত আছে :

(1) সেন্টিমিটার-গ্রাম-সেকেণ্ড পদ্ধতি, বা, সংক্ষেপে সি. জি.এস্. **(C.G.S.)** পদ্ধতি, যাহা, ফ্রেঞ্চ **(French)** বা বৈজ্ঞানিক পদ্ধতি ; এবং,

(2) ফুট-পাউণ্ড-সেকেণ্ড পদ্ধতি বা সংক্ষেপে এফ্. পি. এস্ **(F.P.S.)** পদ্ধতি যাহা পূর্বে ব্রিটিশ পদ্ধতি ছিল।

সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে, দৈর্ঘ্যের একক **সেণ্টিমিটার (Centimetre)** ; ভরের একক **গ্রাম (Gramme)** ; এবং সময়ের একক **সেকেণ্ড (Second).**

এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে, দৈর্ঘ্যের একক **ফুট (Foot)** ; ভরের একক **পাউণ্ড (Pound)** ; এবং সময়ের একক **সেকেণ্ড (Second).**

মন্তব্য : সুবিধার জন্য যে কোন পরিমাণের দৈর্ঘ্যকে একক হিসাবে ব্যবহার করা যাইতে পারে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(a) (1) 100 সেন্টিমিটার (সে. মি.)=1 মিটার (মি.) ;
1,000 মিটার=1 কিলোমিটার (কি. মি.)।

(2) 12 ইঞ্চি=1 ফুট ; 3 ফুট=1 গজ ; 1760 গজ=1 মাইল।

দ্রষ্টব্য : 1 সে. মি.=0·3937 ইঞ্চি (প্রায়) ; 1 মি.=39·37 ইঞ্চি (প্রায়) ; 1 কি. মি.=0·62138 মাইল (প্রায়); 1 ইঞ্চি=2·54 সে. মি. (প্রায়) ; 1 ফুট=30·48 সে. মি. (প্রায়) ; 1 মাইল=1·6093 কি. মি. (প্রায়) ;

(b) (1) 1,000 গ্রাম (গ্রা.)=1 কিলোগ্রাম (কি. গ্রা.) ;
100 কি. গ্রা.=1 কুইন্টাল ;
1,000 কি. গ্রা.=10 কুইন্টাল=1 মেট্রিক টন (metric ton).

(2) 16 আউন্স = 1 পাউণ্ড (পা.) ; 28 পা. = 1 কোয়ার্টার ;
4 কোয়ার্টার = 1 হন্দর ; 20 হন্দর = 1 টন (ton)
1 টন = 2240 পাউণ্ড ; 1 স্টোন্ (stone) = 14 পাউণ্ড।

দ্রষ্টব্য : 1 কিলোগ্রাম = 2·2046 পাউণ্ড (প্রায়) ;
1 পা. = 453·6 গ্রা. (প্রায়)।

(c) 60 সেকেণ্ড = 1 মিনিট ; 60 মিনিট = 1 ঘণ্টা ; 24 ঘণ্টা = 1 দিন।

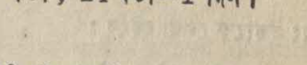
0-3. স্কেলার ও ভেক্টর :

যে সমস্ত প্রাকৃতিক রাশির **(Physical quantity)** মান (magnitude) আছে, কিন্তু, উহাদের দিক্ **(direction)** নাই, তাহাদিগকে **স্কেলার (Scalar)** বলা হয়। যেমন, ভর ও সময়।

যে সমস্ত প্রাকৃতিক রাশির মান ও দিক্ উভয়েই আছে, তাহাদিগকে **ভেক্টর (Vector)** বলা হয়। যেমন, দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ (directed line-segment).

মনোনীত এককের সাহায্যে একটি দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ দ্বারা একটি ভেক্টর রাশিকে সূচিত করা যাইতে পারে, যেখানে ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্যই ভেক্টর রাশিটির মান নির্দেশ করিবে।

ধরা যাক্, α একটি ভেক্টর রাশি, যাহার মান a একক। মনে করি, $\overrightarrow{AB}$ এর পরিমাপ a একক এবং α ভেক্টরের দিক্ A হইতে B এর দিকে। তাহা হইলে, ভেক্টর চিহ্নে লেখা হইবে $\alpha = \overrightarrow{AB}$ যেখানে α অর্থাৎ $\overrightarrow{AB}$ এর মান a এবং লেখা হইবে



$$|\overrightarrow{AB}| = a, \quad \text{বা,} \quad |\alpha| = a.$$

$\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের A কে **আদি বিন্দু** এবং B কে **অন্তিম বিন্দু** বলা হয়।

যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাহাকে **একক ভেক্টর (Unit vector)** বলা হয়।

যে ভেক্টরের মান শূন্য তাহাকে **শূন্য ভেক্টর (Null vector, বা, Zero vector)** বলা হয়।

দুইটি ভেক্টর সমান হইবে, যদি তাহাদের মান সমান হয় এবং তাদের দিক্‌ও একই হয়।

দুইটি ভেক্টরের মান সমান, কিন্তু তাহাদের একটির দিক্ অপরটির বিপরীত হইলে উহাদের একটিকে অপরটির ঋণাত্মক ভেক্টর বলা হইবে। যেমন, $\overrightarrow{BA}$ ভেক্টর, $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরএর ঋণাত্মক এবং লেখা হয় $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$; $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AB}|$.

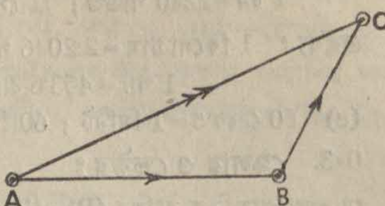
ভেক্টর-যোগের ত্রিভুজ সূত্র (Triangle Law of Addition of two vectors) :

$\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ দুইটি ভেক্টর হইলে,

উহাদের যোগফল হইবে : $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টর ;

এবং ইহাকে লেখা হইবে :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$



0-4. বলবিদ্যা (Mechanics) :

কোন বস্তু স্থান পরিবর্তন করিলে, তাহার **গতি (Motion)** আছে বলা হয়। কোন বস্তু এইরূপ স্থান-পরিবর্তন না করিলে, তাহার সেই অবস্থানকে **স্থিরাবস্থা (Rest)** বলা হইবে।

যাহা বস্তুর স্থিরাবস্থা অথবা গতির পরিবর্তন ঘটায়, বা, ঘটাইতে চেষ্টা করে, তাহাকে **বল (Force)** বলা হয়।

বিজ্ঞানের যে শাখায় বস্তুর গতি ও বল-প্রয়োগ বিষয়ক নানাদিক আলোচিত হয়, তাহাকে **বলবিদ্যা (Mechanics)** বলা হয়।

বলবিদ্যার দুইটি শাখা আছে :

(1) গতিবিদ্যা (Dynamics) এবং (2) স্থিতিবিদ্যা (Statics).

গতিবিদ্যায়, গতিশীল বস্তুর নানাদিক্ আলোচিত হয়। ইহা **কাইনেম্যাটিকস্ (Kinematics)** এবং **কাইনেটিকস্ (Kinetics)**—এই দুই অংশে বিভক্ত।

কাইনেম্যাটিকসে, কেবল গতির প্রকৃতি বা ধর্মই আলোচনা করা হয় ; গতির কারণ এবং বস্তুর সহিত বলের সম্পর্ক—এই সমস্ত বিষয় আলোচিত হয় না।

কাইনেটিকসে, গতির কারণ এবং বস্তুর সহিত বলের সম্পর্ক—এই উভয়েই আলোচিত হইয়া থাকে।

স্থিতিবিদ্যায়, বলসমূহের প্রয়োগে বস্তুর স্থিরাবস্থার বিষয় আলোচিত হয়।

মন্তব্য : যে কোন বস্তু অসংখ্য কণা দ্বারা গঠিত। যে বস্তুর কণাগুলির আপেক্ষিক অবস্থান সকল অবস্থাতেই অপরিবর্তিত থাকে, তাহাকে **কঠোর** বা দৃঢ় বা, **অনমনীয় বস্তু (Rigid body)** বলা হয়।

গতিবিদ্যা

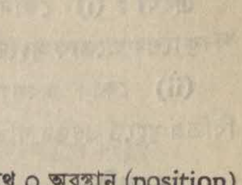
প্রথম অধ্যায়

দ্রুতি ও বেগ

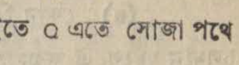
(Speed & Velocity)

1-1. উপস্থাপন।

মনে করি, একটি বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) OPQ বক্রপথে O অবস্থান (position) হইতে Q অবস্থানে t **অবকাশে (interval of time)** আসিল। তাহা হইলে, t অবকাশে বস্তুটির **অতিক্রান্ত পথ (path described)** এর পরিমাপ OPQ বক্ররেখার দৈর্ঘ্যের সমান। এইরূপ ক্ষেত্রে, O এবং Q যথাক্রমে t অবকাশে **চলমান (moving)** বস্তুটির **প্রারম্ভিক (initial)** এবং **প্রান্তিক (final)** অবস্থান হইবে।



যদি কোন বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) t অবকাশে O হইতে Q এতে সোজা পথে যাইত, তাহা হইলে, এই অবকাশে বস্তুটির অতিক্রান্ত পথের পরিমাপ হইত OQ এর দৈর্ঘের সমান।



বক্রপথে অথবা সোজা পথে কোন এক অবস্থান হইতে যাইবার সময় চলমান বস্তুর পথ অতিক্রমের হার বিভিন্ন অবস্থানে **বিভিন্ন** অথবা **একই** থাকিতে পারে।

1-2 দ্রুতি (Speed):

একটি নির্দ্দিষ্ট মুহূর্তে (at a particular instant) একটি চলমান বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) এর **পথ অতিক্রমের হার (rate of description of path)** কে দ্রুতি বলা হয়।

একটি নির্দ্দিষ্ট অবকাশে একটি চলমান বস্তুর বিভিন্ন অবস্থানে উহার দ্রুতি বিভিন্ন হইতে পারে, অথবা, একই থাকিতে পারে।

সমদ্রুতি (uniform speed):

কোন নির্দ্দিষ্ট অবকাশে, একটি চলমান বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) যদি সমান সমান সময়ে (সেই সময় যতই ক্ষুদ্র হউক না কেন) সমান সমান দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রম করে, তাহা হইলে, ঐ অবকাশে উহা **সমদ্রুতিতে** চলমান বলা হইবে।

অসম দ্রুতি (Non-uniform speed) :

কোন নির্দ্দিষ্ট অবকাশে, একটি চলমান বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) সমান সমান সময়ে অসমান দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রম করিলে, ঐ অবকাশে উহার দ্রুতি **অসম** হইবে।

দ্রষ্টব্য : (i) কোন অবকাশে একটি বস্তু সমদ্রুতিতে চলমান হইলে, ঐ অবকাশের প্রত্যেক মুহূর্ত্তে দ্রুতির পরিমাপ একই হইবে।

(ii) কোন অবকাশে একটি বস্তু অসম দ্রুতিতে চলমান হইলে ঐ অবকাশের বিভিন্ন মুহূর্তে দ্রুতির পরিমাপ বিভিন্ন হইবে।

গড় দ্রুতি (Average speed) :

একটি নির্দ্দিষ্ট অবকাশে, একটি চলমান বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) যে পথ অতিক্রম করে, সেই পথের দৈর্ঘ্য ও সময়ের অনুপাতকে উহার **গড় দ্রুতি** বলা হয়।

সুতরাং, t সেকেণ্ড সময়ে একটি চলমান বস্তুর অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য s ফুট হইলে, ঐ অবকাশে গড় দ্রুতি হইবে : প্রতি সেকেণ্ডে (s/t) ফুট।

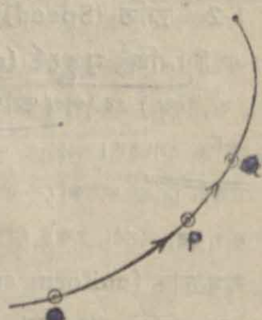
দ্রুতির পরিমাপ (measurement of speed) :

(a) কোন নির্দ্দিষ্ট অবকাশে, একটি বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) সমদ্রুতিতে চলমান হইলে, ঐ অবকাশের গড় দ্রুতিই উহার প্রতি মুহূর্ত্তে দ্রুতির পরিমাপ হইবে।

মনে করি, সমদ্রুতিতে চলমান একটি বস্তু 6 ঘণ্টায় 90 মাইল পথ অতিক্রম করিল। তাহা হইলে, ঐ অবকাশে, বস্তুটির গড় দ্রুতি ঘণ্টায় 90/6 মাইল অর্থাৎ, ঘণ্টায় 15 মাইল, বা, মিনিটে 440 গজ, বা, সেকেণ্ডে 22 ফুট।

এইরূপ ক্ষেত্রে, যে কোন মুহূর্তে 'দ্রুতি সেকেণ্ডে 22 ফুট, বা, মিনিটে 440 গজ, বা, ঘণ্টায় 15 মাইল' বলা যাইবে।

(b) অসম দ্রুতিতে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে, কোন এক নির্দ্দিষ্ট মুহূর্তে দ্রুতির পরিমাপ হইবে 'কোন ক্ষুদ্র অবকাশের অন্তর্গত সেই মুহূর্ত হইলে, সেই ক্ষুদ্র অবকাশে অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য ও সময়ের অনুপার্তের **সীমান্ত মান** (limiting value)'.



মনে করি, একটি বস্তু t সেকেণ্ড সময়ে s ফুট দৈর্ঘ্যের পথ এবং $t+\triangle t$ সেকেণ্ড সময়ে ($\triangle t$ খুবই ক্ষুদ্র), $s+\triangle s$ ফুট দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রম করে, যেখানে OP বক্ররেখার দৈর্ঘ্য

s ফুট এবং OPQ বক্ররেখার দৈর্ঘ্য $s+\Delta s$ ফুট। তাহা হইলে, Δt সেকেণ্ডে বস্তুটি Δs ফুট দৈর্ঘ্যের পথ ($=\widehat{PQ}$ বক্ররেখা) অতিক্রম করে, এবং ঐ Δt সেকেণ্ড সময়ে বস্তুটির গড় দ্রুতি সেকেণ্ডে ($\Delta s/\Delta t$) ফুট।

P অবস্থানে, অর্থাৎ, t সেকেণ্ড সময়ের মুহূর্তে, চলমান বস্তুটির দ্রুতি সেকেণ্ডে u ফুট হইলে, সংজ্ঞানুসারে,

$$u=\underset{\Delta t\to 0}{Lt}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt},$$ (এখানে Δs এর আঙ্কিক মান লইতে হইবে)।

দ্রুতি পরিমাপে একক :

গতিশীল বস্তুর (বা, কণার, বা, বিন্দুর) এক একক সময়ে **সমভাবে (uniformly)** এক একক দৈর্ঘ্যের অতিক্রান্ত পথকে দ্রুতির একক ধরা যাইতে পারে। সাধারণতঃ, (i) সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে দ্রুতির একক **"প্রতি সেকেণ্ডে এক সেণ্টিমিটার"**; ইহাকে সংক্ষেপে **1 সে. মি./সে.** বা, 1 সে. মি./সেকেণ্ড, বা সেকেণ্ডে 1 সে. মি. লেখা হয়।

(ii) এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে দ্রুতির একক **"প্রতি সেকেণ্ডে এক ফুট"**; ইহাকে সংক্ষেপে **1 ফু./সে.**, বা, 1 ফু./সেকেণ্ড, বা, সেকেণ্ডে 1 ফুট লেখা হয়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(1) দ্রুতির কেবল পরিমাপ আছে; উহার কোন দিক্ নাই। সেইজন্য দ্রুতি স্কেলার রাশি।

(2) দ্রুতি সর্বদাই ধনাত্মক।

মন্তব্য : সমদ্রুতি বা অসম দ্রুতি উল্লেখ না করিয়া কেবল 'দ্রুতি' শব্দটি বলা থাকিলে, উহার দ্বারা সমদ্রুতিকে বুঝাইবে।

একটি চলন্ত গাড়ীর দ্রুতি ঘণ্টায় 30 মাইল বলিলে, ইহার দ্বারা বুঝায় :

(i) গাড়ীটি সমদ্রুতিতে চলিতেছে; এবং

(ii) উহা 1 ঘণ্টায় 30 মাইল পথ যাইবে।

এককের পরিবর্ত্তন :

দ্রুতি : ঘণ্টায় 30 মাইল $=$ মিনিটে $\dfrac{30\times 1760}{60}$ গজ

$=$ সেকেণ্ডে $\dfrac{30\times 1760\times 3}{60\times 60}$ ফুট,

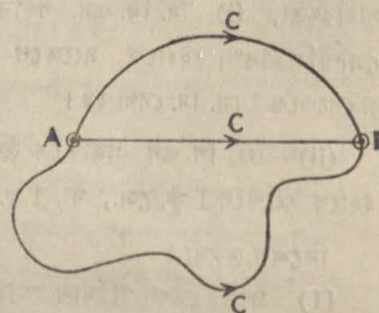
অর্থাৎ দ্রুতি : ঘণ্টায় 30 মাইল = মিনিটে 880 গজ ;
= সেকেণ্ডে 44 ফুট।

(i) **দ্রুতি : x মাইল/ঘণ্টা = দ্রুতি : $x \times \frac{22}{15}$ ফু./সে. ;**

(ii) **দ্রুতি : a ফু./সে. = দ্রুতি : $a \times \frac{15}{22}$ মাইল/ঘণ্টা।**

1-3. সরণ (Displacement) :

একটি নির্দিষ্ট অবকাশে, একটি চলমান বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) এর প্রারম্ভিক ও প্রান্তিক অবস্থানদ্বয় সংযোজক দিক্-নির্দেশিত রেখাংশকে ঐ অবকাশে উহার সরণ বলা হইবে।



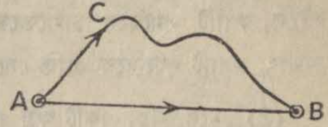
মনে করি, একটি বস্তু t অবকাশে, A অবস্থান হইতে ACB বক্রপথে অথবা ACB সোজা পথে B অবস্থানে আসিয়াছে। তাহা হইলে, এখানে t অবকাশে A ও B যথাক্রমে বস্তুটির প্রারম্ভিক ও প্রান্তিক অবস্থান, $\overline{AB}$ রেখাংশের দৈর্ঘ্যই সরণের পরিমাপ এবং এই সরণ A হইতে B এর দিকে। সুতরাং, দেখা যাইতেছে, সরণের মান ও দিক্ উভয়ই আছে ; অর্থাৎ, সরণ একটি ভেক্টর রাশি। এইরূপ ক্ষেত্রে, t অবকাশে, বস্তুটির সরণ $\overrightarrow{AB}$.

দ্রষ্টব্য : কোনও অবকাশে, একটি বস্তুর সরণ জানিতে হইলে, ঐ অবকাশে উহার প্রারম্ভিক ও প্রান্তিক অবস্থানদ্বয় সংযোজক রেখাংশের মান ও দিক উভয়ই জানিতে হইবে।

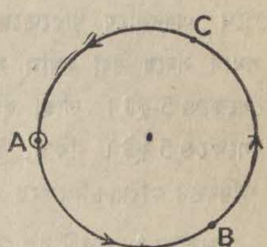
একটি নির্দিষ্ট অবকাশে, কোনও কণার সরণ 15 মিটার বলিলে, ভুল বলা হইবে ; কারণ, এখানে কেবল সরণের মান উল্লেখ করা আছে ; দিকের উল্লেখ নাই। ইহা উত্তরদিকে 15 মিটার সরণ, বা, পূর্বদিকে 15 মিটার সরণ, অথবা, অপর কোন নির্দিষ্ট দিকে 15 মিটার সরণ হইতে পারে।

সি. জি. এস্ পদ্ধতিতে সেন্টিমিটার এবং এফ. পি. এস্ পদ্ধতিতে ফুট সরণের মানের একক হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

দৃষ্টান্ত: (a) একটি চলমান কণা 12 সেকেণ্ডে A অবস্থান হইতে ACB বক্রপথে B অবস্থানে আসিল, যেখানে ACB বক্রপথের দৈর্ঘ্য 25 ফুট এবং $\overline{AB}$ এর দৈর্ঘ্য 18 ফুট। তাহা হইল, 12 সেকেণ্ডে A হইতে B এর দিকে কণাটির সরণ 18 ফুট।



(b) একটি চলমান বিন্দু 10 সেকেণ্ডে A অবস্থান হইতে ABC বৃত্তপথে ঘুরিয়া পুনরায় A অবস্থানে ফিরিয়া আসিল। তাহা হইলে, এইরূপক্ষেত্রে, 10 সেকেণ্ডে কণাটির সরণ হইবে শূন্য।



দ্রষ্টব্য: দুইটি সরণকে সমান বলা হইবে, যদি উভয়ের মান একই এবং দিক্‌ও একই হয়; অন্যথায়, তাহারা সমান সরণ হইবে না।

মন্তব্য: একটি চলমান বস্তুর বিভিন্ন অবস্থানে, সরণের পরিবর্তন-হার বিভিন্ন হইতে পারে, অথবা, একই থাকিতে পারে।

1-4. বেগ (Velocity) :

একটি নির্দ্দিষ্ট মুহূর্ত্তে একটি চলমান বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) এর সরণের পরিবর্ত্তন-হারকে বেগ বলা হয়।

একটি নির্দ্দিষ্ট অবকাশে, একটি চলমান বস্তুর বিভিন্ন অবস্থানে উহার বেগ বিভিন্ন হইতে পারে, অথবা, একই থাকিতে পারে।

সমবেগ (Uniform velocity) :

কোন নির্দ্দিষ্ট অবকাশে, যদি একটি বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) একই সরলরেখা বরাবর একই দিকে চলিতে থাকে, এবং ঐ অবকাশে সমান সমান সময়ে (সে সময় যতই ক্ষুদ্র হউকনা কেন) সমান দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রম করে অর্থাৎ, ঐ অবকাশে সমান সমান সময়ে উহার সকল সরণ সমান হয়, তাহা হইলে, তখন উহা সমবেগে চলমান বলা হইবে।

অসম বেগ (Non-uniform velocity) :

কোন নির্দ্দিষ্ট অবকাশের সমান সমান সময়ে চলমান বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) এর সরণ অসমান হইলে, ঐ অবকাশে উহা **অসম বেগে** চলমান বলা হইবে।

সুতরাং, কোনও অবকাশের সমান সমান সময়ে একটি চলমান বস্তুর সরণের মান বা দিক্ অথবা উভয়ের পরিবর্তন হইলে, ঐ অবকাশে বস্তুটি অসম বেগে চলমান হইবে।

দৃষ্টান্ত : (1) মনে করি, একটি কণা কোন সরলরেখা বরাবর পূর্বদিকে চলিতেছে, এবং সমান সমান সময়ে উহার সরণ সমান এবং তাহা প্রতি সেকেণ্ডে 25 ফুট। তাহা হইলে, কণাটি সমবেগে চলিতেছে, এবং উহার বেগ "পূর্ব্বদিকে সেকেণ্ডে 25 ফুট", অর্থাৎ, কণাটি পূর্ব্বদিকে প্রতি সেকেণ্ডে 25 ফুট দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রম করিতেছে।

(2) মনে করি, একটি ক্ষুদ্র প্রস্তর খণ্ড একটি রজ্জুর এক প্রান্তে থাকিয়া বৃত্তাকার পথে এমনভাবে ঘুরিতেছে যে, ঐ বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ 10 ফুট এবং সমান সমান সময়ে উহা সমান সমান দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রম করিতেছে, এবং তাহা প্রতি সেকেণ্ডে 5 ফুট। তাহা হইলে, উহা **সমদ্রুতিতে** চলমান, এবং উহার দ্রুতি প্রতি সেকেণ্ডে 5 ফুট। কিন্তু, উহা সমবেগে চলমান নহে ; কারণ প্রতি মুহূর্তে উহা দিক্ পরিবর্ত্তন করিয়া চলিতেছে। এইরূপ ক্ষেত্রে, উহা **অসম বেগে** চলিতেছে।

মন্তব্য : একটি বস্তু কোনও **নির্দ্দিষ্ট দিক্ বরাবর** সমদ্রুতিতে চলিতে থাকিলে, উহা সমবেগে চলিতেছে বলা যাইতে পারে ; কিন্তু, কোনও বস্তু সমদ্রুতিতে চলিতে থাকিলে, উহা সমবেগে নাও চলিতে পারে।

(A) গড় বেগ (Average velocity) :

একটি নির্দ্দিষ্ট অবকাশে, একটি চলমান বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু)' এর সরণ ও সময়ের অনুপাতকে ঐ অবকাশে উহার গড় বেগ বলা হইবে।

সুতরাং, t সেকেণ্ড সময়ে একটি চলমান বস্তুর সরণের পরিমাপ s ফুট হইলে, এবং সেই সরণ $\overrightarrow{AB}$ হইলে, এই t সেকেণ্ড অবকাশে বস্তুটির গড় বেগ প্রতি সেকেণ্ডে s/t ফুট এবং তাহা A হইতে B এর দিকে হইবে।

(B) বেগের পরিমাপ নির্ণয় পদ্ধতি :

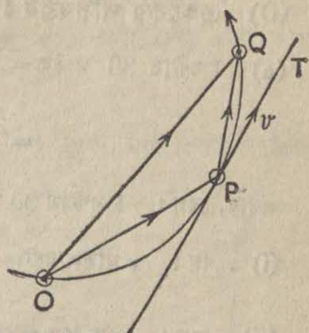
(a) কোনও নির্দ্দিষ্ট অবকাশে, একটি বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) সমবেগে চলিতে থাকিলে (অতএব, বস্তুটি সরলরেখায় একই দিকে গতিশীল), ঐ অবকাশের গড় বেগের পরিমাপই উহার প্রতি মুহূর্তে বেগের পরিমাপ হইবে।

মনে করি, সমবেগে ধাবমান একটি গাড়ী 6 ঘণ্টায় 90 মাইল পথ অতিক্রম করে। তাহা হইলে, ঐ অবকাশে গাড়ীটির গড় বেগ ঘণ্টায় 15 মাইল, বা, মিনিটে 440 গজ, বা, সেকেণ্ডে 22 ফুট বলা যাইতে পারে।

এইরূপক্ষেত্রে, ঐ অবকাশের যে কোন মুহূর্ত্তে 'বেগ সেকেণ্ডে 22 ফুট, বা, মিনিটে 440 গজ, বা, ঘণ্টায় 15 মাইল,' বলা যাইবে।

(b) অসম বেগে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে, একটি নির্দ্দিষ্ট মুহূর্ত্তে উহার বেগের পরিমাপ হইবে, 'কোন অতি ক্ষুদ্র অবকাশের অন্তর্গত সেই মুহূর্ত্ত হইলে, সেই ক্ষুদ্র অবকাশে সরণের মান ও ঐ ক্ষুদ্র সময়ের অনুপাতের **সীমান্থ মান (limiting value)**'.

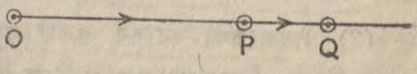
মনে করি, একটি কণার সরণ t সেকেণ্ড সময়ে $\overrightarrow{OP}$ এবং $t+\Delta t$ সেকেণ্ড সময়ে $\overrightarrow{OQ}$; তাহা হইলে, Δt সেকেণ্ডে সময়ে উহার সরণ $\overrightarrow{PQ}$. অতএব, Δt সেকেণ্ড সময়ে কণাটির গড় বেগ সেকেণ্ডে $\overrightarrow{PQ}/\Delta t$ ফুট, ($\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{PQ}$, এর মানকে ফুটে ধরিলে)।



P অবস্থানে, অর্থাৎ, t সেকেণ্ডে সময়ের মুহূর্ত্তে, চলমান কণাটির বেগের পরিমাপ সেকেণ্ডে v ফুট হইলে, সংজ্ঞানুসারে, $v = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \dfrac{\overline{PQ}}{\Delta t}$; এবং, OPQ বক্র-রেখার P বিন্দুতে, $\overrightarrow{PT}$ স্পর্শক উহার দিক নির্দেশ করে অর্থাৎ, বক্ররেখায় ধাবমান কণার জন্য প্রতি মুহূর্ত্তে বেগের দিক্‌, স্পর্শক বরাবর হইবে।

দ্রষ্টব্য : কণাটি সরলরেখা বরাবর চলিতে থাকিলে, এবং উহার সরণ t সেকেণ্ডে $\overrightarrow{OP}$ এবং $t+\Delta t$ সেকেণ্ডে $\overrightarrow{OQ}$ হইলে,

Δt সেকেণ্ডে উহার সরণ হইবে $\overrightarrow{PQ}$.



ধরি, $\overline{OP} = x$ ফুট ; $\overline{OQ} = (x+\Delta x)$ ফুট। তাহা হইলে, $\overline{PQ} = \Delta x$ ফুট। সুতরাং P অবস্থানে, অর্থাৎ, t সেকেণ্ডের মুহূর্ত্তে কণাটির বেগের পরিমাপ সেকেণ্ডে v ফুট হইলে,

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\overline{PQ}}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt};$$

এবং, ইহার ধনাত্মক দিক্ হইবে, **"যেদিকে x বাড়িতেছে"**।

(C) বেগ পরিমাপে একক :

গতিশীল বস্তুর (বা, কণার, বা, বিন্দুর) সমভাবে এক একক সময়ে এক একক সরণের পরিমাপকে বেগের একক ধরা যাইতে পারে। সাধারণতঃ,

(a) সি. জি. এস্ পদ্ধতিতে **'সেকেণ্ডে এক সেণ্টিমিটার সরণ'** বেগের একক ; ইহাকে সংক্ষেপে 1 সে. মি./সে., বা 1 সে. মি./সেকেণ্ড, বা, সেকেণ্ডে 1 সে. মি., লেখা হয়।

(b) এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে **'সেকেণ্ডে এক ফুট সরণ'** বেগের একক ; ইহাকে সংক্ষেপে **1 ফু. সে.**, বা 1 ফু/সেকেণ্ড, বা, সেকেণ্ডে 1 ফুট, লেখা হয়।

(D) এককের পরিবর্তন :

(a) 1 ঘণ্টায় 30 মাইল $=\dfrac{30\times 1760}{60}$ গজ/মিনিট

$$=\frac{30\times 1760\times 3}{60\times 60} \text{ ফুট/সেকেণ্ড ;}$$

অর্থাৎ, বেগ : 1 ঘণ্টায় 30 মাইল = 880 গজ/মি. = 44ফু./সে. ;

(i) বেগ : x মাইল/ঘণ্টা = বেগ : $x\times\dfrac{22}{15}$ ফু./সে. ;

(ii) বেগ : a ফু./সে. = বেগ : $a\times\dfrac{15}{22}$ মাইল/ঘ.।

(b) (i) বেগ : x কি. মি./ঘ. = বেগ : $\dfrac{x\times 10^3\times 10^2}{60\times 60}$ সে. মি./সে ;

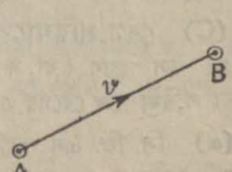
(ii) বেগ : a সে. মি./সে. = বেগ ; $\dfrac{a\times 60\times 60}{10^3\times 10^2}$ কি. মি./ঘ.

মন্তব্য : (1) সমবেগ বা অসম বেগ উল্লেখ না করিয়া কেবল "বেগ" শব্দটি বলা থাকিলে, উহার দ্বারা সমবেগ বুঝাইবে ; এবং, তাহা কেবল বেগের পরিমাপকে নির্দেশ করিবে।

(2) সরলরেখা বরাবর একটি বস্তু সমবেগে চলিতে থাকিলে, উহা 'সমদ্রুতিতে চলিতেছে' বলা যাইতে পারে।

(E) বেগ ভেক্টর রাশি :

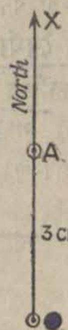
বেগের পরিমাপ ও দিক উভয়েই আছে। সেইজন্য বেগ ভেক্টর রাশি। সুতরাং, যে কোন নির্দিষ্ট বেগকে নির্ধারিত (chosen) এককের সাহায্যে একটি দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ দ্বারা সূচিত করা যাইতে পারে। মনে করি, একটি চলমান বস্তুর বেগ ঘণ্টায় v কি. মি. ; নিধারিত এককের সাহায্যে, $\overline{AB}$ এর পরিমাপ v কি. মি. হইলে, এবং বস্তুর সরণ A হইতে B এর দিকে (অথবা $\overline{AB}$ এর সমান্তরাল) হইলে, $\overline{AB}=v$ (কেবল পরিমাপে)।



মন্তব্য : বেগকে দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ দ্বারা সূচিত করার সময় বেগের এককের উপর রেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্ধারণ নির্ভর করে না।

যেমন, এক একক বেগকে 1 সে. মি. বা, 5 সে. মি. বা, 3/4 সে. মি. বা 1 ফুট, বা, 1 গজ, বা, 5 ফুট, বা 1/5 ফুট, বা, অপর যে কোন দৈর্ঘ্য দ্বারা সূচিত করা যাইতে পারে।

একটি নির্দিষ্ট দিকে 1 ফু./সে. বেগকে 1/2 ফুট দৈর্ঘ্য দ্বারা সূচিত করিলে, ঐ দিকে 40 ফু./সে. এবং 50 ফু./সে. বেগ যথাক্রমে 20 ফুট ও 25 ফুট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট রেখাংশ দ্বারা যথাক্রমে সূচিত হইবে।



মনে করি, একটি বস্তু ঘণ্টায় 12 কি. মি. বেগে উত্তর দিকে ধাবমান। ঘণ্টায় 4 কি. মি. বেগকে 1 সে./মি. দৈর্ঘ্যের রেখাংশ দ্বারা সূচিত করিলে, এবং, $\overline{OA}$ এর পরিমাপ 3 সে. মি. হইলে, যেখানে $\overline{OA}$ উত্তরমুখী, তখন, উত্তরদিকে 12 কি. মি./ঘ. $\vec{OA}$ দ্বারা সূচিত হইবে, যেখানে $\overline{OA}$ এর পরিমাপ 3 সে. মি।

(F) ধনাত্মক বেগ ও ঋণাত্মক বেগ :

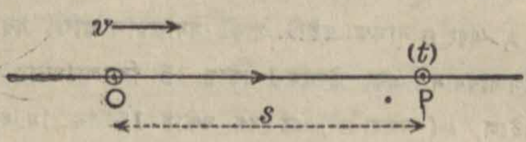
মনে করি, A এবং B নামক দুইটি গাড়ী সমান্তরাল রাস্তা বরাবর বিপরীত অভিমুখে সমবেগে ধাবমান ; এবং উভয়ে 1 ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার পথ অতিক্রম করে। তাহা হইলে, A (অথবা B) এর বেগ ঘণ্টায় 15 কি. মি. ধরিতে পারি। গাড়ী দুইটির যে কোন একটির বেগ ঘণ্টায় 15 কি. মি. হইলে অপরটির বেগ কিন্তু ঘণ্টায় 15 কি. মি. বলা যাইবে না ; কারণ, উহারা পরস্পর বিপরীত দিকে ধাবমান। বেগের ঐ পার্থক্য বুঝাইবার জন্য **ধনাত্মক বেগ ও ঋণাত্মক বেগ** ব্যবহৃত হয়। যে কোন একদিকের বেগকে ধনাত্মক করিলে, উহার বিপরীত দিকের বেগকে ঋণাত্মক ধরা হইবে।

মন্তব্য : কোন নির্দিষ্ট স্থান হইতে যে দিকে বস্তুটি গতিশীল, সেই-দিকে ইহার দূরত্ব ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, ঐ দিকে উহার বেগ ধনাত্মক এবং, বিপরীত দিকে ঋণাত্মক ধরা হইবে।

1-5. দ্রুতি ও বেগের পার্থক্য।

দ্রুতি	বেগ
(1) দ্রুতি স্কেলার রাশি।	(1) বেগ ভেক্টর রাশি।
(2) দ্রুতি সর্বদাই ধনাত্মক।	(2) বেগ ধনাত্মক, বা ঋণাত্মক হইতে পারে।
(3) নির্দিষ্ট অবকাশে চলমান বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) এর অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য ও সময়ের অনুপাত দ্বারা দ্রুতির পরিমাপ করা হয়।	(3) নির্দিষ্ট অবকাশে চলমান বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) এর সরণের পরিমাপ ও সময়ের অনুপাত দ্বারা বেগের পরিমাপ করা হয়।
(4) সমদ্রুতিতে চলমান বস্তু (বা, কণা, বা বিন্দু) সমবেগে চলমান নাও হইতে পারে।	(4) সমবেগে চলমান বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) অতি অবশ্যই সমদ্রুতিতে চলমান হইবে।

1-6. সমবেগে (অথবা, সরলরেখা বরাবর সমদ্রুতিতে) ধাবমান বস্তুর অতিক্রান্ত পথ নির্ণয় :



মনে করি, $\overrightarrow{OX}$ বরাবর একটি বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) সেকেণ্ডে v সে. মি. সমবেগে (বা, সমদ্রুতিতে) ধাবমান; এবং উহা t সেকেণ্ডে s সে. মি. দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রম করে। তাহা হইলে,

$v =$ গড় বেগ (বা, গড় দ্রুতি) $= s/t$, (পরিমাপে);

বা, $s = vt$.

যদি উহা সরলরেখা বরাবর ঘণ্টায় v কিলোমিটার সমবেগে (বা, সমদ্রুতিতে) চলিত এবং t ঘণ্টায় s কিলোমিটার পথ অতিক্রম করিত, তাহা হইলে, $v = s/t$ কি. মি./ঘ.; বা, $s = vt$, (কি. মি.)।

1-7. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. মাইল ও ঘণ্টা যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক ধরিয়া নিম্নোক্ত বেগের মান পরিবর্তন কর :

(i) সেকেণ্ডে 22 ফুট ; (ii) মিনিটে 440 গজ।

(i) সেকেণ্ডে 22 ফুট = ঘণ্টায় $\frac{22\times60\times60}{3\times1760}$ মাইল

= ঘণ্টায় 15 মাইল।

∴ নির্ণেয় উত্তর : ঘণ্টায় 15 মাইল।

(ii) মিনিটে 440 গজ = ঘণ্টায় $\frac{440\times60}{1760}$ মাইল

= ঘণ্টায় 15 মাইল।

∴ নির্ণেয় উত্তর : ঘণ্টায় 15 মাইল।

উদাহরণ 2. ঘণ্টায় 18 কি. মি. বেগে দ্রুতগামী একটি রেলগাড়ী $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে? 30 কি. মি. দূরত্ব কত সময়ে উহা অতিক্রম করিবে?

গাড়ীটি ঘণ্টায় 18 কি. মি. সমবেগে চলিতেছে। সুতরাং, উহা $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় 18 কি. মি. $\times 3\frac{1}{2}$ অর্থাৎ, 63 কি. মি. দূরত্ব অতিক্রম করিবে।

উহা 30 কি. মি. দূরত্ব অতিক্রম করিবে : 30/18 ঘণ্টায়, অর্থাৎ 1 ঘণ্টা 40 মিনিটে।

দ্রষ্টব্য: $s=vt$ সূত্রে (i) প্রথমক্ষেত্রে, $v=18$; $t=3\frac{1}{2}$.

∴ $s=18\times3\frac{1}{2}=63$. ∴ নির্ণেয় দূরত্ব = 63 কি. মি.।

(ii) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $v=18$; $s=30$.

∴ $30=18\times t$; ∴ $t=1\frac{2}{3}$.

∴ নির্ণেয় সময় = $1\frac{2}{3}$ ঘণ্টা।

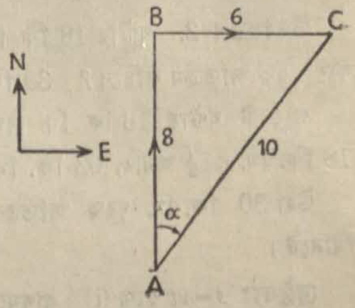
উদাহরণ 3. একটি কণা 9 সেকেণ্ড অবকাশের প্রথম 2 সেকেণ্ডে 15 সে. মি. ; পরবর্তী 3·2 সেকেণ্ডে 24 সে. মি. এবং তৎপরবর্তী 3·8 সেকেণ্ডে 28·5 সে. মি. দূরত্ব অতিক্রম করিলে, ঐ অবকাশে উহার গড় দ্রুতি কত ছিল? উহা ঐ অবকাশে কি সমদ্রুতিতে গতিশীল ছিল?

কণাটি 9 সেকেণ্ডে মোট (15+24+28·5) সে. মি. অর্থাৎ, 67·5 সে. মি. দূরত্ব অতিক্রম করিয়াছিল। সুতরাং, ঐ অবকাশে কণাটির গড় দ্রুতি ছিল : সেকেণ্ডে 67·5/9 সে. মি., অর্থাৎ, 7·5 সে. মি./সে.

কণাটি ঐ অবকাশে সমদ্রুতিতে গতিশীল ছিল কিনা প্রদত্ত শর্ত হইতে বলা যাইবে না ; কারণ কণাটি প্রথম 1 সেকেণ্ডে 7 সে. মি. ; পরবর্তী সেকেণ্ডে 8 সে. মি. যাইয়া থাকিতে পারে ; এইরূপ ক্ষেত্রে, প্রথম 2 সেকেণ্ডে উহা সমদ্রুতিতে গতিশীল ছিল না।

উদাহরণ 4. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার বেগে এক স্থান হইতে উত্তর দিকে 8 কিলোমিটার পথ যাইবার পর, তথা হইতে পূর্ব্বদিকে ঘণ্টায় 4·5 কিলোমিটার বেগে 6 কিলোমিটার পথ গেলেন। ঐ অবকাশে, ঐ ব্যক্তির (i) সরণ, (ii) গড়বেগ ও (iii) গড় দ্রুতি নির্ণয় কর।

ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার বেগে 8 কি. মি. পথ যাইতে $\frac{4}{3}$ ঘণ্টা সময় লাগে ; ঘণ্টায় 4·5 কি. মি. বেগে 6 কি. মি. পথ যাইতে $\frac{4}{3}$ ঘণ্টা সময় লাগে। মোট সময় $=(\frac{4}{3}+\frac{4}{3})$ ঘ. অর্থাৎ $\frac{8}{3}$ ঘণ্টা। মনে করি, ঐ ব্যক্তি A হইতে যাত্রা করিয়া C এতে আসিল, যেখানে $\overline{AB}=8$ কিলোমিটার ; $\overline{BC}=6$ কি. মি. ; $\angle ABC=90°$.



সুতরাং, $\overline{AC}=10$ কি. মি.।

ধরি, $\angle BAC=\alpha$, $\therefore\ \alpha=\tan^{-1}\frac{3}{4}$.

(i) নির্ণেয় সরণের পরিমাপ $\overline{AC}$, অর্থাৎ, 10 কি. মি. ; এবং, তাহা উত্তর হইতে পূর্ব দিকে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণে নত দিকে।

(ii) $\frac{8}{3}$ ঘণ্টায় সরণের পরিমাপ 10 কি. মি.। সুতরাং, ঐ অবকাশে ঐ ব্যক্তির গড় বেগ = ঘণ্টায় $\frac{10\times 3}{8}$ কি. মি. ; অর্থাৎ, ঘণ্টায় $3\frac{3}{4}$ কিলোমিটার ; এবং, তাহা উত্তর হইতে পূর্ব্বদিকে $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ কোণে নত দিকে।

(iii) $\frac{8}{3}$ ঘণ্টায় অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য $=\overline{AB}+\overline{BC}=14$ কি. মি.। সুতরাং, উক্ত অবকাশে, ঐ ব্যক্তির গড় দ্রুতি = ঘণ্টায় $\frac{14\times 3}{8}$ কি. মি. ; অর্থাৎ, ঘণ্টায় $5\frac{1}{4}$ কিলোমিটার।

উদাহরণ 5. ABC সোজা রাস্তা বরাবর A হইতে C-এতে যাইবার সময় একটি গাড়ীর গড় দ্রুতি ঘণ্টায় u কিলোমিটার ছিল। ঘণ্টায় v কিলোমিটার সমদ্রুতিতে A হইতে B এতে যাইতে যে সময় লাগিল ঘণ্টায় x কি. মি. সমদ্রুতিতে B হইতে C এতে যাইতে তাহার অর্ধেক সময় লাগিল। দেখাও যে, $x=3u-2v$.

মনে করি, A হইতে B এর দূরত্ব a কি মি. এবং B হইতে C এর দূরত্ব b কি. মি. ; A হইতে B তে যাইতে $2t$ ঘণ্টা সময় লাগিলে, B হইতে C তে যাইতে t ঘণ্টা সময় লাগিয়াছিল।

তাহা হইলে,

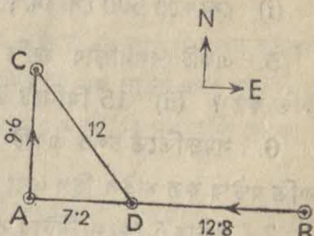
$$u\times 3t=a+b \; ; \qquad \cdots (1)\;;$$
$$v\times 2t=a \; ; \qquad \cdots (2)\;;$$
$$x\times t=b. \qquad \cdots (3).$$

$\therefore\; 3ut=a+b=(2v+x)t$;

বা, $3u=2v+x.\quad \therefore\quad x=3u-2v.$

[প্রয়োজনীয় শর্ত : $v<3u/2$; $x<3u.$].

উদাহরণ 6. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 30 কি. মি দ্রুতিতে কোন এক স্থান হইতে উত্তরাভিমুখে যাত্রা করিবার সময় তাহার ঠিক পূর্ব্বদিকে 20 কি. মি. দূরত্বে অপর এক ব্যক্তিকে দেখিল। দ্বিতীয় ব্যক্তি পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় 40 কি. মি. দ্রুতিতে চলিতে থাকিলে, কত সময় পরে তাহারা পরস্পরের নিকটতম হইবে ; এবং, তখন তাহাদের দূরত্বই বা কত হইবে ?



মনে করি, প্রথম ব্যক্তি এবং দ্বিতীয় ব্যক্তির প্রাথমিক অবস্থান যথাক্রমে A এবং B, যেখানে $\overline{AB}=20$ কি. মি. ; এবং t ঘণ্টা পরে তাহাদের অবস্থান যথাক্রমে C এবং D. তাহা হইলে,

$\overline{AC}=30t$; $\overline{BD}=40t$, যেখানে,

$\angle CAD=90^\circ$. সুতরাং,

$$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2=(30t)^2+(20-40t)^2$$
$$=2500t^2-1600t+400$$
$$=(50t-16)^2+144.$$

সুতরাং, $\overline{CD}$ এর মান ক্ষুদ্রতম হইবে যখন, $50t-16=0$, অর্থাৎ, $t=\frac{8}{25}$; এবং, তখন, $\overline{CD}=12$.

সুতরাং, তাহারা $\frac{8}{25}$ ঘণ্টা, অর্থাৎ $19\frac{1}{5}$ মিনিট পরে, পরস্পরের নিকটতম হইবে এবং, তখন তাহাদের দূরত্ব হইবে : 12 কি. মি.।

প্রশ্নমালা 1

1. ফুট এবং সেকেণ্ডকে যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক ধরিয়া নিম্নোক্ত দ্রুতির মান পরিবর্তন কর :

(i) ঘণ্টায় 60 মাইল ; (ii) ঘণ্টায় 45 মাইল ;

(iii) মিনিটে 44 গজ ; (iv) ঘণ্টায় 3600 গজ ;

2. মাইল ও ঘণ্টাকে যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক ধরিয়া নিম্নোক্ত দ্রুতির মান পরিবর্তন কর :

(i) সেকেণ্ডে 44 ফুট ; (ii) মিনিটে 22 গজ ; (iii) মিনিটে 3/2 মাইল।

3. মিটার ও সেকেণ্ডকে যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক ধরিয়া নিম্নোল্লিখিত দ্রুতির মান পরিবর্তন কর :

(i) ঘণ্টায় 36 কিলোমিটার ; (ii) মিনিটে 12 হেক্টোমিটার ; (iii) মিনিটে 4200 ডেসি. মি.।

4. কিলোমিটার ও ঘণ্টাকে যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক ধরিয়া নিম্নলিখিত দ্রুতির মান পরিবর্তন কর :

(i) সেকেণ্ডে 500 সে. মি. ; (ii) মিনিটে 360 মিটার।

5. একটি রেলগাড়ীর দ্রুতি ঘণ্টায় 60 মাইল। (i) প্রতি সেকেণ্ডে উহার দ্রুতি কত ? (ii) 15 মিনিটে উহা কত পথ যাইবে ?

6. সমদ্রুতিতে চলন্ত একটি ট্রামগাড়ী 5 সেকেণ্ডে 88 ফুট যায়। তখন উহার দ্রুতি ঘণ্টায় কত মাইল ছিল এবং 15 মিনিটে কত পথ অতিক্রম করিয়াছিল ?

7. ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার সমবেগে ধাবমান একটি গাড়ী $7\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে ? $3\frac{3}{8}$ কিলোমিটার পথ কত সময়ে যাইবে ?

8. সেকেণ্ডে 10 মিটার দ্রুতিবিশিষ্ট একটি কণা 18 কিলোমিটার পথ কত ঘণ্টায় যাইবে ?

9. ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার বেগে একটি চলন্ত গাড়ী 4 ঘণ্টা 12 মিনিটে কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে ?

10. ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার সমদ্রুতি সম্পন্ন একটি কণা 20 সেকেণ্ডে কত মিটার পথ অতিক্রম করিবে ?

11. মিনিটে 150 মিটার দ্রুতিতে চলন্ত একটি ট্রামগাড়ী 3/4 ঘণ্টায় কত কিলোমিটার পথ অতিক্রম করিবে ?

12. 80 গজ দীর্ঘ একটি রেলগাড়ী 15 সেকেণ্ডে 140 গজ দীর্ঘ একটি প্ল্যাট্‌ফর্ম্ অতিক্রম করিলে, উহার দ্রুতি ঘণ্টায় কত মাইল ছিল ?

13. সোজা রেলপথে চলন্ত একটি রেলগাড়ী 9 সেকেণ্ডে দণ্ডায়মান এক ব্যক্তিকে অতিক্রম করিল। গাড়ীটির দৈর্ঘ্য 132 গজ হইলে, তখন উহার বেগ ঘণ্টায় কত মাইল ছিল ?

14 সোজাপথে ধাবমান 20 গজ দীর্ঘ একটি ট্রামগাড়ী 2 মিনিটে 105 গজ দূরে দূরে অবস্থিত 5টি আলোকস্তম্ভ অতিক্রম করিলে, উহার গড় বেগ তখন কত ছিল ?

15. পৃথিবী হইতে সূর্য্যের দূরত্ব 93×10^6 মাইল এবং আলোর গতি সেকেণ্ডে 186×10^3 মাইল হইলে, সূর্য্য হইতে পৃথিবীতে আলো আসিতে কত সময় লাগিবে ?

16. একটি গতিশীল গাড়ীর গড় দ্রুতি প্রথম 4 সেকেণ্ডে 40 ফু./সে. এবং পরবর্তী 6 সেকেণ্ডে 50 ফু./সে. ছিল। ঐ অবকাশে গাড়ীটির গড় দ্রুতি কত ছিল ?

17. একটি গাড়ী 10 কিলোমিটার পথ অতিক্রম করিবার সময় প্রথম অর্ধেক পথ ঘণ্টায় 40 কি. মি. দ্রুতিতে এবং বাকী অর্ধেক পথ ঘণ্টায় 50 কি. মি. দ্রুতিতে অতিক্রম করিলে, ঐ অবকাশে গাড়ীটির গড় দ্রুতি কত ছিল ?

18. একটি গাড়ী আধ ঘণ্টা সময়ে এক স্থান হইতে অপর এক স্থানে যাইবার সময় প্রথম 12 মিনিটে এক মাইল ; পরবর্তী 10 মিনিটে এক মাইল এবং তৎপরবর্তী 8 মিনিটে এক মাইল পথ অতিক্রম করিল। ঐ অবকাশে গাড়ীটির গড় দ্রুতি সেকেণ্ডে কত ফুট ছিল ?

19. একটি কণা প্রথম 2 সেকেণ্ডে 13 ফুট ; পরবর্তী 5 সেকেণ্ডে 32·5 ফুট এবং তৎপরবর্তী 8 সেকেণ্ডে 52 ফুট পথ অতিক্রম করিলে, ঐ অবকাশে উহার গড় দ্রুতি কত ছিল ? ঐ অবকাশে ইহা কি সমদ্রুতিতে গতিশীল ছিল ?

20. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 6 কি. মি. দ্রুতিতে 3 ঘণ্টা হাঁটিবার পর 15 মিনিট বিশ্রাম করেন। পুনরায় হাঁটিতে আরম্ভ করিয়া ঘণ্টায় 5 কি. মি. দ্রুতিতে 8 কি. মি. পথ যাইবার পর গাড়ীতে ঘণ্টায় 40 কি. মি. বেগে 30 কি. মি. পথ অতিক্রম করেন। সম্পূর্ণ পথ অতিক্রমের জন্য তাহার গড় দ্রুতি কত ছিল ?

21. এক ব্যক্তি কোন একটি নির্দিষ্ট স্থান হইতে পূর্বদিকে 3 ঘণ্টায় 12 কিলোমিটার যাইবার পর তথা হইতে উত্তরদিকে 1 ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার পথ অতিক্রম করিল। সম্পূর্ণ পথ অতিক্রম করিতে ঐ ব্যক্তির গড় দ্রুতি এবং গড় বেগ কত ছিল তাহা নির্ণয় কর।

22. 42 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথ একবার সম্পূর্ণ করিয়া একটি নির্দ্দিষ্ট স্থান হইতে ঐ পূর্ব্বস্থানে 12 মিনিটে একটি কণা ফিরিয়া আসিল। ঐ অবকাশে কণাটির (i) গড় দ্রুতি, (ii) সরণ ও (iii) গড় বেগ কত ছিল? ($\pi = 22/7$).

23. একটি বিন্দু 14 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের অর্ধপরিসীমা 5·5 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। ঐ অবকাশে চলন্ত বিন্দুটির (i) সরণ; (ii) গড় দ্রুতি; ও (iii) গড় বেগ কত ছিল? ($\pi = 22/7$).

24. একটি গাড়ী সোজা রাস্তা বরাবর ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে A হইতে B এতে 3 ঘণ্টায় যাইবার পর উহার লম্বাভিমুখে পূর্ব্ব বেগের দ্বিগুণ বেগে B হইতে C এতে 2 ঘণ্টায় পৌঁছিল। A হইতে C-এতে যাইতে গাড়িটির (i) সরণ; (ii) গড় বেগ; ও (iii) গড় দ্রুতি কত ছিল?

25. কোন একটি কণা A বিন্দু হইতে যাত্রা করিয়া 40 সে. মি. দীর্ঘ ACB বক্রপথ 10 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। B বিন্দুতে পৌঁছিবার পর আর কোন সময় অতিবাহিত না করিয়াই $\overrightarrow{BA}$ বরাবর চলিতে থাকিয়া 6 সেকেণ্ডে A বিন্দুতে আসিল। $\overline{AB}$ এর দৈর্ঘ্য 28 সে. মি. হইলে, সমগ্র সময়ের জন্য (i) গড় দ্রুতি; (ii) সরণ; ও (iii) গড় বেগ বাহির কর।

26. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় u মিটার দ্রুতিতে a মিটার পথ এবং ঘণ্টায় v মিটার দ্রুতিতে b মিটার পথ অতিক্রম করিল। সমগ্র অবকাশে তাহার গড় দ্রুতি V হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{a}{u}+\frac{b}{v}=\frac{a+b}{V}.$$

27. একটি বিন্দু কোন নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের পথ 6 সেকেণ্ডে 6 ফু./সে. গড় দ্রুতিতে অতিক্রম করে এবং উহার দ্রুতি প্রথমদিকে 4 ফু./সে. এবং বাকী সময়ের জন্য 8 ফু./সে. ছিল। 8 ফু./সে. গড় দ্রুতিতে বিন্দুটি কত পথ অতিক্রম করিয়াছিল?

28. একটি ট্রেণ ঘণ্টায় u কি. মি. গড় দ্রুতিতে হাওড়া হইতে বর্ধমানে যথাসময়ে পৌছিতে পারে। বর্ধমানে পৌছিতে যখন s কি. মি. দীর্ঘ পথ বাকী তখন একটি দুর্ঘটনার জন্য x ঘণ্টা বিলম্ব হইল। পুনরায় যাত্রাকালে ট্রেণটির দ্রুতি ঘণ্টায় v কি. মি. করায়, উহা যথাসময়ে বর্ধমানে পৌছিল। দেখাও যে, $\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=\frac{x}{s}.$

29. দুইটি কণা A এবং B হইতে যথাক্রমে u ফু./সে. এবং v ফু./সে. বেগে $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{BO}$ বরাবর একই সময়ে যাইতে আরম্ভ করিল, যেখানে $m\angle AOB=60°$; $\overline{OA}=a$ ফুট ও $\overline{OB}=b$ ফুট ; এবং O হইতে প্রথমটির দূরত্ব ক্রমশঃ বাড়িতে থাকে, কিন্তু দ্বিতীয়টির দূরত্ব কমিতে থাকে। B এতে অবস্থিত কণাটি যখন O এতে পৌঁছিল, A এতে অবস্থিত কণাটি তখন O হইতে c ফুট দূরত্বে থাকিলে, দেখাও যে,

$$cv=av+bu.$$

30. সোজা রেলরাস্তা বরাবর একটি রেলগাড়ী u ফুট/সে. দ্রুতিতে এবং a ফুট দূরত্বে উহার সমান্তরাল রাস্তা বরাবর একটি মটর গাড়ী v ফুট/সে. দ্রুতিতে একই দিকে ধাবমান। রেলরাস্তা হইতে b ফুট দূরত্বে অবস্থিত একটি নির্দ্দিষ্ট বস্তু এবং মটর গাড়ীটিকে রেলগাড়ীতে আসীন এক ব্যক্তি সর্বদা একই সরলরেখায় দেখিতে থাকিলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a}{b}+\frac{v}{u}=1.$$

31. যখন একটি জাহাজ A, অপর একটি জাহাজ B হইতে 10 কিলোমিটার পশ্চিমে ছিল ঠিক তখন A, পূর্বদিকে ঘণ্টায় 12 কিলোমিটার বেগে এবং B উত্তরদিকে ঘণ্টায় 16 কিলোমিটার বেগে যাইতেছিল। জাহাজ দুইটি যখন সবচেয়ে পরস্পরের নিকটে আসিবে তখন তাহাদের মধ্যে দূরত্ব কত হইবে এবং তাহা কখন হইবে ?

32. দুইটি সোজা রাস্তা যেখানে পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করিয়াছে, সেই সংযোগ স্থলের 200 মিটার দূর হইতে একটি রাস্তা বরাবর সংযোগ অভিমুখে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার বেগে এক ধাবমান ব্যক্তি তখন দেখিল ঐ সংযোগ স্থলের 4 কিলোমিটার দূর হইতে অপর রাস্তা বরাবর সংযোগ অভিমুখে ঘণ্টায় 24 কিলোমিটার বেগে একটি বাস আসিতেছে। কখন ঐ ব্যক্তি বাসটির নিকটতম হইবে এবং তখন তাহাদের দূরত্ব কত হইবে ?

33. দুইটি সোজা রাস্তা যেখানে পরস্পরকে 60° তে ছেদ করিয়াছে, সেই সংযোগস্থলের 100 গজ দূর হইতে একটি রাস্তা বরাবর সংযোগ অভিমুখে যে বেগে এক ব্যক্তি আসিতেছে ঠিক সেই মুহূর্তে সংযোগস্থলের 200 গজ দূর হইতে অপর রাস্তা বরাবর দ্বিতীয় এক ব্যক্তি একই বেগে সংযোগ অভিমুখে আসিতেছে, যেখানে তাহাদের বেগের দিকে সূক্ষ্মকোণ আছে। যখন তাহারা পরস্পরের নিকটতম হইবে তখন সংযোগস্থল হইতে কতদূরে তাহারা থাকিবে ?

34. দুইটি সোজা রাস্তা পরস্পরকে θ কোণে ছেদ করিয়াছে। দুইজন সাইকেল-আরোহী এই দুই রাস্তা বরাবর সংযোগস্থলের a এবং b দূরত্ব হইতে যথাক্রমে u এবং v বেগে সংযোগাভিমুখে চলিতে থাকিলে, দেখাও যে, তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হইবে : $(av-bu)\sin\theta/\sqrt{(u^2+v^2-2uv\cos\theta)}$.

$a/b=u/v$ হইলে কি হইতে পারে?

Answers (প্রশ্নমালা 1)

1. (i) 88 ফু./সে. ; (ii) 66 ফু./সে. ; (iii) 2·2 ফু./সে. ; (iv) 3 ফু./সে. ।
2. (i) 30 মাইল/ঘণ্টা ; (ii) $\frac{3}{4}$ মা./ঘ. ; (iii) 90 মা./ঘ. ।
3. (i) 10 মিটার/সেকেণ্ড ; (ii) 20 মি./সে. , (iii) 7 মি./সে. ।
4. (i) 18 কি. মি /ঘ. ; (ii) 21·6 কি. মি./ঘ. ।
5. (i) 88 ফু /সে. ; (ii) 15 মাইল। 6. (i) 12 মাইল/ঘণ্টা : (ii) 3 মাইল।
7. (i) 45 কি. মি. ; (ii) 34 মিনিট। 8. $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা। 9. 63 কি. মি.।
10. $27\frac{7}{9}$ মিটার। 11. 6·75 কি. মি.। 12. 30 মাইল/ঘণ্টা।
13. 30 মাইল/ঘণ্টা। 14. $7\frac{1}{2}$ মাইল/ঘণ্টা। 15. 8 মি. 20 সে.
16. 46 ফু./সে.। 17. $44\frac{4}{9}$ কি. মি./ঘণ্টা। 18. 8·8 ফু./সে।
19. 6·5 ফু /সে ; "কণাটি সমত্বরণে গতিশীল", একথা বলা যাইবে না।
20. 10 কি. মি./ঘণ্টা। 21. 4·25 কি. মি /ঘ. ; 3·25 কি. মি./ঘ., পূর্ব হইতে উত্তর দিকে $\tan^{-1}(\frac{5}{12})$ কোণে নত। 22. (i) 1·32 কি. মি./ঘ. ; (ii) 0 ; (iii) 0. 23. (i) $\overline{AC}=28$ সে. মি. ; (ii) 8 সে. মি./সে. ; (iii) $5\frac{1}{11}$ সে. মি./সে., $\overrightarrow{AC}$ বরাবর উত্তরদিকে। 24. (i) $\overline{AC}=40$ মাইল ; (ii) 8 মাইল/ঘ., $\overrightarrow{AC}$ এর দিকে, $\angle BAC=\tan^{-1}(\frac{4}{3})$; (iii) 11·2 মাইল/ঘণ্টা। 25. (i) 4·25 সে. মি./সে. ; (ii) 0 ; (iii) 0. 27. 24 ফুট। 31. 8 কি. মি. ; 18 মিনিট। 32. $\frac{88}{65}$ কি. মি. ; $(\frac{49}{338})$ ঘণ্টা। 33. উভয়েই 50 গজ দূরে থাকিবে। 34. উভয়েই একসঙ্গে সংযোগস্থলে আসিবে।

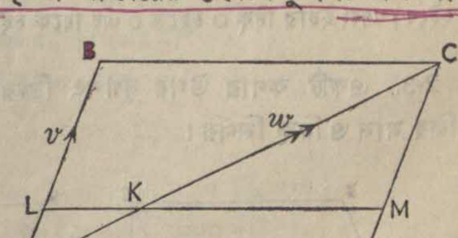
দ্বিতীয় অধ্যায়
লব্ধি বেগ
(Resultant Velocity)

2-1. উপস্থাপন।

কোন এক বিশেষ মুহূর্তে একটি গতিশীল বস্তু বা কণার যুগপৎ একাধিক বেগ থাকিতে পারে। যেমন, কোন প্রবহমান নদীতে যখন দাঁড়ের সাহায্যে একটি নৌকা চলিতে থাকে, তখন ঐ নৌকার যুগপৎ দুইটি বেগ থাকে—একটি নদীর স্রোতের বেগ এবং অপরটি দাঁড়ের বেগ। এই দুইটি বেগের সমন্বয়ে নৌকাটি একটি নির্দিষ্ট বেগে চলিতে থাকে। এই নির্দিষ্ট বেগকে স্রোতের বেগ ও দাঁড়ের বেগের **লব্ধি-বেগ (Resultant velocity)** বা কেবল লব্ধি বলা হয়; এবং স্রোতের বেগ ও দাঁড়ের বেগের প্রত্যেকটিকে ঐ লব্ধি-বেগের **উপাংশ (Component)** বলা হয়।

2-2. বেগের সামান্তরিক সূত্র (Parallelogram Law of Velocities) :

যদি একটি কণার যুগপৎ দুইটি বেগ থাকে, যাহাদের মান ও দিক্ একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা নির্দেশিত, তবে ঐ বেগদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক্ ঐ বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা নির্দেশিত হইবে।



মনে করি, কোন মুহূর্তে একটি কণার দুইটি বেগ u ফু./সে. এবং v ফু./সে. আছে, যাহারা মানে ও দিকে $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা সূচিত, যেখানে $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$, OACB সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু। O-বিন্দুস্থ কণাটির যদি কেবলমাত্র u ফু./সে. বেগ থাকিত, তবে উহা এক সেকেণ্ডে O হইতে A তে আসিত; কিন্তু কণাটির যুগপৎ দুইটি বেগ থাকায় u ফু./সে. বেগে O হইতে A এর দিকে $\overline{OA}$ বরাবর অগ্রসর হইবার প্রতি মুহূর্তে উহা v ফু./সে. বেগেও $\overline{OB}$ এর সমান্তরালে অগ্রসর হইতে থাকিবে; অর্থাৎ, $\overline{OA}$ সর্বদা উহার সমান্তরাল থাকিয়া O হইতে B এর দিকে

অগ্রসর হইবে। তাহা হইলে, 1 সেকেণ্ড পরে কণাটি u ফু./সে. বেগের জন্য $\overline{OA}$ এর শেষ প্রান্তে আসার মুহূর্তে $\overline{OA}$ এর অবস্থান $\overline{BC}$ হইবে। সুতরাং, 1 সেকেণ্ড পরে কণাটি C-এতে আসিবে, যাহা $\overline{OC}$ কর্ণের অপর প্রান্তবিন্দু।

এখন মনে করি, বেগদ্বয় যুগপৎ সক্রিয় হওয়ার $1/n$ সেকেণ্ড পরে v ফু./সে. বেগের জন্য $\overline{OA}$ এর অবস্থান $\overline{LM}$ যেখানে $\overline{LM} \| \overline{OA}$; $\overline{OL} = \frac{1}{n}.\overline{OB}$; তখন, u ফু./সে. বেগের জন্য কণাটি $\overrightarrow{LM}$ বরাবর $\frac{1}{n}\cdot\overline{OA}$ দৈর্ঘ্যের দূরত্ব অতিক্রম করিবে।

মনে করি, $\overline{LM}$ এবং $\overline{OC}$ এর ছেদবিন্দু K. যেহেতু, $\overline{LK} \| \overline{BC}$,

$$\therefore \quad \overline{LK}/\overline{BC} = \overline{OL}/\overline{OB} = 1/n.$$

সুতরাং, $\overline{LK} = \frac{1}{n}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{n}\cdot\overline{OA}.$

অতএব, বেগদ্বয় যুগপৎ সক্রিয় হওয়ার $1/n$ সেকেণ্ড সময় পরে, কণাটি $\overline{OC}$ এর উপর K বিন্দুতে আসিবে, এবং তাহা n এর যে কোন মানের জন্য সত্য। সুতরাং $\overrightarrow{OC}$, u ফু./সে এবং v ফু./সে. বেগদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক্ নির্দেশ করিবে।

দ্রষ্টব্য : $\overline{OA} = u$; $\overline{OB} = v$; $\overline{OC} = w$ হইলে, u এবং v বেগদ্বয়ের লব্ধির মান w হইবে ; এবং ইহার দিক্ O হইতে C এর দিকে হইবে।

2-3. একটি কণার উপর যুগপৎ ক্রিয়াশীল দুইটি নির্দ্দিষ্ট বেগের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয়।

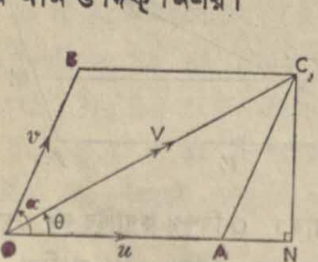


Fig. (a)

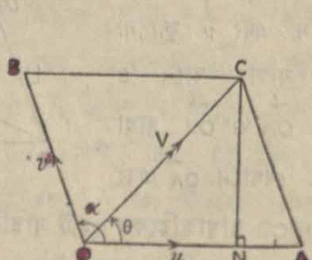


Fig. (b)

মনে করি, O বিন্দুস্থ কণাটির উপর যুগপৎ দুইটি বেগ $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ সক্রিয়, যেখানে $\overline{OA} = u$; $\overline{OB} = v$, **(in absolute units)**, এবং $\angle AOB = \alpha$.

এখন, OACB সামন্তরিক সম্পূর্ণ করিলাম এবং $\overline{OC}$ অঙ্কন করিলাম। তাহা হইলে, "বেগের সামান্তরিক সূত্র" অনুসারে, $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{OC}$ হইবে। মনে করি, নির্ধারিত এককে $\overline{OC}=V$ এবং $\angle AOC=\theta$. বর্ধিত $\overline{OA}$ অথবা $\overline{OA}$ এর উপর $\overline{CN}$ লম্ব অঙ্কন করিলাম।

$\overline{AC}$ এবং $\overline{OB}$ সর্বসম ও সমান্তরাল বলিয়া, $\overline{AC}=v$, ($\because$ $\overline{OB}=v$).

এখন, $0°<\alpha<90°$ হইলে,

$\overline{AN}=\overline{AC}.\cos N\hat{A}C=v\cos\alpha$, [Fig. (a)] ;

$\overline{CN}=\overline{AC}.\sin N\hat{A}C=v\sin\alpha$, [Fig. (a)].

আবার, $90°<\alpha<180°$ হইলে,

$$\overline{AN}=\overline{AC}.\cos N\hat{A}C=v\cos(\pi-\alpha)=-v\cos\alpha, \text{ [Fig. (b)] ;}$$

$$\overline{CN}=\overline{AC}.\sin N\hat{A}C=v\sin(\pi-\alpha)=v\sin\alpha, \text{ [Fig. (b)].}$$

তখন, ONC সমকোণী ত্রিভুজ হইতে পাই,

$$\begin{aligned} V^2 &= \overline{OC}^2=\overline{ON}^2+\overline{CN}^2 \\ &= (\overline{OA}+\overline{AN})^2+\overline{CN}^2, \text{ [Fig. (a)]} \\ &= (u+v\cos\alpha)^2+(v\sin\alpha)^2 \\ &= u^2+v^2+2uv\cos\alpha. \end{aligned}$$

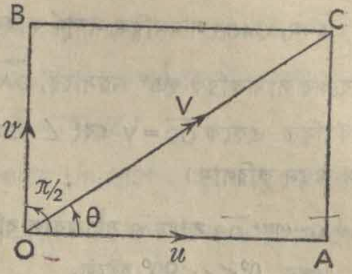
আবার,
$$\begin{aligned} V^2 &= \overline{OC}^2=\overline{ON}^2+\overline{CN}^2 \\ &= (\overline{OA}-\overline{AN})^2+\overline{CN}^2, \text{ [Fig. (b)]} \\ &= (u+v\cos\alpha)^2+(v\sin\alpha)^2 \\ &= u^2+v^2+2uv\cos\alpha. \end{aligned}$$

সুতরাং, উভয় ক্ষেত্রে,

$$\mathbf{V}=\sqrt{(\mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2+2\mathbf{uv}\cos\alpha)}\ ; \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $\tan\theta=\overline{CN}/\overline{ON}=\dfrac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}$;

অর্থাৎ,
$$\theta=\tan^{-1}\frac{\mathbf{v}\sin\alpha}{\mathbf{u}+\mathbf{v}\cos\alpha}. \quad \cdots \quad (2)$$

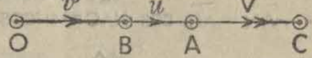


দ্রষ্টব্য 1. $\alpha=\pi/2$ হইলে,

$$V=\sqrt{(u^2+v^2)};$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{v}{u}.$$

দ্রষ্টব্য 2. $\alpha=0$ হইলে,



$$V=u+v.$$

দ্রষ্টব্য 3. $\alpha=\pi$ হইলে,

$$V=u-v, \ (u>v)$$



দ্রষ্টব্য 4. $v=u$ হইলে,

$$V=\sqrt{(u^2+u^2+2u^2\cos\alpha)}=u\sqrt{2}\sqrt{(1+\cos\alpha)}$$

$$=u\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}=2u\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{u\sin\alpha}{u+u\cos\alpha}\right)=\tan^{-1}\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\tan^{-1}\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha}{2}.$$

অর্থাৎ, $\mathbf{v}=\mathbf{u}$ হইলে, $V=2\mathbf{u}\cos\frac{\alpha}{2}$ এবং $\theta=\frac{\alpha}{2}$.

মন্তব্য 1. **(a)** u এবং v প্রদত্ত হইলে, তাহাদের লব্ধির মান বৃহত্তম হইবে, যখন $\cos\alpha$ এর মান বৃহত্তম হইবে, অর্থাৎ, $\cos\alpha=1$; বা, $\alpha=0$; এবং লব্ধির **বৃহত্তম** মান হইবে: $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

(b) u এবং v প্রদত্ত হইলে, তাহাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতম হইবে, যখন $\cos\alpha$ এর মান ক্ষুদ্রতম হইবে, অর্থাৎ, $\cos\alpha=-1$ বা, $\alpha=\pi$; এবং লব্ধির **ক্ষুদ্রতম** মান হইবে: $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ যদি $\mathbf{u}>\mathbf{v}$; অথবা, $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ যদি $\mathbf{v}>\mathbf{u}$.

মন্তব্য 2. u, v, α প্রদত্ত হইলে, এবং $u > v$ থাকিলে, u এবং v এর লব্ধির দিক্ u এর দিকের নিকটতর হইবে।

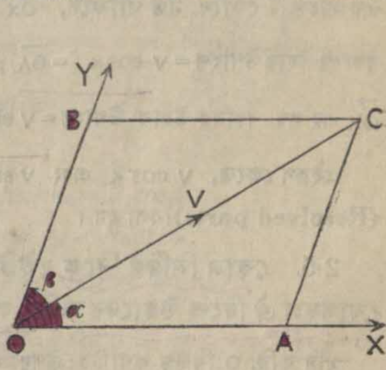
মন্তব্য 3. $v = u$ এবং $\alpha = 120°$ হইলে $V = u$; অর্থাৎ, u এবং u এর লব্ধি u হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

একটি কণার উপর যুগপৎ $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots, u_n$ বেগ সমূহ ক্রিয়াশীল হইলে, পূর্ব নিয়মে u_1 এবং u_2 এর লব্ধি V_1 ; V_1 এবং u_3 এর লব্ধি V_2 ; ইত্যাদি এবং এই ভাবে অগ্রসর হইয়া সর্বশেষে V_{n-2} এবং u_n এর লব্ধি V_{n-1} নির্ণয় করা যাইবে।

2-4. একটি প্রদত্ত বেগকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ :

মনে করি, প্রদত্ত বেগ $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা সূচিত, যেখানে $\overline{OC} = V$. $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ বরাবর উহার উপাংশ নির্ণয় করিতে হইবে, [$\angle XOY > 0°$, $< 180°$ এবং $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$ $\overline{OC}$ এর বিপরীত পার্শ্বে]। মনে করি, $\angle XOC = \alpha$ এবং $\angle YOC = \beta$. OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি, যাহার একটি কর্ণ $\overline{OC}$; A, $\overrightarrow{OX}$ এর, এবং B, $\overrightarrow{OY}$ এর উপরিস্থ। মনে করি, $\overline{OA} = u$ এবং $\overline{OB} = v$. তাহা হইলে, "বেগের সামান্তরিক সূত্র" অনুসারে, $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{OC}$; অর্থাৎ, u এবং v এর লব্ধি V ; এবং V এর উপাংশ $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ বরাবর যথাক্রমে u এবং v হইবে।



OACB একটি সামান্তরিক বলিয়া, $\overline{AC} = \overline{OB} = v$; $\angle ACO = \angle BOC = \beta$; $\angle OAC = \pi - (\alpha + \beta)$. সুতরাং, $\triangle OAC$ হইতে পাই,

$$\frac{u}{\sin \beta} = \frac{v}{\sin \alpha} = \frac{V}{\sin (\pi - \alpha - \beta)} ;$$

অর্থাৎ,
$$u = \frac{V \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} ; \qquad v = \frac{V \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

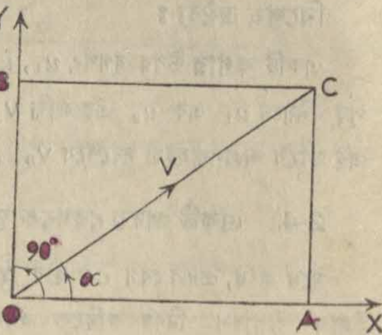
α এবং β এর বিভিন্ন মানের জন্য নির্ণেয় উপাংশ u এবং v এর মানও বিভিন্ন হইবে। সুতরাং, একটি প্রদত্ত বেগকে অসংখ্য উপায়ে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করা যাইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

$\alpha+\beta=90^\circ$ হইলে,

$\overline{OA}=u=V\cos\alpha$;

$\overline{OB}=v=V\sin\alpha$.

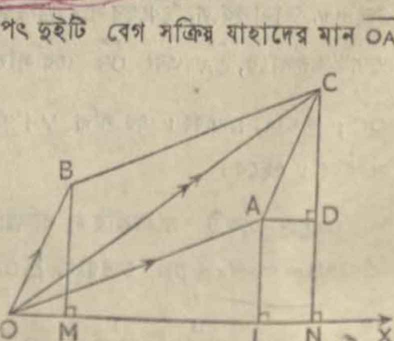


সুতরাং, প্রদত্ত বেগ $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা সূচিত হইলে, যেখানে $\overline{OC}=V$ এবং উহা $\overrightarrow{OX}$ এর সহিত α কোণে নত থাকিলে, $\overrightarrow{OX}$ বরাবর উহার উপাংশ $=V\cos\alpha\ (=\overline{OA})$; $\overrightarrow{OX}$ এর লম্ব বরাবর উহার উপাংশ $=V\sin\alpha\ (=\overline{OB})$.

এইরূপ ক্ষেত্রে, $V\cos\alpha$ এবং $V\sin\alpha$ কে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ বরাবর **লব্ধ উপাংশ (Resolved parts)** বলা হয়।

2·5. কোন নির্দিষ্ট দিকে দুইটি বেগের লব্ধ উপাংশের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ দিকে উহাদের লব্ধির লব্ধ উপাংশের সমান।

মান করি, O বিন্দুস্থ কণাটির উপর যুগপৎ দুইটি বেগ সক্রিয় যাহাদের মান $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ এবং লব্ধি $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা সূচিত, যেখানে $\overline{OC}$, সামান্তরিক OACB এর একটি কর্ণ। মনে করি, $\overrightarrow{OX}$ একটি প্রদত্ত দিক্। $\overrightarrow{OX}$ এর উপর $\overline{AL}, \overline{BM}$ এবং $\overline{CN}$ লম্ব, এবং পরে $\overline{CN}$ এর উপরে $\overline{AD}$ লম্ব টানিলাম।

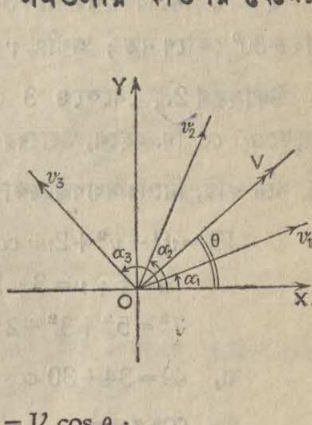


এখন, $\overrightarrow{OX}$ এর দিকে $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ এবং $\overline{OC}$ এর লম্ব উপাংশ যথাক্রমে, $\overline{OL}$, $\overline{OM}$ এবং ON.

যেহেতু, $\overline{OL}+\overline{OM}=\overline{OL}+\overline{AD}=\overline{OL}+\overline{LN}=\overline{ON}$, সুতরাং, $\overrightarrow{OX}$ এর দিকে $\overline{OC}$ এবং $\overline{OB}$ এর লম্ব উপাংশদ্বয়ের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ একই দিকে উহাদের লব্ধির লম্ব উপাংশের সমান।

দ্রষ্টব্য : এইভাবে দেখানো যাইবে : "কোন নির্দ্দিষ্ট দিকে কতিপয় সমতলীয় বেগের লম্ব উপাংশের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ একই দিকে তাহাদের লব্ধির লম্ব উপাংশের সমান।"

2-6. একটি কণার উপর যুগপৎ সক্রিয় সমতলীয় কতিপয় বেগের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় :



মনে করি, O বিন্দুস্থ কণাটির উপর যুগপৎ $v_1, v_2, \cdots\cdots v_n$ সমতলীয় বেগসমূহ সক্রিয়, যাহাদের দিক্ ঐ সমতলে $\overrightarrow{OX}$-এর সহিত যথাক্রমে $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$ কোণে নত। মনে করি, $\overrightarrow{OX}$ এর উপর $\overrightarrow{OY}$ লম্ব, এবং প্রদত্ত বেগসমূহের লব্ধির মান V যাহার দিক $\overrightarrow{OX}$ এর সহিত θ কোণে নত। তাহা হইলে,

$$v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2 + \cdots + v_n \cos\alpha_n = V\cos\theta\ ;$$

$$v_1 \sin\alpha_1 + v_2 \sin\alpha_2 + \cdots + v_n \sin\alpha_n = V\sin\theta.$$

$$\therefore\ V = \sqrt{\{(\sum v_1 \cos\alpha_1)^2 + (\sum v_1 \sin\alpha_1)^2\}}\ ;$$

এবং $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sum v_1 \sin\alpha_1}{\sum v_1 \cos\alpha_1}\right).$

2-7. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. একটি কণার উপর যুগপৎ ঘণ্টায় 3 কিলোমিটার এবং ঘণ্টায় 3/2 কিলোমিটার বেগ 120° কোণে সক্রিয়। উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

মনে করি, উহাদের লব্ধি ঘণ্টায় V কিলোমিটার এবং উহা বৃহত্তর বেগের দিকের সহিত θ কোণে নত। তাহা হইলে,

$V^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$ এবং $\tan\theta = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$ সূত্রে,

$$u = 3\ ;\ v = 3/2\ ;\ \alpha = 120°.$$

$$\therefore \quad V^2 = 3^2 + (3/2)^2 + 2 \times 3 \times \tfrac{3}{2} \times \cos 120^\circ$$

$$= 9 + 9/4 + 9 \times (-1/2) = 27/4\ ;$$

অর্থাৎ, $V = 3\sqrt{3}/2$;

$$\tan\theta = \frac{1\cdot5 \times \sin 120^\circ}{3 + 1\cdot5 \times \cos 120^\circ} = \frac{(3\sqrt{3})/4}{3 - 3/4} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore \quad \theta = 30^\circ.$

সুতরাং, নির্ণেয় লব্ধির মান $3\sqrt{3}/2$ কিলোমিটার/ঘণ্টা এবং উহা u এর দিকের সহিত 30° কোণে নত ; অর্থাৎ, v এর দিকের সহিত 90° কোণে নত।

উদাহরণ 2. সেকেণ্ডে 3 সে. মি. এবং সেকেণ্ডে 5 সে. মি. বেগদ্বয়ের লব্ধি সেকেণ্ডে 7 সে. মি. হইলে, উহাদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ কত ?

মনে করি, নির্ণেয় মধ্যবর্তী কোণ α ; তাহা হইলে,

$V^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$ সূত্রে,

$u = 5\ ;\ v = 3\ ;\ V = 7.$

$7^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \times 5 \times 3 \times \cos\alpha\ ;$

বা, $49 = 34 + 30\cos\alpha\ ;$

বা, $\cos\alpha = \frac{1}{2}.\quad \therefore\ \alpha = 60^\circ.$

সুতরাং, নির্ণেয় কোণ : 60°.

উদাহরণ 3. একটি কণার উপর যুগপৎ 7 সে. মি./সে., 8 সে. মি./সে. এবং 13 সে. মি./সে. বিভিন্ন দিকে সক্রিয় থাকিয়া উহাকে স্থিরাবস্থায় রাখিলে, ক্ষুদ্রতর বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ কত ?

মনে করি, 7 সে.মি /সে. এবং 8 সে. মি./সে. বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ θ যেহেতু কণাটি স্থিরাবস্থায় থাকিবে, সুতরাং যে কোন দুইটি বেগের লব্ধি তৃতীয়টির সমান ও বিপরীতমুখী হইবে। তাহা হইলে,

$13^2 = 8^2 + 7^2 + 2 \times 8 \times 7 \times \cos\theta\ ;$

বা, $169 = 113 + 112\cos\theta\ ;$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.\quad \therefore\ \theta = 60^\circ.$

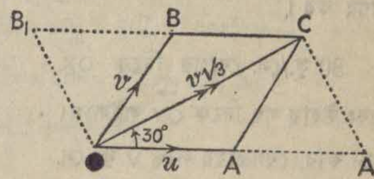
$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : 60°.

উদাহরণ 4. একটি বিন্দুতে যুগপৎ ক্রিয়াশীল দুইটি বেগ u কি. মি./ঘ. এবং v কি. মি./ঘ. এর লব্ধি $\sqrt{3}\, v$ কি. মি./ঘ. এবং উহা u কি. মি./ঘ. বেগের দিকের সহিত 30° কোণে নত। দেখাও যে, হয় $u=v$, অথবা, $u=2v$.

মনে করি, $\overline{OA}=u$; $\overline{OB}=v$; $\overline{OC}=\sqrt{3}v$; যেখানে OACB একটি সামান্তরিক ; এবং $m\angle AOC=30^\circ$.

সুতরাং, $\overline{AC}=\overline{OB}=v$.

এখন, ত্রিকোণমিতি হইতে,



$$\overline{CA}^2=\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-2.\overline{OA}.\overline{OC}.\cos 30^\circ$$

$$\therefore\ v^2=u^2+3v^2-2.u.\sqrt{3}.v.\sqrt{3}/2\ ;$$

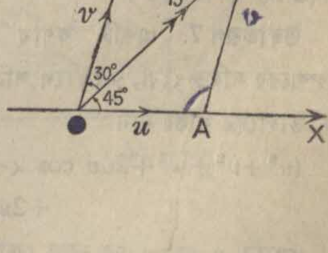
বা, $u^2-3uv+2v^2=0$;

বা, $(u-v)(u-2v)=0$.

$\therefore$ হয় $u=v$, অথবা, $u=2v$

উদাহরণ 5. ঘণ্টায় 15 কি. মি. বেগকে এমন দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ কর, যেন উহারা প্রদত্ত বেগের সহিত 45° এবং 30° কোণে নত থাকে।

মনে করি, $\overrightarrow{OC}$ প্রদত্ত বেগকে সূচিত করে। তাহা হইলে, $\overline{OC}=15$ কি. মি. উহার উপাংশদ্বয়, u কি. মি./ঘ. এবং v কি. মি./ঘ., ঐ প্রদত্ত বেগের সহিত যথাক্রমে 45° এবং 30° কোণ উৎপন্ন করে।



মনে করি, $\overline{OA}=u$; $\overline{OB}=v$. এখন, OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি। তাহা হইলে,

$\overline{AC}=v$; $m\angle ACO=30^\circ$;

$m\angle OAC=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)$;

এখন, $\triangle OAC$ হইতে,

$$\frac{u}{\sin 30^\circ}=\frac{v}{\sin 45^\circ}=\frac{15}{\sin(180^\circ-30^\circ-45^\circ)}.$$

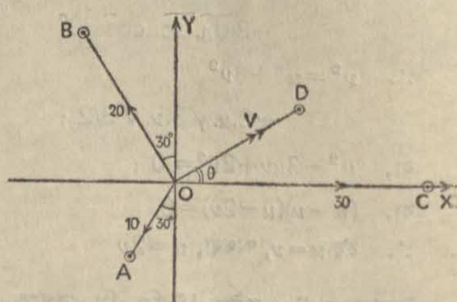
$$\therefore \quad u=\frac{15 \sin 30^\circ}{\sin (30^\circ+45^\circ)}=\frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=15(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2\,;$$

$$v=\frac{15 \sin 45^\circ}{\sin (30^\circ+45^\circ)}=\frac{15\times 2}{\sqrt{3}+1}=15(\sqrt{3}-1)$$

সুতরাং, নির্ণেয় উপাংশদ্বয় : ঘণ্টায় $15(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$ কি. মি., এবং ঘণ্টায় $15(\sqrt{3}-1)$ কি. মি.।

উদাহরণ 6. একটি বিন্দুর উপর একই সমতলে তিনটি বেগ 10 ফু./সে., 20 ফু./সে. ও 30 ফু./সে. পরস্পরের সহিত 120° কোণে ক্রিয়াশীল। উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

30 ফু./সে. বেগের দিকে $\overrightarrow{OX}$ এবং উহার লম্ব দিকে $\overrightarrow{OY}$ লইলাম। মনে করি, বেগত্রয়ের লব্ধি V ফু./সে. এবং উহা 30 ফু./সে. বেগের দিকের সহিত, অর্থাৎ $\overrightarrow{OX}$ এর সহিত, θ কোণে নত। তাহা হইলে,



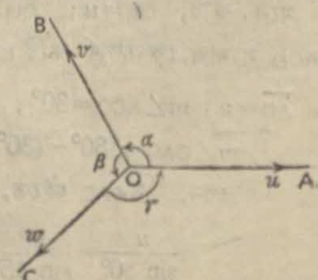
$$V \cos \theta=30-20 \sin 30^\circ-10 \sin 30^\circ=15\,;$$
$$V \sin \theta=0+20 \cos 30^\circ-10 \cos 30^\circ=5\sqrt{3}.$$
$$\therefore \quad V^2=(15)^2+(5\sqrt{3})^2=(10\sqrt{3})^2.$$
$$\therefore \quad V=10\sqrt{3}\,; \quad \tan \theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30^\circ. \qquad \therefore \quad \theta=30^\circ.$$

সুতরাং, নির্ণেয় লব্ধি : $10\sqrt{3}$ ফু./সে. এবং উহা 30 ফু./সে. বেগের দিকের সহিত 30° কোণে নত।

উদাহরণ 7. একটি কণার উপর যুগপৎ সমতলীয় তিনটি বেগ u, v, w, পরস্পরের সহিত α, β, γ কোণে সক্রিয়। দেখাও যে, তাহাদের লব্ধির মান

$$(u^2+v^2+w^2+2uv \cos \alpha+2vw \cos \beta +2wu \cos \gamma)^{1/2}.$$

এখানে, u এবং v এর মধ্যে কোণ α ; v এবং w এর মধ্যে কোণ β ; w এবং u এর মধ্যে কোণ γ আছে।



তাহা হইলে, u, v, w এর দিক্ u এর দিকের সহিত যথাক্রমে $0°$, α, $2\pi-\gamma$ কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং, নির্ণেয় লব্ধির মান V হইলে,

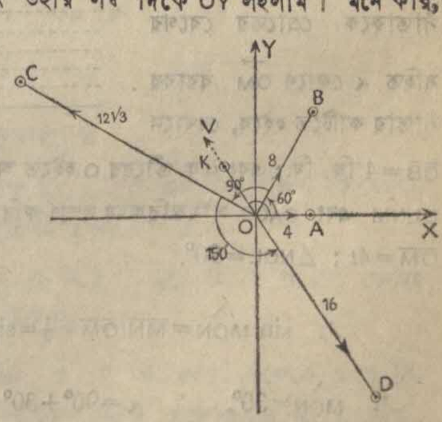
$$V^2=\{u \cos 0°+v \cos \alpha+w \cos (2\pi-\gamma)\}^2 + \{u \sin 0°+v \sin \alpha+w \sin (2\pi-\gamma)\}^2$$
$$=(u+v \cos \alpha+w \cos \gamma)^2+(v \sin \alpha-w \sin \gamma)^2$$
$$=u^2+v^2+w^2+2uv \cos \alpha+2wu \cos \gamma + 2vw(\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma)$$
$$=u^2+v^2+w^2+2uv \cos \alpha+2wu \cos \gamma+2vw \cos(\alpha+\gamma)$$
$$=u^2+v^2+w^2+2uv \cos \alpha+2wu \cos \gamma+2vw \cos \beta.$$
$$(\because \ \alpha+\beta+\gamma=2\pi).$$

$\therefore$ V = নির্ণেয় লব্ধির মান

$$=(u^2+v^2+w^2+2uv \cos\alpha+2vw \cos \beta+2wu \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}.$$

উদাহরণ 8. একটি কণার উপর যুগপৎ একই সমতলে 4 ফু./সে., 8 ফু./সে., $12\sqrt{3}$ ফু./সে. এবং 16 ফু./সে. বেগ ক্রিয়াশীল। প্রথম ও দ্বিতীয়ের মধ্যবর্তী কোণ 60° ; দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90°, এবং তৃতীয় ও চতুর্থের মধ্যবর্তী কোণ 150° হইলে, উহাদের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

4 ফু./সে. বেগের দিকে $\overrightarrow{OX}$ এবং উহার লম্ব দিকে $\overrightarrow{OY}$ লইলাম। মনে করি, নির্ণেয় লব্ধি V ফু./সে. এবং উহা 4 ফু./সে. বেগের সহিত, অর্থাৎ, $\overrightarrow{OX}$ এর সহিত θ কোণে নত। তাহা হইলে, $V\cos \theta$ = প্রদত্ত বেগসমূহের $\overrightarrow{OX}$ বরাবর উপাংশের বীজগণিতীয় যোগফল



$$=4+8 \cos 60° + 12\sqrt{3} \cos 150°+16 \cos 300°$$
$$=4+8 \cos 60° - 12\sqrt{3} \cos 30°+16 \cos 60°$$
$$=4+8\times\tfrac{1}{2}-12\sqrt{3}\times \sqrt{3}/2+16\times\tfrac{1}{2}=-2 ;$$

$v \sin\theta$ = প্রদত্ত বেগসমূহের $\overrightarrow{OY}$ বরাবর উপাংশের বীজগণিতীয় যোগফল

$= 4 \sin 0° + 8 \sin 60° + 12\sqrt{3} \sin 150° + 16 \sin 300°$

$= 0 + 8 \sin 60° + 12\sqrt{3} \sin 30° - 16 \sin 60°$

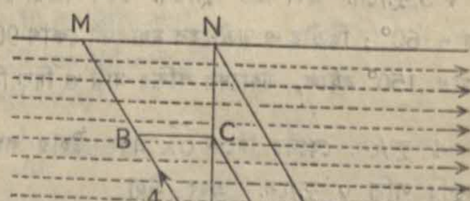
$= 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 12\sqrt{3} \times \frac{1}{2} - 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$

$\therefore\ v^2 = (-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4^2$; বা, $v = 4$;

এবং $\cos\theta = -\frac{1}{2}$; $\sin\theta = \sqrt{3}/2. \quad \therefore \quad \theta = 120°.$

সুতরাং, নির্ণেয় লব্ধির মান 4 ফু./সে. এবং উহা প্রথম বেগের দিকের সহিত 120° কোণে নত।

উদাহরণ 9. কোন নদীতে স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 2 কি. মি. থাকিলে, এক সাঁতারু ঘণ্টায় 4 কি. মি. বেগে সাঁতার কাটিয়া ঐ নদীর এক তীর হইতে অপর তীরে লম্বাভিমুখে পৌছিতে নদীর স্রোতের সহিত তাহাকে কি অভিমুখিতায় সাঁতার কাটিতে হইবে ?



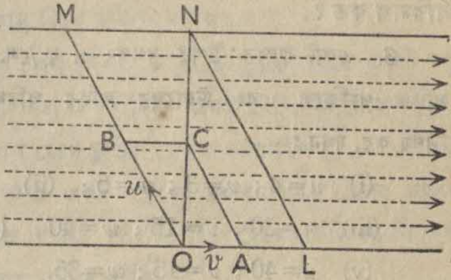
মনে করি, নদীর স্রোত : $\overrightarrow{OL}$ বরাবর ; $\overline{OA} = 2$ কি. মি.। সাঁতারুকে স্রোতের বেগের সহিত α কোণে $\overrightarrow{OM}$ বরাবর সাঁতার কাটিতে হইবে, যেখানে $\overline{OB} = 4$ কি. মি.; এবং এক তীরের O হইতে অপর তীরে t ঘণ্টায় N এতে পৌছাবে। OLNM এবং OACB সামন্তরিকদ্বয় সম্পূর্ণ করি। তাহা হইলে, $\overline{MN} = \overline{OL} = 2t$; $\overline{OM} = 4t$; $\angle NOL = 90°$.

$\therefore\ \sin M\hat{O}N = \overline{MN}/\overline{OM} = \frac{1}{2} = \sin 30°.$

$\therefore\ M\hat{O}N = 30°. \quad \therefore\ \alpha = 90° + 30° = 120°.$

সুতরাং, নির্ণেয় উত্তর : 120°.

উদাহরণ 10. নদীতে স্রোত থাকিলে, এক ব্যক্তি দাঁড় টানিয়া নদীর প্রস্থ বরাবর যে দূরত্ব t_1 সময়ে অতিক্রম করিতে পারে, সেই পরিমাণ দূরত্ব স্রোতের অনুকূলে t_2 সময়ে অতিক্রম করে। স্থির জলে দাঁড়ের বেগ u এবং স্রোতের বেগ v হইলে, দেখাও যে, যদি $u > v$ হয়, তবে, $t_1 : t_2 = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}$.



নদীর স্রোত $\overrightarrow{OL}$ বরাবর; $\overline{OA} = v$; $\overline{OB} = u$; OACB সামান্তরিকের $\overline{OC}$ একটি কর্ণ, যেখানে $\overrightarrow{OL}$ এর উপর $\overline{OC}$ লম্ব। তাহা হইলে, $\overline{OC} = \sqrt{u^2 - v^2}$.

মনে করি, ঐ ব্যক্তি t_1 সময়ে প্রস্থ বরাবর d দূরত্ব অতিক্রম করে। তাহা হইলে,

$$\sqrt{u^2 - v^2} \times t_1 = d. \qquad \cdots \qquad (1)$$

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $(u+v) \times t_2 = d. \qquad \cdots \qquad (2)$

সুতরাং, (1) এবং (2) হইতে,

$$\sqrt{u^2 - v^2} \times t_1 = (u+v) \times t_2 ;$$

$$\text{বা, } t_1 : t_2 = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}.$$

প্রশ্নমালা 2

1. একটি বিন্দুতে যুগপৎ সেকেণ্ডে $6\sqrt{2}$ ফুট এবং সেকেণ্ডে 6 ফুট বেগদ্বয় 45° কোণে সক্রিয় থাকিলে, উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

2. একটি কণার উপর যুগপৎ 5 সে. মি./সে. এবং 3 সে. মি./সে. বেগদ্বয় 60° কোণে ক্রিয়াশীল হইলে, উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

3. একটি বিন্দুতে যুগপৎ সেকেণ্ডে 16 সে. মি. এবং সেকেণ্ডে u সে. মি. বেগদ্বয় 90° কোণে সক্রিয় হওয়ায়, উহার লব্ধির পরিমাপ সেকেণ্ডে 65 সে. মি. হইল। u এর মান কত?

4. একই বিন্দুতে পরস্পর লম্বাভিমুখে সেকেণ্ডে 187 সে. মি. এবং সেকেণ্ডে 84 সে. মি. বেগদ্বয়ের লব্ধি নির্ণয় কর।

5. একটি বিন্দুতে যুগপৎ 45° কোণে সক্রিয় দুইটি বেগের লব্ধির মান $\sqrt{10}$ সে. মি./সে.। উহাদের একটির পরিমাপ $\sqrt{2}$ সে. মি./সে. হইলে, অপরটির পরিমাপ কত?

6. একটি কণার উপর যুগপৎ u ফু./সে. এবং v ফু./সে. বেগদ্বয় α কোণে সক্রিয় থাকিলে এবং উহাদের লব্ধির পরিমাপ w ফু./সে. হইলে, α এর মান নির্ণয় কর, যখন:

(i) $u=4$; $v=3$; $w=5$; (ii) $u=4$; $v=2$; $w=2\sqrt{7}$;

(iii) $u=30$; $v=15$; $w=40$; (iv) $u=30$; $v=15$; $w=45$;

(v) $u=40$; $v=15$; $w=35$.

7. একটি বিন্দুতে যুগপৎ সেকেণ্ডে a ফুট এবং সেকেণ্ডে $2a$ ফুট ক্রিয়াশীল বেগদ্বয়ের লব্ধি সেকেণ্ডে a ফুট হইলে, বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ কত?

8. একটি কণার উপর যুগপৎ দুইটি বেগ সেকেণ্ডে 20 সে. মি. এবং সেকেণ্ডে 10 সে. মি. α কোণে সক্রিয় থাকায় উহাদের লব্ধি সেকেণ্ডে $10\sqrt{3}$ সে. মি. হইল। α এর মান কত?

9. একটি বিন্দুতে যুগপৎ মিনিটে $5\sqrt{2}$ মিটার এবং মিনিটে 5 মিটার বেগদ্বয় α কোণে সক্রিয়। তাহাদের লব্ধির মান মিনিটে 5 মিটার হইলে, α এর মান কত?

10. একটি বিন্দুতে যুগপৎ ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার দক্ষিণাভিমুখে এবং ঘণ্টায় $3\sqrt{2}$ কিলোমিটার উত্তর-পূর্ব্বাভিমুখে ক্রিয়াশীল হইলে, তাহাদের লব্ধি কত?

11. একটি কণার উপর যুগপৎ তিনটি বেগ 3 সে. মি./সে., 7 সে. মি./সে. এবং 8 সে. মি./সে. ক্রিয়াশীল হইয়া উহাকে স্থিরাবস্থায় রাখিলে, বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বেগের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ কত?

12. 50 ফু./সে., 25 ফু./সে. এবং 21 ফু./সে. তিনটি বেগ যুগপৎ একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল হইলে উহা কি স্থিরাবস্থায় থাকিতে পারে?

13. একটি বিন্দুতে সক্রিয় $8\sqrt{3}$ সে. মি./সে. বেগকে এইরূপ দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ কর, যেন উহারা প্রদত্ত বেগের দিকের সহিত উহার বিপরীত পার্শ্বে যথাক্রমে 30° এবং 60° কোণে নত থাকে।

14. মাঠের উইকেট লাইন বরাবর সেকেণ্ডে 90 ফুট বেগে ধাবমান একটি ক্রিকেট বলে কিরূপ বেগ প্রয়োগ করিলে উহা পূর্ব্ব পথের লম্বাভিমুখে সেকেণ্ডে 120 ফুট বেগে যাইতে থাকিবে ?

15. মাঠের পূর্ব্বদিক্ হইতে সেকেণ্ডে $40\sqrt{3}$ ফুট্ বেগে একটি ফুটবল আসিতে দেখিয়া একজন খেলোয়াড় সোজা উত্তর দিকে সেকেণ্ডে 40 ফুট বেগে পা দিয়া আঘাত করিল। বলটি কত বেগে কোন্ দিকে যাইতে লাগিল ?

16. পূর্ব্বদিকে ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে একটি চলন্ত ট্রামগাড়ী হইতে একটি বল এমনভাবে ছুড়িয়া দেওয়া হইল যে, উহা উত্তর দিকে একই বেগে চলিতে লাগিল। বলটিকে কোন্‌দিকে এবং কত পরিমাপ বেগে ছুড়িয়া দেওয়া হইয়াছিল ?

17. ঘণ্টায় 24 কি. মি. বেগে চলন্ত একটি ট্রেণের একজন যাত্রী ট্রেণের গতির দিকের সহিত $120°$ কোণে নত দিকে ঘণ্টায় 48 কি. মি. বেগে একটি বল নিক্ষেপ করিল। বলটি কত বেগে কোন্ দিকে যাইতে লাগিল ?

18. একটি বিন্দুতে যুগপৎ দুইটি বেগ $3u$ এবং $2u$ সক্রিয়, এবং উহাদের লব্ধির পরিমাপ w ; প্রথমটিকে দ্বিগুণ করিলে তাহাদের লব্ধির পরিমাপও দ্বিগুণ হয়। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্ত্তী কোণের পরিমাপ কত ?

19. একটি বিন্দুতে দুইটি বেগ u_1 এবং u_2 পরস্পরের সহিত এমন একটি কোণে সক্রিয়, যে তাহাদের লব্ধির পরিমাপ u_1 ; u_1 পরিমাপ বেগকে দ্বিগুণ করিলে, প্রমাণ কর যে, নূতন লব্ধিটি u_2 এর লম্বদিকে সক্রিয় হইবে। [**W. B. H. S. 1961**]

20. "একটি বিন্দুতে α কোণে সক্রিয় দুইটি বেগ u এবং v এর লব্ধি V ; $(u, \hat{}V)=\theta$. uকে V পরিমাণ বাড়াইলে, কিন্তু v কে অপরিবর্ত্তিত রাখিলে, নূতন লব্ধিটি u পরিমাপ বেগের দিকের সহিত $\theta/2$ কোণ উৎপন্ন করিবে"—তাহা দেখাও।

21. একটি বিন্দুতে দুইটি ভিন্ন দিকে যুগপৎ দুইটি বেগ u এবং v সক্রিয় থাকিলে, তাহাদের লব্ধি w হয়। দ্বিতীয় বেগটিকে দ্বিগুণ করিলে, তাহাদের লব্ধিও দ্বিগুণ হইত, অথবা দ্বিতীয় বেগটি যদি বিপরীত দিকে ক্রিয়া করিত, তাহা হইলেও লব্ধি দ্বিগুণ হইত। দেখাও যে,

$$u : v : w = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}.$$

22. একটি বিন্দুর উপর যুগপৎ তিনটি বেগ ঘণ্টায় 3 মাইল, ঘণ্টায় 2 মাইল এবং ঘণ্টায় 4 মাইল যথাক্রমে পূর্ব্বেদিকে, উত্তর-পূর্ব্বদিকে ও উত্তর-পশ্চিমদিকে সক্রিয়। তহাদের লব্ধি বাহির কর।

23. একটি বিন্দুর উপর যুগপৎ চারটি বেগ 10 সে. মি./ সে., 6 সে. মি./সে., 8 সে. মি./সে. ও 5 সে. মি./সে. যথাক্রমে পূর্ব্ব, পশ্চিম, উত্তর ও দক্ষিণ দিকে সক্রিয় থাকিলে, উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

24. একটি বিন্দুর উপর উত্তরদিকে সেকেণ্ডে 15 ফুট; পূর্ব্বদিকের উত্তরে 30° কোণে সেকেণ্ডে 18 ফুট; দক্ষিণ দিকের পশ্চিমে 30° কোণে সেকেণ্ডে $18\sqrt{3}$ ফুট এবং পশ্চিম দিকে সেকেণ্ডে 4 ফুট বেগ যুগপৎ সক্রিয় হইলে, উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

25. একটি বিন্দুর উপর যুগপৎ একই মানবিশিষ্ট পাঁচটি বেগ সক্রিয়, যেখানে প্রত্যেকটি পূর্ববর্তী বেগের দিকের সহিত 30° কোণে নত এবং প্রথম ও শেষ বেগদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণ 120°; উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর। **[W. B. H. S. 1965]**

26. একটি সুষম ষড়্‌ভুজের একটি কৌণিক বিন্দুতে যুগপৎ পাঁচটি বেগ 2 সে. মি./সে., $\sqrt{3}$ সে. মি./সে., 5 সে. মি./সে., $\sqrt{3}$ সে. মি./সে. এবং 2 সে. মি./সে. যথাক্রমে পরপর অপর কৌণিক বিন্দুগুলির দিকে সক্রিয়। উহাদের লব্ধি বাহির কর।

27. একটি স্রোতোবিহীন নদীতে এক ব্যক্তি যখন ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে পূর্বদিকে একটি নৌকা চালাইতেছে, ঠিক সেই সময় ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে উত্তর দিকে প্রবাহিত বাতাস নৌকার পালে লাগিতেছে। নৌকাটির বেগ কিরূপ হইবে?

28. মিনিটে 48 গজ বেগে বহমান একটি নদীতে এক সাঁতারু স্রোতের দিকের লম্বাভিমুখে মিনিটে 64 গজ বেগে সাঁতার কাটিতেছে। সাঁতারুর লব্ধিবেগ কত? নদীর প্রস্থ 200 গজ হইলে, সাঁতারু অপর পারে বিপরীত বিন্দু হইতে কত গজ নীচে পৌছিবে এবং ইহাতে তাহার সময় কত লাগিবে?

29. 990 ফুট চওড়া একটি নদী ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে বহিতেছে। এক ব্যক্তি উহার এক তীর হইতে অপর তীরের দিকে লম্বভাবে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে নৌকা চালাইতে থাকিলে, যাত্রাস্থানের সোজা অপর পার হইতে কতদূরে সে পৌছিবে? ইহাতে তাহার কত সময় লাগিবে?

30. স্রোত না থাকিলে এক ব্যক্তি সমবেগে সাঁতার কাটিয়া 100 গজ প্রশস্ত একটি নদী 4 মিনিটে সোজাসুজি পার হইতে পারে: কিন্তু স্রোত থাকিলে সোজাসুজিভাবে উহা পার হইতে তাহার 5 মিনিট সময় লাগে। স্রোতের বেগ কত? **[W.B.H.S. 1961]**

31. 440 ফুট প্রস্থবিশিষ্ট একটি নদী ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে বহিতেছে। এক ব্যক্তি যদি ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে তাহার নৌকাটি চালাইতে পারে, তবে সোজাসুজি

নদী পার হইবার জন্য তাহাকে নৌকার মুখ কোন্ দিকে রাখিতে হইবে? এইভাবে কত সময়ে সে নদী পার হইতে পারিবে? [W.B.H.S. 1960 ; 1969]

32. একটি নদী সেকেণ্ডে 2 ফুট বেগে বহিতেছে। স্রোতের সহিত লম্বভাবে নদীটি পার হইতে হইলে, এক সাঁতারুকে সেকেণ্ডে 3 ফুট বেগে কোন্ দিকে সাঁতার কাটিতে হইবে? নদীটি যদি 100 ফুট চওড়া হয়, তবে উহা পার হইতে তাহার কত সময় লাগিবে? [W.B.S.F. 1954]

33. ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে বহমান 176 গজ চওড়া একটি নদী একব্যক্তি ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে সাঁতার কাটিয়া উহার এক তীর হইতে অপর তীরে যাইতে চাহিল। নদীর স্রোতের দিকের সহিত কোন্ অভিমুখে সাঁতার কাটিলে সে অপর তীরে সর্বাপেক্ষা কম সময়ে পৌঁছিতে পারিবে? এইরূপ ক্ষেত্রে তাহার কত সময় লাগিবে এবং নদীর স্রোতের দিকে কতদূর সে যাইবে?

34. এক ব্যক্তি v বেগে তাহার নৌকা চালাইতে পারে। কোন নদীতে স্রোতের বেগ u হইলে, যেখানে $v>u$, নদীর একপার হইতে অপর পারে সোজাসুজি পৌঁছাইবার জন্য ঐ ব্যক্তিকে কোন্ দিকে নৌকা চালাইতে হইবে? কোন্ দিকে নৌকা চালাইলে, সব চেয়ে কম সময়ে ঐ ব্যক্তি নদী পার হইতে পারিবে? এই দুই ক্ষেত্রে সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর। (নদীর প্রশস্ততা $=a$).

[W. B. H. S. 1963]

35. স্রোত না থাকিলে, b প্রস্থবিশিষ্ট একটি নদী এক ব্যক্তি t সময়ে লম্বভাবে পার হইতে পারে; কিন্তু, স্রোত থাকিলে, ঐভাবে পার হইতে তাহার t' সময় লাগে, যেখানে $t'>t$. নদীর স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। [W. B. S. F. 1964]

36. একটি নদীতে স্রোতের অনুকূলে x দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রম করিতে এক এক ব্যক্তির t_1 সময় লাগে; কিন্তু স্রোতের প্রতিকূলে ঐ পথ যাইতে তাহার t_2 সময় লাগে। দেখাও যে, স্থির জলে ঐ ব্যক্তির বেগ $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$ এবং স্রোতের বেগ $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$.

37. u বেগে বহমান একটি নদী দুই ব্যক্তি যথাক্রমে v_1 এবং v_2 বেগে সাঁতার কাটিয়া পার হইল, যেখানে $u<v_1$. প্রথম ব্যক্তি (অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতম হওয়ার জন্য) উপযুক্ত অভিমুখে, এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি লঘিষ্ঠ সময়ে নদী পার হইল। উভয়েই সমান সময়ে নদীটি পার হইলে, দেখাও যে, $v_1^2-v_2^2=u^2$.

38. একটি কণার উপরে যুগপৎ, $2u$ এবং u, এই দুইটি বেগ সক্রিয় থাকাতে, উহাদের লব্ধি w হইল ; এব w ও $2u$ এর মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ θ. দেখাও যে, $\theta \ngtr 30°$.

Answers (প্রশ্নমালা 2)

1. $6\sqrt{5}$ ফু./সে. ; $6\sqrt{2}$ ফু./সে. এর সহিত $\tan^{-1}(\frac{1}{3})$ কোণে। **2.** 7 সে. মি./সে. ; 5 সে. মি./সে. এর সহিত $\cos^{-1}(\frac{13}{14})$ কোণে। **3.** 63 সে. মি./সে.। **4.** 205 সে. মি./সে. ; 187 সে. মি./সে. এর সহিত $\tan^{-1}(\frac{84}{187})$ কোণে। **5.** 2 সে. মি./সে.। **6.** (i) 90° ; (ii) 60° ; (iii) $\cos^{-1}(\frac{19}{36})$; (iv) 0° ; (v) 120°. **7.** 180°. **8.** 120°. **9.** 135°. **10.** 5 কি. মি /ঘ. ; দক্ষিণ হইতে পূর্বে $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ কোণে। **11.** 120°. **12.** স্থিরাবস্থায় রাখিতে পারে না। **13.** 12 সে.মি./সে. ; $4\sqrt{3}$ সে. মি./সে.। **14.** 150 ফু./সে., সম্মুখস্থ wicket line এর সঙ্গে $\tan^{-1}(\frac{4}{3})$ কোণে। **15.** 80 ফু./সে. ; পশ্চিম হইতে উত্তরে 30° কোণে। **16.** $10\sqrt{2}$ মা./ঘ. ; উত্তর-পশ্চিম কোণে। **17.** $24\sqrt{3}$ কি. মি./ঘ. ; ট্রেণের গতির দিকের সহিত 90° কোণে। **18.** 120°. **22.** $\sqrt{29-6\sqrt{2}}$ মা./ঘ. বা. 4·53 মা./ঘ. (প্রায়) ; পূর্ব হইতে উত্তরে $\tan^{-1}\frac{3}{7}(3\sqrt{2}+2) \simeq 69°33'20''$ কোণে। **23.** 5 সে. মি./সে. ; পূর্ব হইতে উত্তরে $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ কোণে। **24.** 5 ফু./সে. ; পশ্চিম হইতে দক্ষিণে $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ কোণে। **25.** $(2+\sqrt{3})u$; মধ্যম বেগ u এর দিকে। **26.** 10 সে. মি./সে. ; বিপরীত কৌণিক বিন্দুর দিকে। **27.** 5 মা./ঘ. ; পূর্ব হইতে উত্তরে $\tan^{-1}(\frac{4}{3})$ কোণে। **28.** 80 গজ/মি. ; স্রোতের সহিত $\tan^{-1}(\frac{4}{3})$ কোণে ; 150 গজ দূরে ; $3\frac{1}{8}$ মিনিট। **29.** 660 ফু. দূরে ; 3 মি. 45 সে.। **30.** 15 গজ/মিনিট। **31.** স্রোতের সহিত $90°+\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ কোণে ; 1 মি. 15 সে.। **32.** স্রোতের সহিত $90°+\sin^{-1}(\frac{2}{3})$ কোণে ; $20\sqrt{5}$ সে.। **33.** স্রোতের লম্বাভিমুখে ; 2 মিনিট ; 880 ফু.। **34.** স্রোতের সহিত $90°+\sin^{-1}(u/v)$ কোণে ; স্রোতের লম্বাভিমুখে ; $a/\sqrt{(v^2-u^2)}-(a/v)$. **35.** $b\sqrt{(t'^2-t^2)}/tt'$.

তৃতীয় অধ্যায়

আপেক্ষিক বেগ

(Relative Velocity)

3-1. উপস্থাপন।

একটি ধাবমান রেলগাড়ীর ভিতর হইতে বাহিরের দিকে তাকাইলে মনে হইবে, দুই পার্শ্বের গাছগুলি পিছনের দিকে ছুটিয়া চলিতেছে; অর্থাৎ, চলন্ত রেলগাড়ী হইতে মনে হইবে উহার দুই পার্শ্বের গাছগুলি গতিশীল। প্রকৃতপক্ষে, রেলগাড়ী সামনের দিকে ছুটিয়া চলিতেছে, এবং গাছগুলি স্থিরভাবে আছে। এইরূপ ক্ষেত্রে, চলন্ত রেলগাড়ীর সাপেক্ষে গাছগুলির বেগ আছে বলা যাইতে পারে, এবং এই জাতীয় বেগকে রেলগাড়ীর সাপেক্ষে গাছের **অপেক্ষিক বেগ (Relative Velocity)** বলা হইবে।

পৃথিবীর উপরিস্থ কোন বস্তু (বা কণা) উহার সাপেক্ষে স্থির থাকিতে পারে; কিন্তু, যেহেতু পৃথিবী সূর্য্যের চারিধারে আবর্তন করিতেছে, সুতরাং সূর্য্যের সাপেক্ষে ঐ বস্তু (বা কণা) গতিশীল।

দুইটি রেলগাড়ী একই দিকে একই বেগে পাশাপাশি সমান্তরাল রেলপথে চলিতে থাকিলে, উহাদের যে কোন একটির একজন যাত্রীর নিকট অপরটির একজন যাত্রীকে স্থিরাবস্থায় স্থিত মনে হইবে; অথচ পৃথিবীর সাপেক্ষে উহাদের উভয়ের গতি আছে।

সুতরাং, কোন বস্তু (বা কণা) স্থির আছে বলিলে, কাহার সাপেক্ষে স্থির আছে; অথবা, গতিশীল থাকিলে, কাহার সাপেক্ষে উহা গতিশীল, অর্থাৎ, অবস্থান পরিবর্তন করিতেছে;—তাহা জানা দরকার।

এই পুস্তকে অন্য কিছু বলা না থাকিলে, পৃথিবী স্থির আছে ধরিয়া পৃথিবীর সাপেক্ষে বিভিন্ন বস্তুর গতি আলোচিত হইবে।

আপেক্ষিক বেগের সংজ্ঞা:

দুইটি বস্তুর মধ্যে যে কোন একটি হইতে অপরটির প্রতীয়মান বেগকে প্রথমটির সাপেক্ষে দ্বিতীয়টির আপেক্ষিক বেগ বলা হয়।

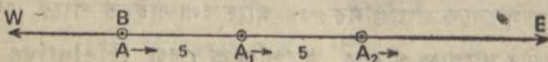
দুইটি বস্তু A এবং B এর মধ্যে A এর সাপেক্ষে Bএর অবস্থান পরিবর্তনের হারকে

A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ বলা হইবে, এবং ইহাকে ভেক্টর চিহ্নে $\vec{V}_{BA}$ দ্বারা সূচিত করা হইবে, যাহার মান V_{BA}. সেইরূপ, B এর সাপেক্ষে A এর আপেক্ষিক বেগকে $\vec{V}_{AB}$ দ্বারা সূচিত করা হইবে, যাহার মান V_{AB} ; এবং $\vec{V}_{AB} = -\vec{V}_{BA}$.

নিম্নের দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ্যণীয় :

দৃষ্টান্ত 1.

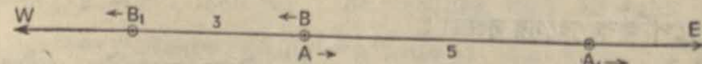
মনে করি, দুই ব্যক্তি A এবং B যখন উভয়ে একই স্থানে ছিল, তখন ঐ স্থান হইতে A পূর্বদিকে ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে সোজাপথে যাইতে থাকিল ; কিন্তু B ঐ পূর্বস্থানে স্থির থাকিল।



1 ঘণ্টা পরে, A_1 অবস্থানে A আসিলে, $\overline{AA_1} = 5$ মাইল হইবে। 1 ঘণ্টা পরে তাহাদের মধ্যে দূরত্ব 5 মাইল, 2 ঘণ্টা পরে তাহাদের মধ্যে দূরত্ব 10 মাইল, 3 ঘণ্টা পরে তাহাদের মধ্যে দূরত্ব 15 মাইল, ইত্যাদি, হইবে। এখন B এর নিকট মনে হইবে, "A ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে পূর্বদিকে যাইতেছে" ; এবং A এর নিকট মনে হইবে, "B ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে পশ্চিম দিকে যাইতেছে।" এইরূপ ক্ষেত্রে, B এর সাপেক্ষে A এর আপেক্ষিক বেগ পূর্বদিকে ঘণ্টায় 5 মাইল, অর্থাৎ, V_{AB} = ঘণ্টায় 5 মাইল। এবং A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় 5 মাইল ; অর্থাৎ, V_{BA} = ঘণ্টায় 5 মাইল এবং $\vec{V}_{AB} = -\vec{V}_{BA}$.

দৃষ্টান্ত 2.

মনে করি, একই সময়ে একই স্থান হইতে A ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে পূর্বদিকে এবং B ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে পশ্চিমদিকে যাইতে লাগিল।



তাহাদের যাত্রা আরম্ভের এক ঘণ্টা পরে, A এবং B এর অবস্থান যথাক্রমে A_1 এবং B_1 হইলে, $\overline{A_1B_1} = 8$ মাইল হইবে। 1 ঘণ্টা পরে তাহাদের মধ্যে দূরত্ব 8

মাইল, 2 ঘণ্টা পরে তাহাদের মধ্যে দূরত্ব 16 মাইল, 3 ঘণ্টা পরে দূরত্ব 24 মাইল, ইত্যাদি, এই হারে হইতে থাকিবে। A এর নিকট মনে হইবে, "B ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে পশ্চিমদিকে যাইতেছে," এবং B এর নিকট মনে হইবে, "A ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে পূর্বদিকে যাইতেছে।" এইরূপ ক্ষেত্রে, A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ পশ্চিমদিকে ঘণ্টায় 8 মাইল, অর্থাৎ, $\vec{V}_{BA}$ = ঘণ্টায় 8 মাইল এবং তাহা পশ্চিমদিকে ; আবার, B এর সাপেক্ষে A এর আপেক্ষিক বেগ পূর্বদিকে ঘণ্টায় 8 মাইল, অর্থাৎ, $\vec{V}_{AB}$ = ঘণ্টায় 8 মাইল এবং তাহা পূর্বদিকে ; এবং $\vec{V}_{BA} = -\vec{V}_{AB}$.

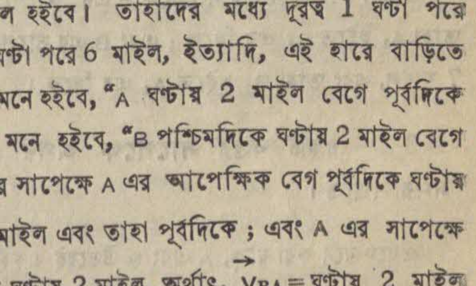
দৃষ্টান্ত 3.

মনে করি, একই সময়ে একই স্থান হইতে A পূর্বদিকে ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে এবং B পূর্বদিকে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে যাইতে লাগিল।



তাহাদের যাত্রা আরম্ভের এক ঘণ্টা পরে A এবং B যথাক্রমে A_1 এবং B_1 অবস্থানে আসিলে, $\overline{B_1A_1} = 2$ মাইল হইবে। তাহাদের মধ্যে দূরত্ব 1 ঘণ্টা পরে 2 মাইল, 2 ঘণ্টা পরে 4 মাইল, 3 ঘণ্টা পরে 6 মাইল, ইত্যাদি, এই হারে বাড়িতে থাকিবে। এখানে, B এর নিকট মনে হইবে, "A ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে পূর্বদিকে যাইতেছে", এবং A এর নিকট মনে হইবে, "B পশ্চিমদিকে ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে যাইতেছে।" এইরূপ ক্ষেত্রে, B এর সাপেক্ষে A এর আপেক্ষিক বেগ পূর্বদিকে ঘণ্টায় 2 মাইল, অর্থাৎ, $\vec{V}_{AB}$ = ঘণ্টায় 2 মাইল এবং তাহা পূর্বদিকে ; এবং A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ পশ্চিমদিকে ঘণ্টায় 2 মাইল, অর্থাৎ, $\vec{V}_{BA}$ = ঘণ্টায় 2 মাইল এবং তাহা পশ্চিমদিকে ;

এবং $\vec{V}_{BA} = -\vec{V}_{AB}$.



দৃষ্টান্ত 4.

মনে করি, একই সময়ে একই স্থান O হইতে $\overrightarrow{OL}$ বরাবর A ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে এবং $\overrightarrow{OM}$ বরাবর B ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে যাইতে লাগিল, যেখানে $\angle LOM = 60°$.

তাহাদের যাত্রা আরম্ভের এক ঘণ্টা পরে A এবং B এর অবস্থান যথাক্রমে A_1 এবং B_1 হইলে, $\overline{OA_1}=8$ মাইল এবং $\overline{OB_1}=5$ মাইল হইবে। এবং, তখন,

$$\overline{A_1B_1}^2=\overline{OA_1}^2+\overline{OB_1}^2-2.\overline{OA_1}.\overline{OB_1}.\cos 60^\circ$$
$$=8^2+5^2-2\times 8\times 5\times \tfrac{1}{2}=49\ ;$$

অর্থাৎ, $\overline{A_1B_1}=7$ মাইল।

আবার, যাত্রার 2 ঘণ্টা পরে, A এবং B এর অবস্থান যথাক্রমে A_2 এবং B_2 হইলে, $\overline{OA_2}=16$ মাইল এবং $\overline{OB_2}=10$ মাইল হইবে, এবং তখন,

$$\overline{A_2B_2}^2=\overline{OA_2}^2+\overline{OB_2}^2-2\ \overline{OA_2}\ \overline{OB_2}.\cos 60^\circ$$
$$=16^2+10^2-2\times 16\times 10\times \tfrac{1}{2}=196\ ;$$

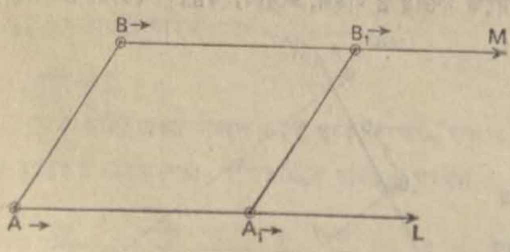
অর্থাৎ, $A_2B_2=14$ মাইল।

তাহা হইলে, OA_2B_2 ত্রিভুজে $\overline{OA_2}$ এবং $\overline{OB_2}$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A_1 এবং B_1 ; সুতরাং, $\overline{A_1B_1}$ এবং $\overline{A_2B_2}$ পরস্পর সমান্তরাল।

এইরূপ ক্ষেত্রে, A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় 7 মাইল, এবং তাহা A_1 হইতে B_1 এর দিকে ; এবং B এর সাপেক্ষে A এর আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় 7 মাইল, এবং তাহা B_1 হইতে A_1 এর দিকে।

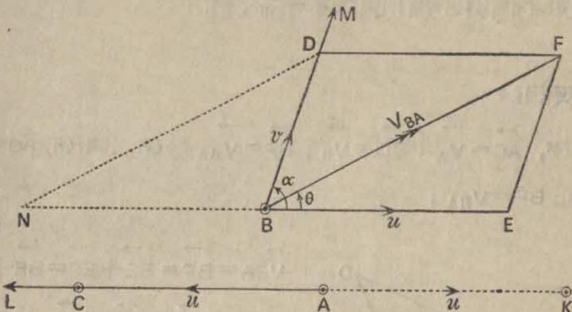
3-2. একটি বস্তুর সাপেক্ষে অপর একটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় পদ্ধতি।

প্রথমে মনে করা যাক্, A এবং B উভয়েই একই u বেগে, $\overrightarrow{AL}$ এবং $\overrightarrow{BM}$ সমান্তরাল রেখাদ্বয় বরাবর গতিশীল।



মনে করি, t সময়ে A_1 এতে A এবং B_1 এতে B আসিল। তাহা হইলে, $\overline{AA_1}=ut=\overline{BB_1}$ এবং $\overline{AA_1}$ ও $\overline{BB_1}$ সমান্তরাল। সুতরাং $\overline{AB}$ ও $\overline{A_1B_1}$ সর্বসম ও সমান্তরাল। এইরূপ ক্ষেত্রে, A এর সাপেক্ষে B এর অবস্থান অপরিবর্তিত থাকিবে ; অর্থাৎ, A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ অথবা B এর সাপেক্ষে A এর আপেক্ষিক বেগ শূন্য হইবে।

এখন, মনে করা যাক্, A এবং B যথাক্রমে u বেগে $\overrightarrow{AL}$ বরাবর এবং v বেগে $\overrightarrow{BM}$ বরাবর গতিশীল, যেখানে $\overline{AC}=u$ এবং $\overline{BD}=v$.



এখন, A এবং B এর প্রত্যেকের উপর একই দিকে একটি করিয়া এইরূপ বেগ প্রয়োগ করা যাক্, যাহার মান u এবং যাহা $\overrightarrow{AL}$ এর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করিবে। চিত্রে, প্রযুক্ত বেগ u, Aতে $\overrightarrow{AK}$ বরাবর এবং Bতে $\overrightarrow{BE}$ বরাবর ক্রিয়াশীল, যেখানে $\overline{AK}=u$; $\overline{BE}=u$ এবং $\overline{AK}$ ও $\overline{BE}$ পরস্পর সমান্তরাল। এক্ষণে, উপরোক্ত আলোচনা অনুযায়ী, A এবং B এর উপর একই দিকে সমান মানের বেগ প্রযুক্ত হওয়ায়, তাহাদের আপেক্ষিক বেগের কোন পরিবর্তন হইবে না। এই নূতন বেগ প্রযুক্ত হওয়ার জন্য, A স্থিরাবস্থায় থাকিবে, কারণ, এইরূপ ক্ষেত্রে, A এর উপর কেবল একই মানের দুইটি বেগ বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল। কিন্তু, তখন B এর উপর যুগপৎ দুইটি বেগ u এবং v যথাক্রমে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{BM}$ বরাবর ক্রিয়াশীল, যেখানে $\overline{BE}=u$ এবং $\overline{BD}=v$. এখন, BEFD সামান্তরিক সম্পূর্ণ করা যাক্। তাহা হইলে, "বেগের সামান্তরিক সূত্র" অনুযায়ী, এই u এবং v এর লব্ধি-বেগের মান $\overline{BF}$ হইবে এবং তাহা B হইতে F এর দিকে ক্রিয়া করিবে। অর্থাৎ, A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ $V_{BA}=\overline{BF}$, এবং তাহা B হইতে F এর দিকে ক্রিয়াশীল।

মনে করা যাক্, $\angle EBD=\alpha$ এবং $\angle EBF=\theta$.

তাহা হইলে, $V_{BA}\equiv\overline{BF}=\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\alpha}$;

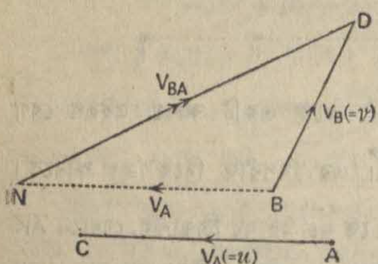
$$\theta=\tan^{-1}\frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}.$$

সুতরাং, প্রমাণিত হইল,

"কোন বস্তু বা কণা A এর সাপেক্ষে অপর একটি বস্তু বা কণা B এর আপেক্ষিক বেগ, B এর প্রকৃত বেগ এবং A এর প্রকৃত বেগের সমান (মানে) এবং বিপরীতমুখী বেগের লব্ধি-বেগ।"

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

ভেক্টর চিহ্নে, $\vec{AC} = \vec{V_A}$; $\vec{BD} = \vec{V_B}$; $\vec{BF} = \vec{V_{BA}}$ হইলে, যেখানে, $\overline{AC} = V_A = u$; $\overline{BD} = V_B = v$; $\overline{BF} = V_{BA}$;



$$\vec{V_{BA}} = \vec{BF} = \vec{BE} + \vec{EF} = \vec{BE} + \vec{BD}.$$

$$= \vec{BD} + \vec{BE} = \vec{BD} + (-\vec{AC}).$$

অর্থাৎ, $\vec{V_{BA}} = \vec{V_B} - \vec{V_A}$,

বা, $\vec{V_A} + \vec{V_{BA}} = \vec{V_B}$.

সুতরাং, $\overline{BN}$ এবং $\overline{AC}$ সর্বসম ও সমান্তরাল হইলে,

$\vec{V_A} = \vec{AC} = \vec{BN} = \vec{V_A}$; $\vec{BD} = \vec{V_B}$; $\vec{ND} = \vec{V_{BA}}$; এবং $\vec{BN} + \vec{ND} = \vec{BD}$;

অর্থাৎ, $\vec{V_A} + \vec{V_{BA}} = \vec{V_B}$; বা, $\vec{V_{BA}} = \vec{V_B} - \vec{V_A}$.

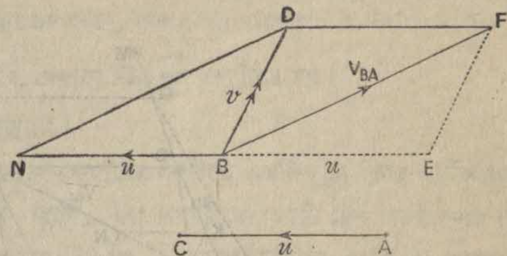
মন্তব্য (1). যেহেতু, $\vec{V_B} = \vec{V_{BA}} + \vec{V_A}$, সুতরাং, B এর প্রকৃত বেগ = A এর প্রকৃত বেগ + A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ, (ভেক্টর যোগফল)।

মন্তব্য (2). দুইটি বস্তু A এবং B একই দিকে যথাক্রমে u এবং v বেগে চলিতে থাকিলে, A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগের মান $v-u$ হইবে, যদি $v>u$ হয়, এবং তাহা v যেদিকে ক্রিয়াশীল, সেই দিকে ক্রিয়াশীল ; কিন্তু, $u>v$ হইলে, ইহার মান $u-v$ হইবে এবং তাহা u এর দিকে ক্রিয়াশীল হইবে।

মন্তব্য (3). যদি দুইটি বস্তু A এবং B বিপরীত দিকে যথাক্রমে u এবং v বেগে চলিতে থাকে তবে A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগের মান $u+v$ হইবে, এবং তাহা v এর দিকে ক্রিয়াশীল হইবে।

3-3. আপেক্ষিক বেগ প্রদত্ত হইলে, প্রকৃত বেগ নির্ণয় পদ্ধতি।

মনে করা যাক্, A এর প্রকৃত বেগ u এবং তাহা $\overrightarrow{AC}$ বরাবর সক্রিয়, এবং A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ V_{BA} যাহা $\overrightarrow{BF}$ বরাবর ক্রিয়াশীল, যেথানে $\overline{AC}=u$ এবং $\overline{BF}=V_{BA}$.



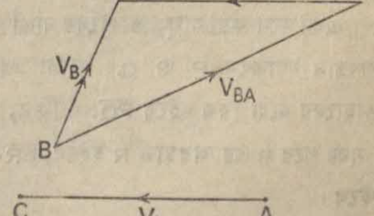
$\overline{CA}$ এর সমান্তরাল করিয়া B এর মধ্য দিয়া $\overline{NE}$ অঙ্কন করি, যেথানে $\overline{BE}$ ও $\overline{BN}$ এর প্রত্যেকের পরিমাপ $\overline{CA}$ এর সমান; এবং u বেগ যেদিকে সক্রিয় তাহার বিপরীত দিকে $\overrightarrow{BE}$ সক্রিয়। তাহা হইলে, $\overline{BE}=u$. এথন, $\overline{BE}$ কে একবাহু এবং $\overline{BF}$ কে একটি কর্ণ ধরিয়া, BEFD সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি। যে স্কেলে $\overline{AC}=u$, সেই স্কেলে $\overline{BD}=v$ হইলে, B এর প্রকৃত বেগ v হইবে, যাহা $\overrightarrow{BD}$ বরাবর ক্রিয়াশীল ; কারণ, B এর প্রকৃত বেগ $\vec{v}\ (=\overrightarrow{BD})$ এবং A এর প্রকৃত বেগের সমান মানযুক্ত বিপরীতমুখী বেগ $(\overrightarrow{BE}=\vec{u})$ এর লব্ধি $\overrightarrow{V_{BA}}\ (=\overrightarrow{BF})$ যাহা A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ হইবে।

এক্ষণে, $\overline{ND}$ অঙ্কন করি। যেহেতু, $\overline{NB}$ এবং $\overline{DF}$ সর্বসম ও সমান্তরাল,

∴ BNDF একটি সামান্তরিক, যাহার কর্ণ $\overline{BD}$.

স্পষ্টতঃই, $\vec{u}\ (=\overrightarrow{BN})$ এবং $\overrightarrow{VBA}\ (=\overrightarrow{BF})$ এর লব্ধি $\vec{v}\ (=\overrightarrow{BD})$.

সুতরাং, A এর প্রকৃত বেগ এবং A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগের লব্ধিই B এর প্রকৃত বেগ হইবে।

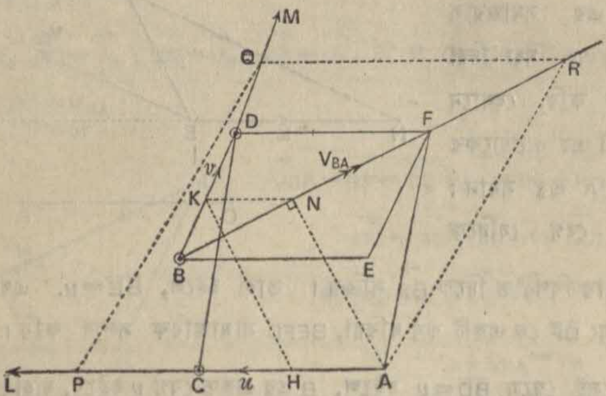


বিশেষ দ্রষ্টব্য :

ভেক্টর চিহ্নে, $\overleftrightarrow{AC}=V_A$; $\overrightarrow{BF}=V_{BA}$; $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{V_B}$, যেথানে $\overline{AC}=u$; $\overline{BF}=V_{BA}$; $\overline{BD}=v$. তথন, $\overrightarrow{V_B}=\overrightarrow{V_A}+\overrightarrow{V_{BA}}$; অর্থাৎ $\overrightarrow{V_B}=\overrightarrow{V_{BA}}+\overrightarrow{V_A}$.

3-4. নির্দিষ্ট মুহূর্তে দুইটি গতিশীল বস্তুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয়।

মনে করি, দুইটি বস্তু A এবং B যথাক্রমে u বেগে $\overrightarrow{AL}$ বরাবর এবং v বেগে $\overrightarrow{BM}$ বরাবর গতিশীল। যদি $\overline{AC}=u$ এবং $\overline{BD}=v$ হয়, তবে এক একক সময় পরে তাহাদের মধ্যে দূরত্ব $\overline{CD}$ হইবে।



u যে দিকে সক্রিয়, তাহার বিপরীত দিকে $\overline{CA}$ এর সর্বসম ও সমান্তরাল করিয়া $\overline{BE}$ লই এবং BEFD সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি।

তাহা হইলে, A এর সাপেক্ষে B এর আপাতদৃষ্ট পথ $\overrightarrow{BF}$ হইবে এবং এক একক সময়ে B হইতে F এতে B আসিয়াছে মনে হইবে। যেহেতু, $\overline{DF}$ ও $\overline{CA}$ সর্বসম ও সমান্তরাল, অতএব, $\overline{AF}$ ও $\overline{CD}$ সর্বসম ও সমান্তরাল হইবে। তাহা হইলে, এক একক সময় পরে A এর সাপেক্ষে B এর দূরত্ব $\overline{AF}$ হইবে, এবং B কে A হইতে $\overrightarrow{AF}$ এর দিকে দেখা যাইবে।

এখন মনে করা যাক্, তাহাদের যাত্রা আরম্ভের t সময় পরে, A ও B এর প্রকৃত অবস্থান যথাক্রমে P ও Q. তাহা হইলে, $\overline{AP}=t.\overline{AC}$; $\overline{BQ}=t.\overline{BD}$, এবং তখন তাহাদের মধ্যে দূরত্ব হইবে $\overline{PQ}$. কিন্তু, A এর সাপেক্ষে B এর আপাত পথের উপর t সময় পরে B এর অবস্থান R হইলে, $\overline{BR}=t.\ \overline{BF}$; এবং তখন তাহাদের দূরত্ব $\overline{AR}$ হইবে।

এখন, যেহেতু, $\overline{BR}/\overline{BF}=t=\overline{BQ}/\overline{BD}$, অতএব, $\overline{QR}$ এবং $\overline{DF}$ সমান্তরাল ; এবং $\overline{RQ}=t.\overline{FD}=t.\overline{AC}=\overline{AP}$.

সুতরাং, $\overline{RQ}$ ও $\overline{AP}$ সর্বসম ও সমান্তরাল। তাহা হইলে, $\overline{AR}$ ও $\overline{PQ}$ সর্বসম ও সমান্তরাল।

সুতরাং, যে কোন মুহূর্তে দুইটি গতিশীল বস্তুর মধ্যে প্রকৃত দূরত্ব ও দিক্ যথাক্রমে যে কোনওটির সাপেক্ষে অপরটির দূরত্ব ও দিকের সমান।

A এবং B এর মধ্যে দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হইবে, যখন A এর সাপেক্ষে B উহার আপাত-দৃষ্ট পথ $\overrightarrow{BF}$ এর N এতে আসিবে, যেখানে $\overline{AN}$, $\overrightarrow{BF}$ এর উপর লম্ব।

3-5. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ।

উদাহরণ 1. দুইটি সমান্তরাল রেলপথের একটিতে একটি ট্রেন্ ঘণ্টায় 40 কি. মি. বেগে A ষ্টেশন হইতে B ষ্টেশনের দিকে, এবং অপরটিতে একটি ট্রেন্ একই সময়ে B ষ্টেশন হইতে A ষ্টেশনের দিকে ঘণ্টায় 30 কি. মি. বেগে চলিতে থাকিলে, তাহারা কখন মিলিত হইবে, যদি ষ্টেশন দুইটির দূরত্ব 175 কিলোমিটার হয়?

যে কোন একটি ট্রেণের সাপেক্ষে অপরটির আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় (40+30) কি. মি., অর্থাৎ, ঘণ্টায় 70 কি. মি.।

সুতরাং, তাহারা মিলিত হইবে 175/70 ঘণ্টা পরে, অর্থাৎ, 2 ঘণ্টা 30 মিনিট পরে।

উদাহরণ 2. দুইটি সমান্তরাল রেলপথের একটিতে 250 মি. দীর্ঘ একটি ট্রেন ঘণ্টায় 30 কি. মি. বেগে এবং অপরটিতে 200 মি. দীর্ঘ অপর একটি ট্রেন্ ঘণ্টায় 45 কি মি. বেগে একই দিকে চলিতে থাকিলে, উহারা কতক্ষণে পরস্পরকে অতিক্রম করিবে?

যে কোন একটি ট্রেণের সাপেক্ষে অপরটির আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় (45−30) কি. মি., অর্থাৎ, ঘণ্টায় 15 কি. মি.।

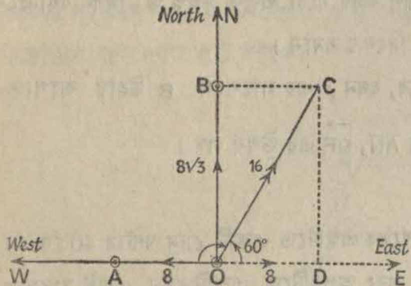
যে কোন একটির সাপেক্ষে অপর ট্রেন্‌টি যে সময়ে 200 মি.+250 মি., বা, 450 মি., অর্থাৎ, (450/1000) কি. মি. অতিক্রম করিবে, সেই সময়ে তাহারা পরস্পরকে অতিক্রম করিবে।

$$\text{সুতরাং, নির্ণেয় সময়} = \frac{450}{1000 \times 15} \text{ ঘণ্টা} = \frac{450 \times 60}{1000 \times 15} \text{ মিনিট}$$

$$= 1 \text{ মিনিট } 48 \text{ সেকেণ্ড।}$$

উদাহরণ 3. একজন সাইকেল আরোহী সোজাপথ বরাবর পশ্চিমদিকে ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে যাইতেছে; এবং একটি মোটরগাড়ী ঘণ্টায় $8\sqrt{3}$ মাইল বেগে

উত্তরদিকে চলিতেছে। সাইকেল আরোহীর নিকট মোটর গাড়ীর আপেক্ষিক বেগ কিরূপ হইবে ?

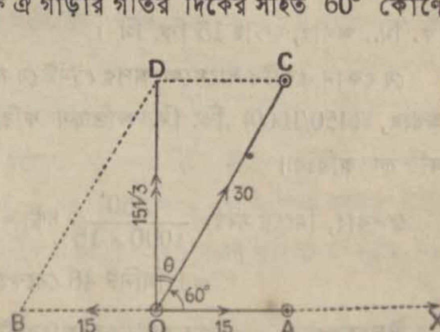


মনে করি, সাইকেল আরোহী $\overrightarrow{OW}$ বরাবর পশ্চিম দিকে এবং মোটরগাড়ী $\overrightarrow{ON}$ বরাবর উত্তরদিকে যাইতেছে। চিত্রে, $\overline{OA}$ এবং $\overline{OD}$ যথাক্রমে O এর পশ্চিমদিকে এবং পূর্বদিকে অবস্থিত, যেখানে $\overline{AO}=\overline{OD}=8$ মাইল; $\overline{OB}=8\sqrt{3}$ মাইল। ODCB আয়তক্ষেত্র সম্পূর্ণ করি। তাহা হইলে, $\overline{OC}=\sqrt{8^2+(8\sqrt{3})^2}$ মাইল $=16$ মাইল ; এবং $\tan\ C\hat{O}D=\frac{8\sqrt{3}}{8}=\sqrt{3}=\tan 60°$; অর্থাৎ, $\angle COD=60°$.

এখন, সাইকেল আরোহীর সাপেক্ষে মোটরগাড়ীর আপেক্ষিক বেগ = মোটরগাড়ীর নিজের বেগ উত্তরদিকে ঘণ্টায় $8\sqrt{3}$ মাইল এবং পূর্বদিকে ঘণ্টায় 8 মাইল বেগ এর লব্ধি = 16 মাইল/ঘণ্টা, এবং তাহা $\overrightarrow{OC}$ বরাবর মনে হইবে ; যেখানে $\overrightarrow{OC}$, পূর্বদিক হইতে উত্তরদিকে 60° কোণে নত।

সুতরাং, নির্ণেয় আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় 16 মাইল, এবং তাহা সাইকেল আরোহীর গতির দিকের সহিত 120° কোণে নত থাকিবে।

উদাহরণ 4. ঘণ্টায় 15 কি. মি. বেগে ধাবমান একটি রেলগাড়ীর একজন যাত্রীর পাশে স্থিরভূমিতে দণ্ডায়মান এক ব্যক্তি ঐ গাড়ীর গতির দিকের সহিত 60° কোণে ঘণ্টায় 30 কি. মি. বেগে একটি বল সমতল বরাবর নিক্ষেপ করিল। ঐ যাত্রীর নিকট বলটির গতি কিরূপ হইবে ?



মনে করি, রেলগাড়ীটি $\overrightarrow{OX}$ বরাবর গতিশীল, এবং বলটি $\overrightarrow{OC}$ বরাবর নিক্ষেপ করা হইল, যেখানে, $\overline{OA}=15$ কি. মি. এবং $\overline{OC}=30$ কি. মি.। চিত্রে, $\overline{BO}=\overline{OA}$

=15 কি. মি., যেখানে $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ একই সরলরেখায় O এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। OBDC সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি, এবং উহার কর্ণ $\overline{OD}$ অঙ্কন করি। তাহা হইলে, ঐ যাত্রীর নিকট বলটির আপেক্ষিক বেগ মানে ও দিকে $\overline{OD}$ দ্বারা সূচিত হইবে।

যেহেতু, $\overline{OB}=15$ কি. মি., $\overline{OC}=30$ কি. মি. এবং $\angle BOC=120°$,

$$\therefore \quad \overline{OD}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+2.\overline{OB}.\overline{OC}.\cos 120°$$
$$=15^2+30^2+2\times15\times30\times(-1/2)$$
$$=5^2\times3^2\times3\ (\text{কি. মি.})^2\text{ ; অর্থাৎ, } \overline{OD}=15\sqrt{3}\text{ কি. মি..}$$

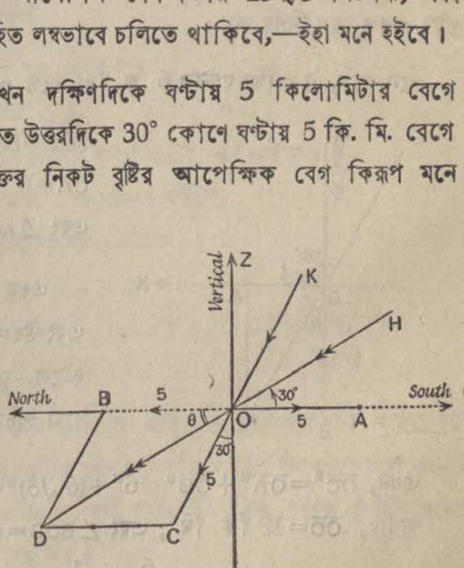
এবং $\angle DOC=\theta$ হইলে,

$$\tan\theta=\frac{\overline{OB}.\sin 120°}{\overline{OC}+\overline{OB}.\cos 120°}=\frac{15\times\sqrt{3}/2}{30+15\times(-1/2)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ;$$

অর্থাৎ $\theta=30°$. তাহা হইলে, $\angle DOA=90°$.

সুতরাং, যাত্রীর নিকট বলটির আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় $15\sqrt{3}$ কি. মি., এবং তাহা রেলগাড়ীর গতির দিকের সহিত লম্বভাবে চলিতে থাকিবে,—ইহা মনে হইবে।

উদাহরণ 5. এক ব্যক্তি যখন দক্ষিণদিকে ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার বেগে যাইতেছিল, তখন উল্লম্ব দিকের সহিত উত্তরদিকে 30° কোণে ঘণ্টায় 5 কি. মি. বেগে বৃষ্টি পড়িতেছিল। এখন, ঐ ব্যক্তির নিকট বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ কিরূপ মনে হইতেছিল?



মনে করি, ঐ ব্যক্তি $\overrightarrow{OA}$ বরাবর দক্ষিণদিকে যাইতেছিল, এবং বৃষ্টি $\overrightarrow{OC}$ বরাবর উল্লম্ব দিকের সহিত উত্তরদিকে 30° কোণে পড়িতেছিল, যেখানে, $\overline{OA}=5$ কি. মি এবং $\overline{OC}=$ 5 কি. মি.। চিত্রে, $\overline{OB}$, O বিন্দুর উত্তরদিকে অবস্থিত, যেখানে $\overline{BO}=\overline{OA}=5$ কি. মি.।

এখন, OBDC সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি, এবং উহার কর্ণ $\overline{OD}$ অঙ্কন করি।

এখন, $\overline{OB}=\overline{OC}=5$ কি. মি. ; $\angle BOC=60°$.

সুতরাং, $\overline{OD}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+2.\overline{OB}.\overline{OC}.\cos 60°$

$=5^2+5^2+2\times5\times5\times\frac{1}{2}=75=(5\sqrt{3})^2$ বর্গ একক ;

অর্থাৎ, $\overline{OD}=5\sqrt{3}$ কি. মি. ।

এখন, $\angle BOD=\theta$ হইলে,

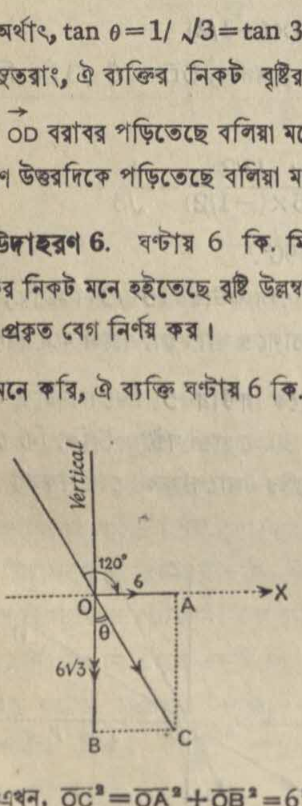
$$\tan\theta=\frac{\overline{OC}.\sin\angle BOC}{\overline{OB}+\overline{OC}.\cos\angle BOC}=\frac{5\times\sin 60°}{5+5\times\cos 60°}$$

অর্থাৎ, $\tan\theta=1/\sqrt{3}=\tan 30°.\quad\therefore\quad\theta=30°.$

সুতরাং, ঐ ব্যক্তির নিকট বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় $5\sqrt{3}$ কি. মি. এবং তাহা $\overrightarrow{OD}$ বরাবর পড়িতেছে বলিয়া মনে হইতেছিল, অর্থাৎ, উল্লম্ব দিকের সহিত $60°$ কোণে উত্তরদিকে পড়িতেছে বলিয়া মনে হইতেছিল ।

উদাহরণ 6. ঘণ্টায় 6 কি. মি. বেগে অনুভূমিক সরল পথে গতিশীল এক ব্যক্তির নিকট মনে হইতেছে বৃষ্টি উল্লম্বভাবে ঘণ্টায় $6\sqrt{3}$ কি. মি. বেগে পড়িতেছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর ।

মনে করি, ঐ ব্যক্তি ঘণ্টায় 6 কি. মি. বেগে $\overrightarrow{OX}$ বরাবর যাইতেছে, এবং তখন বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ $\overrightarrow{OB}$ বরাবর যেখানে, $\overline{OA}=6$ কি. মি.; $\overline{OB}=6\sqrt{3}$ কি. মি. এবং $\angle AOB=90°$.



এখন OACB আয়তক্ষেত্র সম্পূর্ণ করি এবং উহার কর্ণ $\overline{OC}$ অঙ্কন করি। তাহা হইলে, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ মানে ও দিকে $\overline{OC}$ দ্বারা সূচিত হইবে।

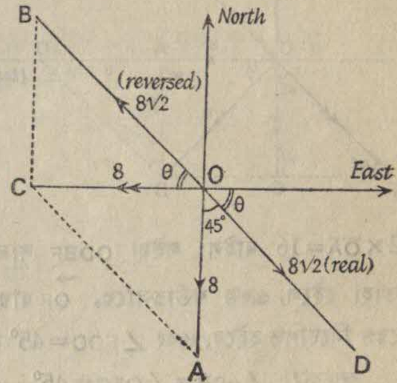
এখন, $\overline{OC}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=6^2+(6\sqrt{3})^2=(6\times2)^2$ বর্গ একক ;

অর্থাৎ, $\overline{OC}=12$ কি. মি. ; এবং $\angle BOC=\theta$ হইলে,

$$\tan\theta=\overline{BC}/\overline{OB}=\frac{6}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}};\quad \text{অর্থাৎ, } \theta=30°.$$

সুতরাং, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ ঘণ্টায় 12 কি. মি. এবং তাহা ঐ ব্যক্তির গতির দিকের সহিত পিছন হইতে $120°$ কোণে পড়িতেছে ।

উদাহরণ 7. ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে যখন বায়ু উত্তর দিক হইতে বহিতেছে, তখন একজন সাইকেল আরোহীর মনে হইতেছে, উহা ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে পূর্বদিক হইতে বহিতেছে। সাইকেল আরোহীর বেগ নির্ণয় কর।



মনে করি, বায়ু উত্তরদিক হইতে $\vec{OA}$ বরাবর প্রবাহিত, যেখানে $\overline{OA}=8$ মাইল; এবং সাইকেল আরোহীর সাপেক্ষে বায়ুর আপেক্ষিক বেগ পূর্বদিক হইতে $\vec{OC}$ বরাবর প্রবাহিত, যেখানে $\overline{OC}=8$ মাইল। এখন, OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি, যেখানে উহার কর্ণ $\overline{OC}$, একটি বাহু $\overline{OA}$ এর সমান হইবে। তাহা হইলে, সাইকেল আরোহীর প্রকৃত বেগ মানে ও দিকে $\vec{BO}$ দ্বারা নির্দেশিত হইবে।

এখন, যেহেতু, $\angle AOC=90°$;

$\therefore\ \overline{OB}^2=\overline{AC}^2=\overline{OA}^2+\overline{OC}^2=8^2+8^2$, বর্গ একক;

অর্থাৎ, $\overline{OB}=8\sqrt{2}$ মাইল; এবং $\angle BOC=\theta$ হইলে,

$$\tan\theta=\overline{BC}/\overline{OC}=\overline{OA}/\overline{OC}=8/8=1;$$

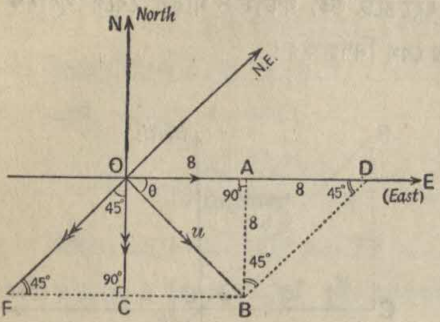
অর্থাৎ $\theta=45°$.

সুতরাং, সাইকেল আরোহীর প্রকৃত বেগ ঘণ্টায় $8\sqrt{2}$ মাইল, এবং তাহা দক্ষিণ-পূর্বদিকে।

উদাহরণ 8. একজন লোক যখন ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে পূর্বদিকে যাইতেছে, তখন তাহার মনে হইতেছে, বায়ু উত্তরদিক হইতে আসিতেছে; কিন্তু যখন সে তাহার বেগ দ্বিগুণ করে, তখন তাহার মনে হয় যে, বায়ু উত্তর-পূর্ব দিক হইতে আসিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ ও অভিমুখিতা নির্ণয় কর।

মনে করি, লোকটি পূর্বদিকে $\vec{OE}$ বরাবর যাইতেছে, যেখানে $\overline{OA}=8$ মাইল; এবং বায়ুর আপেক্ষিক বেগ উত্তরদিক হইতে $\vec{OC}$ বরাবর বহিতেছে, যেখানে $\overline{OC}$

দ্বারা উহার মান নির্দেশিত। এখন, OABC আয়তক্ষেত্র সম্পূর্ণ করি, এবং উহার কর্ণ



$\overline{OB}$ অঙ্কন করি। তাহা হইলে, $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা বায়ুর প্রকৃত বেগ মানে ও দিকে নির্দেশিত হইবে। ধরি, $\overline{OB}=u$ মাইল / ঘণ্টা এবং $\angle BOA=\theta$.

লোকটি যখন তাহার বেগ দ্বিগুণ করিল, অর্থাৎ, বেগ ঘণ্টায় 16 মাইল হইল, তখন $\overline{OD}=2\times\overline{OA}=16$ মাইল লইয়া ODBF সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি, যাহার কর্ণ $\overline{OB}$. তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\overrightarrow{OF}$ দ্বারা মানে ও দিকে বায়ুর নূতন আপেক্ষিক বেগ নির্দেশিত হইবে, এবং $\angle FOC=45°$ হইবে।

সুতরাং, $\angle ADB=\angle OFC=45°$; এবং, তখন, $\angle ABD=45°$;

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{AD}=8$ মাইল ;

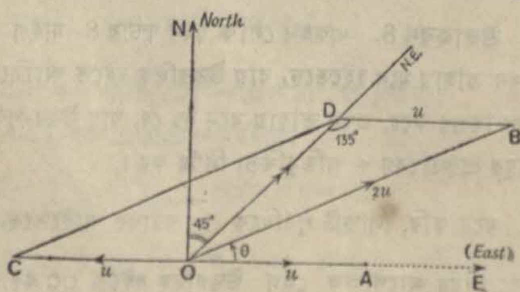
$\therefore\ \overline{OB}^2=\overline{AB}^2+\overline{OA}^2=8^2+8^2=(8\sqrt{2})^2$ বর্গ একক ;

অর্থাৎ, $\overline{OB}=8\sqrt{2}$ মাইল, এবং $\angle AOB=45°$, অর্থাৎ, $\theta=45°$.

সুতরাং, বায়ুর প্রকৃত বেগ ঘণ্টায় $8\sqrt{2}$ মাইল, এবং তাহা দক্ষিণ-পূর্বদিকে প্রবাহিত।

উদাহরণ 9. একটি ষ্টীমার ঘণ্টায় u কিলোমিটার বেগে পূর্বদিকে যাইতেছে এবং অপর একটি ষ্টীমার পূর্বদিকের সহিত উত্তরভাগে θ কোণে নত অভিমুখিতায় ঘণ্টায় $2u$ কিলোমিটার বেগে যাইতেছে। প্রথম ষ্টীমারের একজন যাত্রীর নিকট দ্বিতীয় ষ্টীমারটি উত্তর-পূর্ব দিকে যাইতেছে মনে হইলে, প্রমাণ কর যে, $\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$.

মনে করি, প্রথম ষ্টীমারটি পূর্বদিকে $\overrightarrow{OA}$ বরাবর এবং দ্বিতীয় ষ্টীমারটি OB বরাবর যাইতেছে, যেখানে $\angle BOA=\theta$; $\overline{OA}=u$; $\overline{OB}=2u$.



এখন বর্ধিত $\overline{AO}$ হইতে $\overline{OC}$ লই, যেখানে $\overline{OC}=\overline{AO}=u$; এবং OCDB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি, ও $\overline{OD}$ কর্ণ অঙ্কন করি। তাহা হইলে, প্রথম ষ্টীমারের সাপেক্ষে দ্বিতীয় ষ্টীমারের আপেক্ষিক বেগ $\overrightarrow{OD}$ দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত হইবে। প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\angle DOA=45°$ হইবে।

এখন, $\overline{CO}$ ও $\overline{DB}$ সর্বসম ও সমান্তরাল বলিয়া, $\overline{DB}=u$; $\angle BDO=\angle DOC$

$$=90°+45° \; ; \; \angle DOB=45°-\theta.$$

তাহা হইলে, OBD ত্রিভুজ হইতে পাই,

$$\frac{\overline{DB}}{\sin\angle DOB}=\frac{\overline{OB}}{\sin\angle ODB} \; ;$$

বা, $$\frac{u}{\sin(45°-\theta)}=\frac{2u}{\sin(90°+45°)} \; ;$$

বা, $2\sin(45°-\theta)=\cos 45°$;

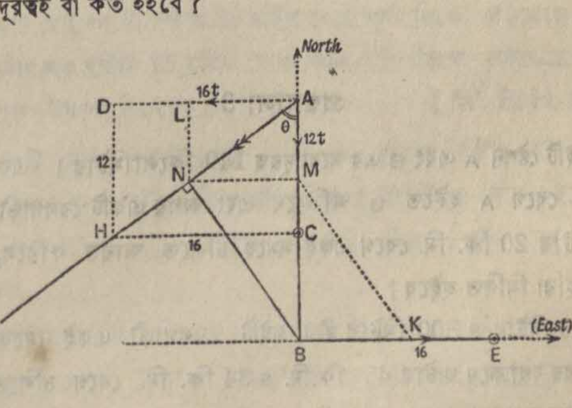
বা, $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$.

উহাকে বর্গ করিয়া পাই,

$1-\sin 2\theta=1/4$; বা, $\sin 2\theta=3/4$

$$\therefore \; \theta=\tfrac{1}{2}\sin^{-1}(\tfrac{3}{4}).$$

উদাহরণ 10. A জাহাজটি যখন ঘণ্টায় 12 কি. মি. বেগে দক্ষিণ দিকে যাইতেছে, ঠিক তখন তাহার 20 কি.মি. দক্ষিণে অবস্থিত B জাহাজটি ঘণ্টায় 16 কি. মি. বেগে পূর্বদিকে যাইতেছে। তাহাদের মধ্যে দূরত্ব কখন ক্ষুদ্রতম হইবে এবং সেই ক্ষুদ্রতম দূরত্বই বা কত হইবে ?



A জাহাজটি $\overrightarrow{AB}$ বরাবর গতিশীল, যেখানে $\overline{AC}=12$ কি. মি. ; ADHC আয়তক্ষেত্র

সম্পূর্ণ করি, যেখানে, $\overline{AD}=16$ কি.মি., এবং $\overline{AB}$ এর পশ্চিম দিকে $\overline{AD}$ অবস্থিত। এখান $\overline{AH}$ অঙ্কন করি। তাহা হইলে, B এর সাপেক্ষে A এর আপেক্ষিক বেগ $\overrightarrow{AH}$ দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশিত হইবে। $\overrightarrow{AH}$ এর উপর $\overline{BN}$ লম্ব টানি। তাহা হইলে, B এর সাপেক্ষে A যখন N এতে আসিবে, তখন তাহাদের মধ্যে দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হইবে, এবং তাহা $\overline{BN}$ হইবে। ধরি, $\angle BAH=\theta$.

এখন, $\overline{AH}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2$

$=12^2+16^2=400$ বর্গ একক ;

অর্থাৎ, $\overline{AH}=20$ কি. মি.,

এবং $\tan\theta=\overline{CH}/\overline{AC}=16/12=4/3.$

এখন, যেহেতু, $\angle ANB=90°$,

$\therefore$ $\overline{AN}=\overline{AB}.\cos\theta=20$ কি. মি. $\times 3/5=12$ কি. মি. ;

এবং $\overline{BN}=\overline{AB}.\sin\theta=20$ কি. মি. $\times(4/5)=16$ কি. মি.।

এখন t ঘণ্টা পরে তাহাদের দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হইলে,

$\overline{AN}=\overline{AH}\times t=20$ কি. মি. $\times t$

সুতরাং, 20 কি. মি. $\times t=12$ কি. মি. ;

অর্থাৎ, $t=12/20=3/5$ একক।

সুতরাং, নির্ণেয় সময় : 3/5 ঘণ্টা, বা, 36 মিনিট,

এবং নির্ণেয় দূরত্ব : 16 কি মি।

প্রশ্নমালা 3

1. দুইটি ষ্টেশন A এবং B এর মধ্যে দূরত্ব 140 কিলোমিটার। একটি রেলগাড়ী 50 কি. মি. বেগে A হইতে B অভিমুখে এবং অপর একটি রেলগাড়ী B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টায় 20 কি. মি. বেগে একই সময়ে চলিতে আরম্ভ করিলে, কখন এবং কোথায় তাহারা মিলিত হইবে ?

2. 250 মিটার ও 300 মিটার দীর্ঘ দুইটি রেলগাড়ী একই দিকে সমান্তরাল রেলপথ বরাবর যথাক্রমে ঘণ্টায় 45 কি.মি. ও 34 কি. মি. বেগে চলিতে থাকিলে, কতক্ষণের মধ্যে তাহারা পরস্পরকে অতিক্রম করিবে ?

3. 200 মিটার ও 300 মিটার দীর্ঘ দুইটি রেলগাড়ী সমান্তরাল রেলপথ বরাবর বিপরীত দিকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 45 কি. মি. ও ঘণ্টায় 30 কি. মি. বেগে চলিতে থাকিলে, তাহাদের সাক্ষাতের কতক্ষণ পরে একটিকে অপরটি অতিক্রম করিবে ?

4. 200 মিটার ও 250 মিটার দীর্ঘ দুইটি রেলগাড়ী সমান্তরাল রেলপথ বরাবর বিভিন্ন সমবেগে একই দিকে চলিতে থাকিলে, তাহারা পরস্পরকে 1 মিনিট 15 সেকেণ্ড অতিক্রম করে ; কিন্তু বিপরীত দিকে চলিতে থাকিলে, তাহাদের সাক্ষাতের পর $7\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড সময়ে একটি অপরটিকে অতিক্রম করে। তাহাদের বেগ নির্ণয় কর।

5. একজন সাইকেল আরোহী ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে পূর্বদিকে যাইতেছে এবং একটি মোটরগাড়ী উত্তরদিকে ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে যাইতেছে। সাইকেল আরোহীর নিকট মোটরগাড়ীর আপেক্ষিক বেগ কিরূপ হইবে ?

6. একটি জাহাজ পূর্বদিকে ঘণ্টায় 12 কি মি. বেগে এবং অপর একটি জাহাজ উত্তর দিকে ঘণ্টায় 16 কি. মি. বেগে যাইতেছে। প্রথম জাহাজটির সাপেক্ষে দ্বিতীয়টির আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর। [W.B.H.S. 1969]

7. A এবং B দুইটি বিন্দু পরস্পর সমকোণে যথাক্রমে u এবং v বেগে চলিতেছে। A এর পরিপ্রেক্ষিতে B এর বেগ নির্ণয় কর। [W.B.H.S. 1961]

8. একটি ষ্টীমার যখন পূর্ব্বদিকে ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে যাইতেছিল, তখন বায়ু দক্ষিণ-পূর্ব্ব দিকে ঘণ্টায় $10\sqrt{2}$ মাইল বেগে বহিতেছিল। ঐ ষ্টীমারের একজন যাত্রীর নিকট বায়ুর বেগ কিরূপ মনে হইতেছিল ?

9. একটি মোটরগাড়ী ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে পূর্ব্ব দিকে যাইতেছে এবং ঠিক তখন একটি ষ্টীম লঞ্চ ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে উত্তর-পূর্ব্ব দিকে যাইতেছে। মোটরগাড়ীর সাপেক্ষে ষ্টীম লঞ্চটির বেগ নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1967]

10. একটি মোটর গাড়ী যখন সোজা পথ বরাবর ঘণ্টায় 45 মাইল বেগে চলিতেছিল, ঠিক তখন গাড়ীর গতির অভিমুখিতার 60° উন্নত কোণ হইতে ঐ একই বেগে বৃষ্টি পড়িতেছিল। ঐ গাড়ীর চালকের নিকট বৃষ্টির বেগ কিরূপ মনে হইতেছিল ?

11. এক ব্যক্তি যখন ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে উত্তর দিকে ছুটিতেছিল তখন তাহার গতির দিকের সহিত 60° কোণে হেলিয়া সম্মুখ দিক হইতে 10 মাইল/ঘণ্টা বেগে বৃষ্টি পড়িতেছিল। ঐ ব্যক্তির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর।

12. ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে পূর্ব্ব দিকে গতিশীল এক ব্যক্তির নিকট মনে হইল, বায়ু দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় $6\sqrt{2}$ মাইল বেগে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

13. একজন সাইকেল আরোহী যখন ঘণ্টায় $8\sqrt{2}$ মাইল বেগে পশ্চিম দিকে যাইতেছে, তখন তাহার মনে হইতেছে বায়ু উত্তর-পূর্ব্ব দিকে ঘণ্টায় 23 মাইল বেগে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

14. ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার বেগে ধাবমান এক ব্যক্তির নিকট মনে হইল, বৃষ্টি সম্মুখ দিক হইতে ঘণ্টায় 16 কি. মি. বেগে উল্লম্ব দিকের সহিত 30° কোণে হেলিয়া পড়িতেছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

15. ঘণ্টায় $5\sqrt{2}$ কিলোমিটার বেগে যখন বায়ু দক্ষিণ-পশ্চিম দিক্ হইতে বহিতেছে, তখন একজন মোটর চালকের নিকট মনে হইল, বায়ু উত্তর দিক্ হইতে ঘণ্টায় $32\frac{1}{2}$ কিলোমিটার বেগে বহিতেছে। মোটর গাড়ীর বেগ কত ছিল ?

16. ঘণ্টায় 16 কি. মি. বেগে বায়ু উত্তর দিক্ হইতে বহিতেছে। একজন সাইকেল আরোহীর নিকট মনে হইল, ইহা উত্তর-পূর্ব্ব দিক্ হইতে ঘণ্টায় 16 কি. মি. বেগে বহিতেছে। ঐ সাইকেল আরোহীর বেগ নির্ণয় কর।

17. দুই ব্যক্তি একই সময়ে একই স্থান হইতে হাঁটিতে আরম্ভ করিল। একজন পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে এবং অপর জন দক্ষিণ দিকে ঘণ্টায় $6\sqrt{3}$ মাইল বেগে যাইতে থাকিল। প্রথম ব্যক্তির সাপেক্ষে দ্বিতীয় ব্যক্তির আপেক্ষিক বেগ বাহির কর। 20 মিনিট পরে তাহাদের মধ্যে দূরত্ব কত হইবে ? কত সময় পরে তাহাদের মধ্যে দূরত্ব 9 মাইল হইবে ?

18. একটি বৃত্তাকার পথে বিপরীতমুখে দুইটি কণা যথাক্রমে u এবং $2u$ দ্রুতিতে আবর্ত্তন করিতেছে। কোন্ দিকে একের সাপেক্ষে অপরের আপেক্ষিক বেগ গরিষ্ঠ এবং লঘিষ্ঠ হইবে ? তখন আপেক্ষিক বেগের পরিমাপ কত হইবে ?

19. এক ব্যক্তি যখন ঘণ্টায় 8 কি. মি. বেগে পূর্ব্ব দিকে যাইতেছিল, তখন তাহার মনে হইল : বায়ু সোজা উত্তর দিক্ হইতে বহিতেছে। কিন্তু, যখন সে তাহার বেগ ঐ দিকে দ্বিগুণ করিল, তখন তাহার মনে হইল : বায়ু উত্তর-পূর্ব্ব দিক্ হইতে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ বাহির কর।

20. এক ব্যক্তি যখন ঘণ্টায় 3 কি. মি. হাঁটিতেছে, তখন তাহার নিকট মনে হইল, বৃষ্টি উল্লম্বভাবে পড়িতেছে। কিন্তু সে যখন ঐ দিকে ঘণ্টায় 6 কি. মি. বেগে হাঁটিতে

লাগিল, তখন তাহার মনে হইল, বৃষ্টি তাহার গতিপথের সহিত 45° কোণে হেলিয়া পড়িতেছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ ও দিক্ নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1970.]

21. ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে ধাবমান এক ব্যক্তির নিকট মনে হইল : বৃষ্টি উল্লম্ব-ভাবে পড়িতেছে; কিন্তু সে যখন তাহার বেগ ঐ দিকে দ্বিগুণ করিল, তখন তাহার মনে হইল : বৃষ্টি 45° কোণে হেলিয়া পড়িতেছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

[C. U. P. 1976.]

22. ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে পূর্বদিকে ধাবমান একটি জাহাজ হইতে মনে হইতেছে, বায়ু দক্ষিণ-পূর্ব দিক্ হইতে বহিতেছে। আবার, উত্তরদিকে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে ধাবমান একটি জাহাজ হইতে মনে হইতেছে, বায়ু পশ্চিম দিক্ হইতে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ ও দিক্ নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1961]

23. এক সাইকেল আরোহী সমবেগে উত্তর-পূর্ব দিকে যখন যাইতেছিল, তখন তাহার মনে হইল : উত্তর দিক হইতে বায়ু বহিতেছে ; কিন্তু দ্বিগুণ বেগে ঐ দিকে চলিতে থাকিলে, তাহার মনে হইল, বায়ু উত্তর দিকের সহিত 15° কোণ হইতে দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

24. মধ্যাহ্ন সময়ে একটি জাহাজ A অপর একটি জাহাজ B এর 30 মাইল উত্তরে ছিল। ঠিক সেই সময়ে A দক্ষিণ দিকে ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে এবং B পূর্বদিকে ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে যাইতে থাকিলে, কখন তাহারা পরস্পরের খুব নিকটবর্তী হইবে? এবং তখন তাহাদের মধ্যে দূরত্ব কত?

25. কোন এক মুহূর্তে একই উচ্চতায় দুইটি বিমানের দূরত্ব 360 কিলোমিটার ছিল এবং তখন একটি অপরটির পূর্বদিকে ছিল। প্রথম বিমানটি পশ্চিমদিকে ঘণ্টায় 300 কি. মি. বেগে এবং দ্বিতীয়টি দক্ষিণ দিকে ঘণ্টায় 225 কি. মি. বেগে যাইতেছিল। কত সময় পরে তাহাদের দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হইবে? তাহাদের ক্ষুদ্রতম দূরত্ব কত?

26. (i) এক ব্যক্তি যে মুহূর্তে একজন সাইকেল আরোহীর 3 মাইল পূর্বে অবস্থিত, তখন ঐ ব্যক্তি **পশ্চিম দিকে** ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে এবং সাইকেল আরোহী পূর্বদিক হইতে 60° কোণে উত্তর দিকে ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে যাইতে থাকিল। কখন তাহারা পরস্পরের নিকটতম হইবে? তাহাদের ক্ষুদ্রতম দূরত্বই বা কত?

(ii) যদি লোকটি **পূর্বদিকে** 5 মাইল/ঘণ্টা বেগে যাইত, তাহা হইলে, কি হইত?

27. একটি সাবমেরিণ ঘণ্টায় 15 কি. মি. বেগে পূর্বদিকে যখন যাইতেছিল, তখন তাহার দক্ষিণে 40 কিলোমিটার দূরে অবস্থিত একটি ডেষ্ট্রয়ার উত্তর দিকের সহিত 30° কোণে পূর্বদিকে সমবেগে যাইতেছিল। ডেষ্ট্রয়ারের বেগ কত থাকিলে, উহা সাবমেরিণকে ধ্বংস করিতে পারিবে?

28. একটি ক্রুজার ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার বেগে সোজা পূর্বদিকে যখন যাইতেছিল, ঠিক তখন তাহার দক্ষিণে 10 কিলোমিটার দূরে একটি ডেষ্ট্রয়ার ছিল; ঐ ডেষ্ট্রয়ার কোন্ দিকে ঘণ্টায় 30 কি. মি. বেগে চলিলে, উহা ক্রুজারের সহিত মিলিত হইতে পারিবে? সেইরূপ ক্ষেত্রে, কখন মিলিত হইবে?

29. সোজা রেলপথ বরাবর ঘণ্টায় x মাইল বেগে দ্রুতগামী একটি চলন্ত রেলগাড়ীকে লক্ষ্য করিয়া এক ব্যক্তি উহার গতির দিকের সহিত θ কোণে তাহার পিস্তল হইতে একটি বুলেট (bullet) নিক্ষেপ করিল। a ফুট দৈর্ঘ্য ও b ফুট প্রস্থবিশিষ্ট একটি কম্পার্টমেণ্টের একটি কোণ দিয়া প্রবেশ করিয়া ঠিক উহার বিপরীত কোণ দিয়া বুলেটটি বাহির হইয়া গেলে এবং উহা অতিক্রম করিতে t সেকেণ্ড সময় লাগিলে, দেখাও যে, $t=15(b\cot\theta-a)/(22x)$.

30. দুইটি কণা, a এবং b ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট সমতলীয় সমকেন্দ্রিক দুইটি বৃত্তপথে যথাক্রমে u এবং v সমদ্রুতিতে একই অভিমুখে গতিশীল। P এবং Q যথাক্রমে তাহাদের অবস্থান হইলে, যখন একের সাপেক্ষে অপরের আপেক্ষিক বেগ P ও Q বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখা বরাবর এবং $\angle POQ=\alpha$, যেখানে বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র O, দেখাও যে,

$$\cos\alpha=\frac{au+bv}{bu+av}.$$

Answers (প্রশ্নমালা 3)

1. 2 ঘণ্টা পরে; A হইতে 100 কি. মি. দূরে। 2. 3 মিনিট।
3. 24 সেকেণ্ড। 4. 118·8 কি. মি./ঘণ্টা; 97·2 কি. মি./ঘণ্টা।
5. $15\sqrt{2}$ মাইল/ঘণ্টা; উত্তর-পশ্চিম কোণের দিকে।
6. 20 কি. মি./ঘণ্টা; উত্তর হইতে পশ্চিমদিকে $\tan^{-1}(3/4)$ কোণে।
7. $\sqrt{u^2+v^2}$; $\vec{u}$ এর সহিত $90°+\tan^{-1}(u/v)$ কোণে।
8. $10\sqrt{2}$ মাইল/ঘণ্টা; দক্ষিণ পশ্চিম কোণের দিকে।

9. 14·168 মাইল/ঘণ্টা ; পশ্চিম হইতে উত্তর দিকে 48°28′·24 কোণে (প্রায়)।

10. $45\sqrt{3}$ মাইল/ঘণ্টা ; সম্মুখস্থ 30° উন্নত কোণ হইতে।

11. 14 মাইল/ঘণ্টা ; সম্মুখস্থ $\cos^{-1}(11/14)$ উন্নত কোণ হইতে।

12. 6(মাইল/ঘণ্টা ;)উত্তর দিক হইতে।

13. 17 মাইল/ঘণ্টা ; উত্তর হইতে পূর্বদিকে $\tan^{-1}(7/23)$ কোণের দিকে।

14. $8\sqrt{3}$ কি. মি./ঘণ্টা ; উল্লম্ব দিক হইতে।

15. $37\frac{3}{8}$ কি. মি./ঘণ্টা ; উত্তর হইতে পূর্বদিকে $\tan^{-1}(15/112)$ কোণের দিকে।

16. 12·141 কি. মি./ঘণ্টা (প্রায়) ; পূর্ব হইতে দক্ষিণদিকে $22\frac{1}{2}°$ কোণের দিকে। 17. 12 মাইল/ঘণ্টা ; দক্ষিণ হইতে পূর্বদিকে 30° কোণের দিকে ; দূরত্ব 4 মাইল ; 45 মিনিট পরে। 18. গরিষ্ঠমান $=3u$, একত্র অবস্থানকালীন ; লঘিষ্ঠ মান $=u$, যখন একটি ব্যাসের বিপরীত প্রান্তে উহারা অবস্থিত।

19. $8\sqrt{2}$ কি. মি./ঘণ্টা ; দক্ষিণ-পূর্বদিকে।

20. $3\sqrt{2}$ কি. মি./ঘণ্টা ; পিছন দিক হইতে 45° উন্নত কোণে।

21. $6\sqrt{2}$ মাইল/ঘণ্টা ; পিছন দিক্ হইতে 45° উন্নত কোণে।

22. $4\sqrt{2}$ মাইল/ঘণ্টা ; দক্ষিণ-পশ্চিম কোণ হইতে।

23. (বায়ুর বেগ) $=(\sqrt{2})$ (সাইকেলের প্রথম বেগ) ; দক্ষিণ হইতে পূর্বদিকে 30° কোণে। 24. $12^h57^m.36^s$.P.M. ; ক্ষুদ্রতম দূরত্ব $=18$ মাইল।

25. 46·08 মিনিট ; 216 কি. মি.। 26. (i) $\frac{3}{7}\sqrt{21}$ মাইল ; $10\frac{2}{7}$ মিনিট।

(ii) 3 মাইল ; 0 সময় পরে (অর্থাৎ, প্রদত্ত অবস্থানে)।

27. 30 কি. মি./ঘণ্টা। 28. উত্তর হইতে পূর্বদিকে 30° কোণে ; 23 মি. 5·64 সে. পরে।

চতুর্থ অধ্যায়

ত্বরণ

(Acceleration)

4-1. (a) ত্বরণ ও তৎসংক্রান্ত আলোচনা :

কোন একটি গতিশীল বস্তু একটি নির্দ্দিষ্ট অবকাশে সমবেগে চলিয়া থাকিতে পারে, অথবা, ঐ অবকাশের প্রত্যেক মুহূর্ত্তে উহার বেগের কেবল পরিমাপের বা, কেবল দিকের, অথবা, উভয়েরই পরিবর্তন হইয়া থাকিতে পারে।

সময়-সাপেক্ষে গতিশীল বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) এর বেগের পরিবর্ত্তন-হারকে ত্বরণ (acceleration) বলে।

মন্তব্য : ত্বরণ একটি ভেক্টর রাশি ; অর্থাৎ, বেগের ন্যায় ত্বরণের পরিমাপ এবং দিক্ উভয়ই আছে।

(b). সমত্বরণ (Uniform Acceleration) :

কোন এক নির্দ্দিষ্ট অবকাশের সমান সমান সময়ে (সেই সময় যতই ক্ষুদ্র হউক না কেন) কোন একটি গতিশীল বস্তুর বেগের পরিবর্ত্তন-হার সর্বদা সমান হইলে, এবং তাহা একই দিকে ক্রিয়া করিলে, ঐ অবকাশে বস্তুটির ত্বরণকে **সমত্বরণ** বলা হইবে।

মন্তব্য : (i) **সমবেগে গতিশীল বস্তুর ত্বরণ শূন্য।**

(ii) **অসম বেগে গতিশীল বস্তুর ত্বরণ থাকিবে।**

(c) মন্দন (Retardation) :

সরলরেখা বরাবর গতিশীল বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) এর বেগের পরিবর্ত্তন বলিতে উহার বেগের বৃদ্ধি অথবা হ্রাসকে বুঝাইতে পারে। সরলরেখায় গতিশীল বস্তুর বেগ ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে, উহার ত্বরণ ধনাত্মক হইবে ; কিন্তু, উহার বেগ ক্রমশঃ হ্রাস পাইতে থাকিলে, উহার ত্বরণ ঋণাত্মক হইবে।

ঋণাত্মক ত্বরণকে মন্দন বলা হয়। ঋণাত্মক সমত্বরণই **সমমন্দন।**

দ্রষ্টব্য : সমত্বরণকে সাধারণতঃ 'f' দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে।

(d). অসম ত্বরণ (Non-uniform acceleration) :

কোন এক নির্দ্দিষ্ট অবকাশে একটি গতিশীল বস্তু (বা বিন্দু, বা কণা) এর ত্বরণ যদি সমত্বরণ না হয়, তবে উহা ঐ অবকাশে অসমত্বরণে চলমান হইবে।

সুতরাং, কোন এক অবকাশে একটি বস্তু (বা, বিন্দু, বা, কণা), (i) সরলরেখার অসম দ্রুতিতে, অথবা, (ii) বক্ররেখায় অসম দ্রুতিতে চলমান হইলে ঐ অবকাশে উহার ত্বরণ অসম (non-uniform) হইতে পারে, বা সম (uniform) হইতে পারে। কিন্তু, (iii) উহা বক্ররেখায় সমদ্রুতিতে চলমান হইলে, উহার ত্বরণ অসম (non-uniform) হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(1) সরলরেখায় অসম দ্রুতিতে একটি বস্তু (বা, বিন্দু, বা, কণা) গতিশীল হইলে, উহার বেগ ও ত্বরণের দিক্ একই হইবে, যদি ক্রমশঃ উহার বেগ বৃদ্ধি পাইতে থাকে ; এবং পরস্পর বিপরীত হইবে, যদি উহার বেগ ক্রমশঃ হ্রাস পাইতে থাকে। সুতরাং, সরলরেখায় একটি গতিশীল বস্তুর (বা, কণার, বা, বিন্দুর) বেগ ও ত্বরণের দিক্ একই হইলে, উহার ত্বরণ ধনাত্মক ; কিন্তু, ঐ দিক্‌গুলি পরস্পর বিপরীত হইলে, ত্বরণ ঋণাত্মক হইবে।

(2) বক্ররেখায় অসম দ্রুতিতে একটি বস্তু (বা, বিন্দু, বা, কণা) চলমান হইলে, উহা সমত্বরণ, (বা সমমন্দন) অথবা অসম ত্বরণে গতিশীল হইতে পারে।

মন্তব্য : গতিশীল বস্তুর বেগ যে দিকে উহার ত্বরণের দিক্ সেইদিকে বা উহার বিপরীত দিকে অথবা অন্য কোন দিকে থাকিতে পারে।

(e). ত্বরণ পরিমাপে একক :

(1) সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে, ত্বরণের একক : **'প্রতি সেকেণ্ডে, প্রতি সেকেণ্ডে এক সেণ্টিমিটার'** ; ইহাকে সংক্ষেপে 1 সে. মি./সে.^{2} লেখা হয়।

(2) এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে, ত্বরণের একক : **'প্রতি সেকেণ্ডে, প্রতি সেকেণ্ডে এক ফুট'** ; ইহাকে সংক্ষেপে 1ফু./সে.^{2} লেখা হয়।

ত্বরণের ক্ষেত্রে, **'প্রতি সেকেণ্ডে'** কথাটি দুইবার ব্যবহার করার কারণ হইতেছে ;—প্রথম কথাটি (প্রতি সেকেণ্ডে) বেগের পরিবর্তন-হারকে বুঝাইবার জন্য ব্যবহৃত, এবং দ্বিতীয় কথাটি (প্রতি সেকেণ্ডে) বেগকে, অর্থাৎ, সরণের পরিবর্তন-হারকে বুঝাইবার জন্য।

(f). গড় ত্বরণ ও তাহার পরিমাপ :

একটি নির্দ্দিষ্ট অবকাশে একটি গতিশীল বস্তু (বা, কণা, বা, বিন্দু) এর বেগের পরিবর্ত্তন ও ঐ সময়ের অনুপাতকে ঐ অবকাশে উহার গড় ত্বরণ বলা হইবে।

মনে করি, সরলরেখায় গতিশীল কোন এক বস্তুর জন্য কোন এক মুহূর্ত্তে উহার বেগ u ফু./সে. ছিল। উহার ঠিক t সেকেণ্ড পরে, উহার বেগ v ফু./সে. হইলে, এই t সেকেণ্ড অবকাশে বস্তুটির গড় ত্বরণ হইবে $(v-u)/t$ ফু./সেকেণ্ড^2।

মনে করি, সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি কণার কোন এক মুহূর্ত্তে 15 সে. মি./সে. বেগ ছিল ; এবং উহার 5 সেকেণ্ড পরে, উহার বেগ 35 সে. মি./সে. হইল। তাহা হইলে, এই '5 সেকেণ্ড' অবকাশে কণাটির গড় ত্বরণ হইবে (35−15)/5 সে. মি./সে.^{2} ; অর্থাৎ, 4 সে. মি./সে.^{2}।

(g). সমত্বরণের পরিমাপ :

কোন নির্দ্দিষ্ট অবকাশে একটি বস্তু সমত্বরণে গতিশীল হইলে, ঐ অবকাশের গড় ত্বরণই উহার প্রতি মুহূর্ত্তের ত্বরণ হইবে।

মনে করি, একটি গাড়ী সমত্বরণে সোজাপথে গতিশীল, এবং কোন এক মুহূর্তে উহার বেগ ছিল ঘণ্টায় 10 মাইল। ঠিক ইহার 3 মিনিট পরে উহার বেগ হইল ঘণ্টায় 25 মাইল। তাহা হইলে, এই 3 মিনিট অবকাশে, গাড়ীটির গড় ত্বরণ 'মিনিটে 5 মা./ঘণ্টা' : বা প্রতি মিনিটে (22/3) ফু./সেকেণ্ড ; বা, প্রতি সেকেণ্ডে (11/90) ফু./সে. ; অর্থাৎ, 11/90 ফু./সে.^{2}। সুতরাং, এই ক্ষেত্রে, গাড়ীটির ত্বরণ : (11/90) ফু./সে^{2}.

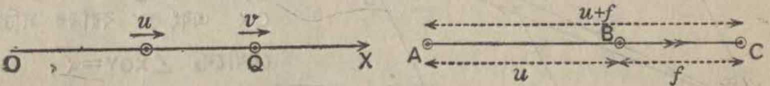
সাধারণভাবে, সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর বেগ কোন এক মুহূর্তে u এবং ইহার t সেকেণ্ড পরে উহার বেগ v হইলে, ইহার ত্বরণ হইবে : $(v-u)/t$.

(h) অসম ত্বরণের ক্ষেত্রে, কোন এক মুহূর্ত্তে ইহার পরিমাপ নির্ণয় পদ্ধতি :

অসম ত্বরণে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে, কোন এক নির্দিষ্ট মুহূর্ত্তে ত্বরণের পরিমাপ হইবে, "কোন এক অতি ক্ষুদ্র অবকাশের অন্তর্গত সেই মুহূর্ত্ত হইলে, সেই ক্ষুদ্র অবকাশের গড় ত্বরণের সীমান্ত মান।"

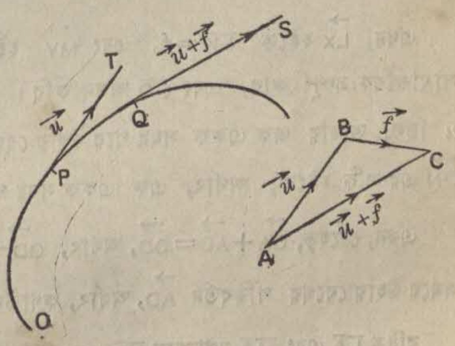
4·2. ত্বরণের জ্যামিতিক প্রদর্শন (Geometrical representation of acceleration).

(a) মনে করি, একটি কণা $\overrightarrow{OX}$ সরলরেখায় গতিশীল ; এবং কোন এক মুহূর্তে P এতে উহার বেগ u এবং ইহার একক সময় পরে Qএতে উহার বেগ v. তাহা হইলে, $v=u+f$ $(f>0)$.



মনে করি, নির্ধারিত এককের সাহায্যে $\overline{AB}=u$; $\overline{AC}=u+f$; যেখানে, $\overline{BC}=f$, এবং $\overrightarrow{PQ}$ এর সমান্তরাল (বা একই দিকে) $\overrightarrow{AC}$. তাহা হইলে, $\overline{BC}=f$, এবং একক সময়ে বেগের পরিবর্তন f. সুতরাং, এখন, $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টর $\overrightarrow{PQ}$ এর দিকে ত্বরণ f কে সূচিত করিবে।

(b) মনে করি, একটি কণা OPQ বক্রপথে গতিশীল ; এবং কোন এক মুহূর্তে উহার বেগ $\vec{u}$; এবং ইহার এক একক সময় পরে উহার বেগ $\vec{v}=\vec{u}+\vec{f}$.



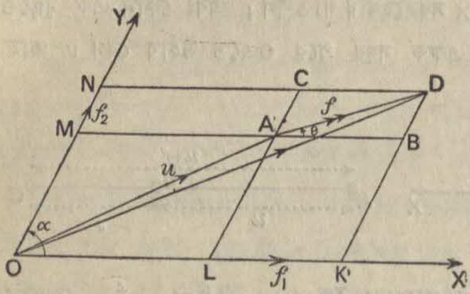
মনে করি, কণাটির বেগ P এতে $\overrightarrow{PT}$ এবং Q এতে $\overrightarrow{QS}$.

এখন, $\overline{PT}$ এর সমান এবং সমান্তরাল $\overline{AB}$ এবং $\overline{QS}$ এর সমান এবং সমান্তরাল $\overline{AC}$ হইলে, $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{f}$ হইবে। এখন, $\overline{BC}$ অঙ্কন করি।

যেহেতু, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ (ভেক্টর চিহ্নে), $\therefore$ $\overrightarrow{BC}=\vec{f}$ হইবে।

তাহা হইলে, একক সময়ে বেগের পরিবর্তন $\overrightarrow{BC}$, অর্থাৎ, $\vec{f}$ হইবে। সুতরাং, এখন $\overrightarrow{BC}$, ত্বরণ $\vec{f}$ কে সূচিত করিবে।

4-3. একটি কণার উপরে যুগপৎ ক্রিয়াশীল দুইটি সমত্বরণের লব্ধি নির্ণয় :



মনে করি, কোন গতিশীল কণার উপরে যুগপৎ দুইটি সমত্বরণ f_1 এবং f_2 যথাক্রমে $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ বরাবর সক্রিয় যেখানে, $\angle XOY=\alpha$; এবং কোনও এক মুহূর্তে, ঐ কণাটির বেগ $\overrightarrow{OA}$, যেখানে $\overline{OA}=u$; অপিচ, f_1, f_2, u একই এককে প্রকাশিত।

এখন, OLAM সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি ; যেখানে, $\overline{OX}$ এর উপর L এবং $\overline{OY}$ এর উপর M অবস্থিত। তাহা হইলে, $\overrightarrow{OL}$ এবং $\overrightarrow{OM}$ যথাক্রমে $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ বরাবর $\overrightarrow{OA}$ বেগের উপাংশ হইবে।

এখন, $\overrightarrow{LX}$ হইতে $\overline{LK}=f_1$ এবং $\overrightarrow{MY}$ হইতে $\overline{MN}=f_2$ লইয়া OKDN সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি, এবং $\overline{OD}$ অঙ্কন করি। তাহা হইলে, কণাটির বেগ যখন u ছিল, তাহার এক একক সময় পরে উহার বেগ যুগপৎ ক্রিয়াশীল বেগদ্বয় $\overrightarrow{OK}$ এবং $\overrightarrow{ON}$ এর লব্ধি হইবে ; অর্থাৎ, এক একক সময় পরে উহার বেগ $\overrightarrow{OD}$ হইবে।

এখন, যেহেতু, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}$, অর্থাৎ, $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}$, সুতরাং এক একক সময়ে উহার বেগের পরিবর্তন $\overrightarrow{AD}$, অর্থাৎ, কণাটির লব্ধি-ত্বরণ $\overrightarrow{AD}$ হইবে।

বর্ধিত $\overline{LA}$ এবং $\overline{MA}$ যথাক্রমে $\overline{ND}$ এবং $\overline{KD}$ কে C এবং B বিন্দুতে ছেদ করিলে, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{f_1}$, এবং $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{f_2}$ হইবে। আবার, যেহেতু, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ $=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ (ভেক্টর চিহ্নে). সুতরাং, $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{AD}$.

সুতরাং, একটি কণার যুগপৎ দুইটি সমত্বরণ থাকিলে, যাহারা মানে ও দিকে একটি সামন্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা নির্দেশিত, তাহা হইলে, ঐ ত্বরণদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক্ ঐ সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা নির্দেশিত হইবে।

অতএব, $\overline{AD}=f$ (মানে) হইলে,

$$f=\sqrt{(f_1^2+f_2^2+2f_1f_2\cos\alpha)};$$

$$\theta=\tan^{-1}\left\{\frac{f_2\sin\alpha}{f_1+f_2\cos\alpha}\right\}; \ (\angle BAD=\theta).$$

দ্রষ্টব্য : (i) $\alpha=0$ হইলে, $f=f_1+f_2$;

(ii) $\alpha=\pi$ হইলে, $f=f_1-f_2, (f_1>f_2)$;

অথবা, $f=f_2-f_1, (f_2>f_1)$;

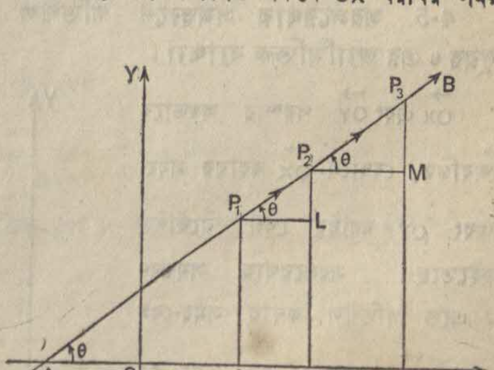
(iii) $\alpha=\pi/2$ হইলে, $f=\sqrt{f_1^2+f_2^2}$;

(iv) $f_2=f_1$ হইলে, $f=2f_1\cos\frac{1}{2}\alpha$; $\theta=\frac{1}{2}\alpha$.

4-4. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল কণার সময়-বেগ লেখ এবং সমত্বরণের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা।

মনে করি, সরলরেখায় সমত্বরণ 'f' এতে একটি কণা গতিশীল ; এবং t_1, t_2, t_3 সময়ে উহার বেগ যথাক্রমে v_1, v_2, v_3.

$\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ কে পরস্পর লম্বভাবে লই, এবং নির্ধারিত এককে $\overrightarrow{OX}$ বরাবর সময় ও $\overrightarrow{OY}$ বরাবর বেগ নির্দেশ করি। মনে করি, $\overline{OA_1}=t_1$; $\overline{OA_2}=t_2$; $\overline{OA_3}=t_3$; এবং $\overline{A_1P_1}=v_1$; $\overline{A_2P_2}=v_2$; $\overline{A_3P_3}=v_3$; যেখানে, $\overline{A_1P_1}$, $\overline{A_2P_2}$, $\overline{A_3P_3}$ এর প্রত্যেকটি $\overrightarrow{OY}$ এর সমান্তরাল। এখন, $\overrightarrow{OX}$ এর সমান্তরাল $\overline{P_1L}$ ও $\overline{P_2M}$



অঙ্কন করি ; এবং $\overline{P_1P_2}$ ও $\overline{P_2P_3}$ অঙ্কন করি। তাহা হইলে, $\overline{P_1L}=t_2-t_1$; $\overline{P_2M}=t_3-t_2$; এবং $\overline{LP_2}=v_2-v_1$; $\overline{MP_3}=v_3-v_2$.

এখন, $\overline{LP_2}/\overline{P_1L}=(v_2-v_1)/(t_2-t_1)$ = একক সময়ে বেগের পরিবর্তন = ত্বরণ $=f$; এবং $\overline{MP_3}/\overline{P_2M}=(v_3-v_2)/(t_3-t_2)$ = একক সময়ে বেগের পরিবর্তন = ত্বরণ $=f$.

$\therefore\ \overline{LP_2}/\overline{P_1L}=\overline{MP_3}/\overline{P_2M}$.

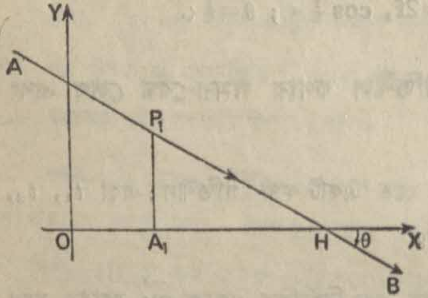
আবার, $\angle P_2LP_1=\angle P_3MP_2=90°$.

সুতরাং, $\triangle P_2LP_1$ এবং $\triangle P_3MP_2$ সদৃশ।

$\therefore\ \angle P_2P_1L=\angle P_3P_2M$; অর্থাৎ, P_1, P_2, P_3 একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সুতরাং, সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল কণার সময়-বেগ লেখ একটি সরলরেখা ; এবং t-অক্ষের সহিত উহা ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণে নত, (f>0).

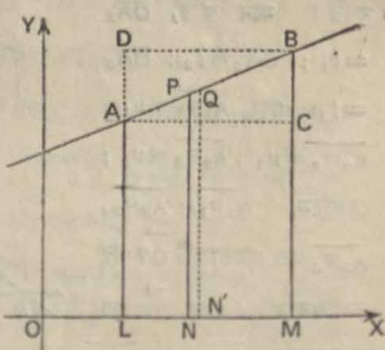
মনে করি, এই সরলরেখা $\overrightarrow{OX}$ এর ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে।



তাহা হইলে, $f=\overline{LP_2}/\overline{P_1L}=\tan\theta$, (>0).

অনুরূপ পদ্ধতিতে দেখানো যাইবে, সরলরেখার **সমমন্দনে** গতিশীল কণার সময়-বেগ লেখ একটি সরলরেখা, যাহা t-অক্ষের সহিত ঋণাত্মক সূক্ষ্মকোণে নত।

4-5. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল কণার t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব s এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা।



$\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত, যেখানে $\overrightarrow{OX}$ বরাবর সময়, এবং OY বরাবর বেগ নির্দেশিত হইতেছে। সরলরেখায় সমত্বরণ f এতে গতিশীল কণার সময়-বেগ লেখ, $\overleftrightarrow{AB}$. মনেকরি, t_1 এবং t_2 সময়ে কণাটির বেগ যথাক্রমে v_1 এবং v_2. চিত্রে, $\overline{OL}=t_1$; $\overline{OM}=t_2$; এবং $\overline{LA}=v_1$ এবং $\overline{MB}=v_2$; যেখানে, $\overline{LA}$ এবং $\overline{MB}$, $\overrightarrow{OY}$ এর সমান্তরাল। এখন $\overline{AC}$ ও $\overline{DB}$, $\overrightarrow{OX}$ এর সমান্তরাল অঙ্কন করি ;

যেখানে $\overline{MB}$ এর উপর C এবং বর্ধিত $\overline{LA}$ এর উপর D অবস্থিত। কণাটি v_1 সমবেগে (t_2-t_1) অবকাশে চলিলে, তখন উহা মোট দূরত্ব $v_1(t_2-t_1)$ অতিক্রম করিত, যাহা ALMC আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান। আবার, কণাটি v_2 সমবেগে (t_2-t_1) অবকাশে চলিলে, তখন উহা মোট দূরত্ব $v_2(t_2-t_1)$ অতিক্রম করিত, যাহা DLMB আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

মনেকরি, t সময়ে উহার বেগ v এবং চিত্রে $\overline{ON}=t$, $\overline{NP}=v$.

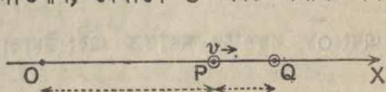
এখন dt অবকাশে কণাটি v সমবেগে চলিলে, ঐ ক্ষুদ্র অবকাশে উহারা অতিক্রান্ত পথের দূরত্ব (দৈর্ঘ্য) হইবে $v\,dt$.

$\therefore$ (t_2-t_1) অবকাশে কথাটির অতিক্রান্ত পথ s হইলে,

$$s=\int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \text{ট্রাপিজিয়াম ALMB এর ক্ষেত্রফল।}$$

4-6. সরলরেখায় গতিশীল কণার ত্বরণের বৈশ্লেষিক প্রকাশ।

মনে করি, একটি কণা $\overrightarrow{OX}$ বরাবর গতিশীল, যেখানে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। ধরা যাক্, যে কোন সময় t এতে কণাটি P এতে এবং $(t+\Delta t)$ সময়েতে উহা Q এতে অবস্থিত,



যেখানে, $\overline{OP}=x$; $\overline{OQ}=x+\Delta x$, $(\Delta x>0)$. তাহা হইলে, Δt সময়ে কণাটির সরণ : $\overline{PQ}=\Delta x$.

$\therefore$ P অবস্থানে কণাটির বেগ

$$= \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \overline{PQ}/\Delta t = \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}.$$

সুতরাং, P অবস্থানে কণাটির বেগ v এবং Q অবস্থানে কণাটির বেগ $v+\Delta v$ হইলে,

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

আবার, P অবস্থানে কণাটির ত্বরণ

$$= \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{(v+\Delta v)-v}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}.$$

সুতরাং, P অবস্থানে কণাটির ত্বরণ f হইলে,

$$\mathbf{f}=\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

অধিকন্তু, যেহেতু, $v=\frac{dx}{dt}$,

$$\therefore \quad f=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

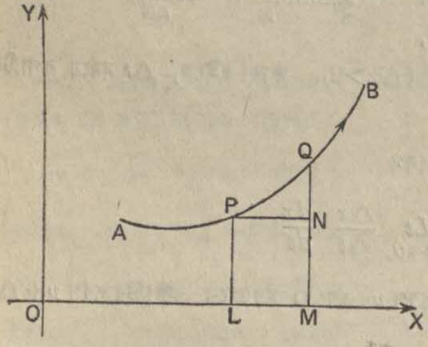
আবার, $f=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$.

$$\therefore \quad \mathbf{f}=\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}=\frac{\mathbf{d^2x}}{\mathbf{dt^2}}=\mathbf{v}\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dx}}. \quad \ldots \quad (3)$$

দ্রষ্টব্য ঃ $\frac{dx}{dt}$ এবং $\frac{d^2x}{dt^2}$ এর ধনাত্মক দিক্ হইবে, যে দিকে x বৃদ্ধি পাইবে।

4-7. বক্ররেখায় গতিশীল কণার ত্বরণের বৈশ্লেষিক প্রকাশ।

মনে করি, একটি কণা কোন সমতলে AB বক্রপথে গতিশীল। ঐ সমতলে $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ লম্বভাবে অবস্থিত এবং উহারা যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষকে সূচিত করে। মনে করি, যে কোন সময় t এতে কণাটি P(x, y) এতে এবং $(t+\Delta t)$ সময়েতে উহা Q$(x+\Delta x, \ y+\Delta y)$ এতে অবস্থিত। $\overline{PL}$ ও $\overline{QM}$, $\overrightarrow{OX}$ এর উপর লম্ব এবং $\overline{PN}$, $\overrightarrow{OX}$ এর সমান্তরাল টানি; (N, QM এর উপরিস্থ)। তাহা হইলে, $\overline{PN}=\Delta x$ এবং $\overline{NQ}=\Delta y$.



P এতে কণাটির বেগ v এবং উহার উপাংশ $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ বরাবর যথাক্রমে v_x এবং v_y হইলে,

$$\mathbf{v}_x=\underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}};$$

$$v_y = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt};$$

$$v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}};$$

এবং ইহার দিক্ x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করিলে,

$$\tan \theta = v_y/v_x = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}.$$

এখন, মনে করি, P এতে কণাটির ত্বরণ f এবং $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ বরাবর উহার উপাংশ যথাক্রমে f_x ও f_y. তাহা হইলে,

$$f_x = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{d}{dt} v_x = \frac{d^2x}{dt^2};$$

$$f_y = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{d}{dt} v_y = \frac{d^2y}{dt^2};$$

$$f = \sqrt{(f_x^2 + f_y^2)} = \sqrt{\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2\right\}};$$

এবং লব্ধি ত্বরণ x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত ϕ কোণ উৎপন্ন করিলে,

$$\tan \phi = f_y/f_x = \frac{d^2y}{dt^2}\Big/\frac{d^2x}{dt^2}.$$

4-8. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ।

উদাহরণ 1. একটি রেলগাড়ী সোজা রেলপথে সমত্বরণে চলাকালে, 15 মিনিটে উহার বেগ 'ঘণ্টায় 25 মাইল' হইতে বৃদ্ধি পাইয়া 'ঘণ্টায় 55 মাইল' হইল। 'গজ-সেকেণ্ড-মিনিটে' উহার ত্বরণ নির্ণয় কর।

এখানে 15 মিনিটে বেগের মোট পরিবর্তন : ঘণ্টায় (55 − 25) মাইল ; অর্থাৎ, সেকেণ্ডে 44/3 গজ।

∴ নির্ণেয় ত্বরণ : মিনিটে '44/45 গজ/সেকেণ্ড'

উদাহরণ 2. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা t সেকেণ্ডে ঐ রেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে x সেন্টিমিটার দূরত্ব অতিক্রম করে, যেখানে,

$$x = a + bt + \tfrac{1}{2}ct^2, \ (a, b, c > 0).$$

$a, b,$ c এর অর্থ নির্দেশ কর।

(i) $c=0$, অথবা, (ii) $c<0$ হইলে, কণাটির গতি কিরূপ প্রকৃতির হইবে ? $t=0$ এতে কণাটি কোথায় ছিল ?

এখানে, $x=a+bt+\frac{1}{2}ct^2$. ... ... (1)

$$\therefore \frac{dx}{dt}=b+ct\ ;\ \frac{d^2x}{dt^2}=c. \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

সুতরাং, কণাটির ত্বরণ $=c$ সে. মি./সে.^{2}।

আবার, $t=0$ এতে $\frac{dx}{dt}$ এর মান $=b.$

সুতরাং, $t=0$ এতে কণাটির বেগ ছিল : b সে. মি./সে.।

অপিচ, (1) হইতে, $t=0$ এতে $x=a.$

সুতরাং, $t=0$ এতে কণাটি যে সরলরেখায় গতিশীল, তাহার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে a সে. মি. দূরত্বে ছিল।

(i) $c=0$ হইলে, $\frac{d^2x}{dt^2}=0$; অর্থাৎ কণাটি সমবেগে গতিশীল হইবে ।

(ii) $c<0$ হইলে, $\frac{d^2x}{dt^2}<0$; অর্থাৎ, কণাটি সমমন্দনে গতিশীল হইবে।

$t=0$ এতে, কণাটি যে সরলরেখায় গতিশীল, তাহার উপরিস্থ পূর্বোক্ত নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে a সে. মি. দূরত্বে ছিল।

উদাহরণ 3. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা যদি t সেকেণ্ডের সময়ে উহার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে x ফুট দূরত্বে থাকে, যেখানে $x=5+24t-3t^2$, তবে কণাটি সমত্বরণে, না সমমন্দনে, না অসমত্বরণে গতিশীল ? 3 সেকেণ্ড পরে এবং 5 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ কত ছিল এবং তখন উহা কত দূরত্ব অতিক্রম করিয়াছিল ? কণাটি স্থিরাবস্থায় আসিবার পূর্বে কত দূরত্ব অতিক্রম করিয়াছিল ?

এখানে, $x=5+24t-3t^2$. ... ... (1)

$$\therefore \frac{dx}{dt}=24-6t\ ;\ \frac{d^2x}{dt^2}=-6. \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

যেহেতু, t এর যে কোন মান (ধনাত্মক) এর জন্য $\frac{d^2x}{dt^2}$ এর মান ধ্রুবক এবং ঋণাত্মক, সুতরাং, কণাটি সমমন্দনে গতিশীল ; এবং ঐ সমমন্দন : 6 ফু./সে.^{2}.

$t=3$ এর জন্য, $\frac{dx}{dt}=24-6\times3=6$. সুতরাং, 3 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ ছিল : 6 ফু./সে.।

যেহেতু, $t=0$ এর জন্য, $x=5$; এবং $t=3$ এর জন্য, $x=5+24\times3-3\times9=50$; সুতরাং, 3 সেকেণ্ডে কণাটি $(50-5)$ ফুট, অর্থাৎ, 45 ফুট, অতিক্রম করিয়াছিল।

আবার, $t=5$ এর জন্য $\frac{dx}{dt}=24-6\times5=-6$; এবং

$x=5+24\times5-3\times25=50.$

সুতরাং, 5 সেকেণ্ড পরে কণাটির বিপরীতমুখী বেগ ছিল 6 ফু./সে. ; এবং তখন, উহা $(50-5)$ ফুট, অর্থাৎ, 45 ফুট দূরত্ব **(displacenent)** অতিক্রম করিয়াছিল।

যেহেতু, $\frac{dx}{dt}=0$, যখন $t=4$, সুতরাং, 4 সেকেণ্ড পরে কণাটি স্থিরাবস্থায় আসিয়াছিল ; এবং তখন, উহা $(5+24\times4-3\times16-5)$ ফুট, অর্থাৎ, 48 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করিয়াছিল।

উদাহরণ 4. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার ত্বরণ t সময়ে $8-0{\cdot}15t^2$. যদি $t=0$ এতে উহা স্থিরাবস্থায় থাকে, এবং সেই মুহূর্তে কণাটি যেখানে ছিল সেইখান হইতে দূরত্ব মাপা হয়, তবে 10 সেকেণ্ড পরে উহা কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে এবং তখন উহার বেগ কত হইবে ?

মনে করি, t সময়ে কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব x ছিল। তাহা হইলে,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=8-0{\cdot}15t^2. \qquad \cdots \quad (1)$$

সুতরাং, ইহাকে সমাকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dx}{dt}=8t-\frac{1}{20}t^3+K$$

কিন্তু, প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\frac{dx}{dt}=0$ যখন $t=0$; $\therefore\ K=0.$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=8t-\frac{1}{20}t^3. \qquad \cdots \quad (2)$$

ইহাকে সমাকলন করিয়া পাই,

$$x=4t^2-\frac{1}{80}t^4+C.$$

কিন্তু, প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x=0$ যখন $t=0$. $\therefore \quad C=0$.

$$\therefore \quad x=4t^2-\frac{1}{80}t^4. \qquad \cdots \quad (3)$$

এখন, $t=10$ হইলে, $\frac{dx}{dt}=30$; $x=275$.

সুতরাং, 10 সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ : 30 একক এবং দূরত্ব : 275 একক।

উদাহরণ 5. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা 2 সেকেণ্ডে, 5 সেকেণ্ডে ও 10 সেকেণ্ডে যথাক্রমে 14 সে. মি., 77 সে. মি. ও 3 মি. 2 সে. মি. দূরত্ব অতিক্রম করিলে, 6 সেকেণ্ডে উহা কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে এবং তখন উহার বেগ কত হইবে ?

মনে করি, কণাটির ত্বরণ : f সে. মি./সে.^{2} ; এবং যে সরলরেখায় উহা গতিশীল, t সেকেণ্ড পরে তাহার উপরিস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু O হইতে উহা x সে. মি. দূরত্বে থাকিবে।

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2}=f.$$

ইহাকে সমাকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dx}{dt}=b+ft\ ;$$

$$\text{এবং } x=a+bt+\tfrac{1}{2}ft^2.$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$14=a+2b+2f\ ;$$
$$77=a+5b+25f/2\ ;$$
$$302=a+10b+50f.$$

ইহাদের সমাধান করিয়া পাই, $a=2$, $b=0$, $f=6$.

$$\therefore \quad x=2+3t^2\ ; \quad \frac{dx}{dt}=6t\ ; \quad \frac{d^2x}{dt^2}=6.$$

তাহা হইলে, $t=6$ হইলে, $x=110$; $\frac{dx}{dt}=36$.

সুতরাং, নির্ণেয় দূরত্ব : 110 সেন্টিমিটার, এবং নির্ণেয় বেগ : 36 সে. মি./সে.

উদাহরণ 6. সরলরেখায় এমন ভাবে একটি কণা গতিশীল যে, t সময়ে ঐ রেখার উপরিস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহা s দূরত্বে থাকে, যেখানে

$$s^2=at^2+2bt+c,$$

$a, b, c=$ ধ্রুবক রাশি। দেখাও যে, উহার ত্বরণ s^3 এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকিবে।

এখানে, দেওয়া আছে :

$$s^2=at^2+2bt+c. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$s\frac{ds}{dt}=at+b \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

পুনরায় ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$s\frac{d^2s}{dt^2}+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=a \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$$\therefore \quad s\frac{d^2s}{dt^2}=a-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=a-\left(\frac{at+b}{s}\right)^2$$

$$=\frac{as^2-(at+b)^2}{s^2}$$

$$=\frac{a(at^2+2bt+c)-(at+b)^2}{s^2}=\frac{ac-b^2}{s^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{(ac-b^2)}{s^3}\text{ ; অর্থাৎ, } \frac{d^2s}{dt^2}\propto\frac{1}{s^3}.$$

উদাহরণ 7. বক্ররেখায় গতিশীল একটি কণা t সময়ে $P(x, y)$ এতে অবস্থিত, যেখানে, $x=a\cos nt$; $y=a\sin nt$. কণাটির বেগ ও ত্বরণের পরিমাপ নির্ণয় কর। দেখাও যে, কণাটির পথ একটি বৃত্ত।

এখানে, $x=a\cos nt$; $y=a\sin nt$. $\cdots$ (1)

$$\frac{dx}{dt}=-an\sin nt\text{ ; }\frac{dy}{dt}=an\cos nt\text{ ;} \quad \cdots \quad (2)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-an^2\cos nt\text{ ; }\frac{d^2y}{dt^2}=-an^2\sin nt \quad \cdots \quad (3)$$

$$\therefore \quad v=\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}=an\text{ ; (মানে) ;}$$

$$f=\sqrt{\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2\right\}}=an^2\text{ ; (মানে)}$$

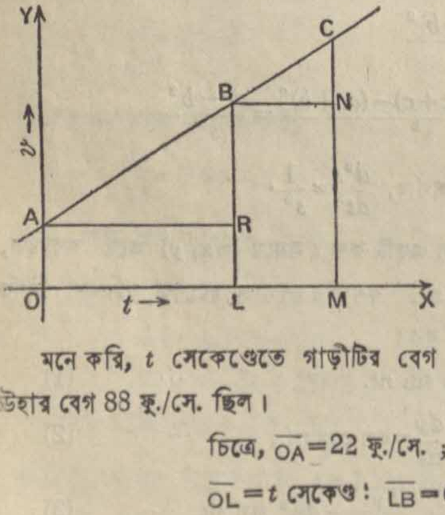
সুতরাং, কণাটির বেগ ও ত্বরণের পরিমাপ যথাক্রমে : an একক এবং an^2 একক।

এখন, (1) হইতে t অপনয়ন করিয়া পাই, $x^2+y^2=a^2$.

$\therefore$ কণাটির পথের সমীকরণ : $x^2+y^2=a^2$, যাহা একটি বৃত্ত।

উদাহরণ 8. সোজাপথে সমত্বরণে দ্রুতগামী একটি রেলগাড়ীর আধ মাইল যাইতে উহার বেগ ঘণ্টায় 15 মাইল হইতে বেগ ঘণ্টায় 45 মাইল হয়। উহার প্রারম্ভিক বেগ 15 মা./ঘ. হইলে, কত সময় পরে উহার বেগ 45 মা./ঘ. হইয়াছিল ? ইহার কত সময় পরে গাড়ীটির বেগ 60 মা./ঘ. হইবে ?

যেহেতু গাড়ীটি সমত্বরণে গতিশীল, ইহার গতির সময়-বেগ লেখ একটি সরলরেখা $\overrightarrow{AC}$ হইবে, যেখানে, $\overrightarrow{OX}$ সময়-সূচক অক্ষ এবং $\overrightarrow{OY}$ বেগ-সূচক অক্ষ। চিত্রে, $\overline{BL}$, $\overline{CM}$, উভয়ে $\overrightarrow{OY}$ এর সমান্তরাল এবং $\overline{BN} \parallel \overline{LM}$; এবং $\overline{AR} \parallel \overline{OL}$; (L, M বিন্দুদ্বয় OX এর উপরিস্থ)।



বেগ : ঘণ্টায় 15 মাইল
=22 ফু./সে. ;
বেগ : ঘণ্টায় 45 মাইল
=66 ফু./সে. ;
বেগ : ঘণ্টায় 60 মাইল
=88 ফু./সে. ;
$\frac{1}{2}$ মাইল $=\frac{1}{2}\times 1760\times 3$ফু.
=2640 ফুট।

মনে করি, t সেকেণ্ডেতে গাড়ীটির বেগ 66 ফু./সে. ; এবং t_1 সেকেণ্ডেতে উহার বেগ 88 ফু./সে. ছিল।

চিত্রে, $\overline{OA}=22$ ফু./সে. ;

$\overline{OL}=t$ সেকেণ্ড ; $\overline{LB}=66$ ফু./সে. ;

$\overline{OM}=t_1$ সেকেণ্ড ; $\overline{MC}=88$ ফু./সে.

এখন, t সেকেণ্ডে সরণ

=ট্রাপিজিয়াম OLBA এর ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{LB})\times\overline{OL}$

$=\frac{1}{2}(22+66)\times t$ ফুট

$=2640$ ফুট, (প্রদত্ত শর্তানুসারে)।

$\therefore\ 44t=2640$; বা, $t=60.$

সুতরাং, 60 সেকেণ্ডে অর্থাৎ এক মিনিটে গাড়ীটির বেগ ঘণ্টায় 60 মাইল হইয়াছিল।

আবার, $\triangle ABR$ এবং $\triangle BCN$ সদৃশ বলিয়া,

$\overline{AR}/\overline{BN}=\overline{RB}/\overline{NC}$

বা, $t/(t_1-t)=44/22$

বা, $60=2\times(t_1-60).\quad \therefore\ t_1=90.$

তাহা হইলে, $t_1-t=90-60=30.$

সুতরাং, আরও 30 সেকেণ্ড পরে, গাড়ীর বেগ ঘণ্টায় 60 মাইল হইবে।

উদাহরণ 9. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার ঐ সরলরেখার উপরিস্থ একটি বিন্দু O হইতে x দূরত্বে ত্বরণ n^2x এবং তাহা O অভিমুখী। যদি $t=0$ সময়ে $x=a$ এবং উহার বেগ u থাকে, তবে দেখাও যে, যে কোন সময় t এতে উহার দূরত্ব x হইলে,

$$x=a\cos nt+\frac{u}{n}\sin nt.$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-n^2x. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, (1) হইতে পাই,

$$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-2n^2x\frac{dx}{dt}.$$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে সমাকলন করিয়া পাই,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=C-n^2x^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

যেহেতু, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

কণাটির বেগ u যখন $x=a$,

$\therefore\ u^2=C-n^2a^2.$

সুতরাং,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = u^2 + n^2a^2 - n^2x^2 = n^2(k^2 - x^2),$$

যেখানে, $k = \sqrt{a^2 + u^2/n^2}$. ... (3)

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \pm n\sqrt{(k^2 - x^2)}. \qquad \cdots \qquad (4)$$

বা, $\mp \dfrac{dx}{\sqrt{(k^2 - x^2)}} = ndt$

ইহাকে সমাকলন করিয়া পাই,

$$\pm \cos^{-1}\frac{x}{k} = nt - A.$$

$$\therefore \quad \cos\left(\pm \cos^{-1}\frac{x}{k}\right) = \cos(nt - A);$$

বা, $x = k\cos(nt - A)$. ... (5)

আবার, প্রদত্ত শর্তানুসারে, $t = 0$ এতে $x = a$.

$\therefore \quad a = k\cos A$; $(0 < A < \pi/2)$. ... (6)

তখন, (3) এবং (6) হইতে,

$$a^2 = k^2\cos^2 A = k^2 - k^2\sin^2 A$$
$$= a^2 + u^2/n^2 - k^2\sin^2 A$$

$\therefore \quad k\sin A = u/n, \qquad (\because \quad 0 < A < \pi/2)$.

$$\therefore \quad x = k\cos(nt - A)$$
$$= (k\cos A)\cos nt + (k\sin A)\sin nt$$
$$= a\cos nt + \frac{u}{n}\sin nt.$$

উদাহরণ 10. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা t_1, t_2, t_3 সময় পরে ঐ সরলরেখায় উপস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে যথাক্রমে a, b, c দূরত্বে থাকে। যদি t_1, t_2, t_3 A. P. তে এবং a, b, c, G. P. তে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, কণাটির ত্বরণ :

$$\frac{(\sqrt{c} - \sqrt{a})^2}{(t_2 - t_1)^2}.$$

মনে করি, $t_2=t_1+d$; $t_3=t_1+2d$; এবং $b=ar$; $c=ar^2$.

কণাটির ত্বরণ f (ধ্রুবক) হইলে, এবং t সময়ে ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব x হইলে,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f \quad \cdots \quad (1)$$

$$\therefore \; x=\tfrac{1}{2}ft^2+At+B. \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$a=\tfrac{1}{2}ft_1^2+At_1+B \; ; \quad \cdots \quad (3)$$

$$b=ar=\tfrac{1}{2}ft_2^2+At_2+B$$
$$=\tfrac{1}{2}f(t_1+d)^2+A(t_1+d)+B \; ; \quad \cdots \quad (4)$$

$$c=ar^2=\tfrac{1}{2}ft_3^2+At_3+B$$
$$=\tfrac{1}{2}(t_1+2d)^2+A(t_1+2d)+B. \quad \cdots \quad (5)$$

(3) এবং (4) হইতে পাই,

$$a(r-1)=\tfrac{1}{2}f(2t_1+d)d+Ad. \quad \cdots \quad (6)$$

(3) এবং (5) হইতে পাই,

$$a(r^2-1)=\tfrac{1}{2}f(2t_1+2d)\,2d+2Ad. \quad \cdots \quad (7)$$

তখন, (6) এবং (7) হইতে পাই,

$$f=\frac{a(r-1)^2}{d^2}=\frac{a(r-1)^2}{(t_2-t_1)^2}. \quad \cdots \quad (8)$$

কিন্তু, $c=ar^2$. $\therefore \; (r-1)^2=(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2/a.$ $\cdots$ (9)

$$\therefore \; f=(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2/(t_2-t_1)^2.$$

প্রশ্নমালা 4

1. সোজা রেলপথে সমত্বরণে দ্রুতগামী একটি রেলগাড়ীর বেগ 22 সেকেণ্ডে 15 মা./ঘ. হইতে 60 মা./ঘ. তে বৃদ্ধি পাইল। 'ফুট সেকেণ্ড-সেকেণ্ড' এতে উহার ত্বরণ নির্ণয় কর।

2. সরলরেখায় সমত্বরণে দ্রুতগামী একটি গাড়ীর বেগ আধ ঘণ্টায় 30 মা./ঘ. হইতে 60 মা./ঘ. তে পরিণত হইলে, উহার ত্বরণ "ফুট মিনিট-মিনিট" এতে নির্ণয় কর।

3. সরলরেখায় একটি কণা সমত্বরণে গতিশীল। (সময়ের একক এক সেকেণ্ড এবং দৈর্ঘ্যের একক এক ফুট হইলে, কণাটির ত্বরণ 4 একক হয়। ঐ ত্বরণ "ফুট-মিনিট-মিনিট" এককে কত হইবে ?

4. সরলরেখায় একটি কণা সমত্বরণে গতিশীল। সময়ের একক মিনিট এবং দৈর্ঘ্যের একক গজ হইলে, কণাটির ত্বরণ 15 একক হয়। "ফুট-সেকেণ্ড-সেকেণ্ড" এতে কণাটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

5. যদি সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার সরণ t সেকেণ্ডে x ফুট হয়, যেখানে $x=5t+8t^2$, তবে কণাটি কি সমত্বরণে গতিশীল ? 5 সেকেণ্ডের সময়ে কণাটির বেগ এবং 5 সেকেণ্ডে উহার সরণ কত ?

6. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা t সেকেণ্ডে ঐ সরলরেখার উপরিস্থ একটি বিন্দু O হইতে x ফুট দূরত্বে থাকিলে, যেখানে, $x=2+3t+4t^3$, 4 সেকেণ্ড পরে O হইতে কত দূরত্বে কণাটি থাকিবে ? তখন উহার বেগ ও ত্বরণ কত হইবে ?

7. সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি কণা ঐ সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে গতি আরম্ভের t সেকেণ্ড পরে x ফুট দূরত্বে থাকে। যদি $x=5+6t+3t^2$ হয়, তবে 3 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ, 4 সেকেণ্ড পরে ত্বরণ এবং 5 সেকেণ্ডে সরণ কত হইবে? কণাটি কি সমত্বরণে গতিশীল ?

8. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা t সেকেণ্ড সময়ে s সে. মি. দূরত্ব অতিক্রম করে, যেখানে, $s=at^2+2bt+c, (a>0)$. দেখাও যে, কণাটি সমত্বরণে গতিশীল এবং যে কোন মুহূর্তে উহার ত্বরণ $(2a)$ সে. মি./সে.^{2}।

9. সরলরেখায় একটি কণা এমনভাবে গতিশীল যে, t সেকেণ্ডে উহা x সেমি. দূরত্ব অতিক্রম করে, যেখানে $x=5t-3t^2$. কণাটি কি সমত্বরণে গতিশীল ? 5 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ ও ত্বরণ কত হইবে ?

10. যদি সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা t সেকেণ্ডে s সে. মি. দূরত্ব অতিক্রম করে, যেখানে, $s=63t-6t^2-t^3$, তবে কণাটি কি সমত্বরণে গতিশীল ? 2 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ কত হইবে ? স্থিরাবস্থায় আসিবার পূর্বে কণাটি কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে ?

11. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা (রেখাটির) উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু) O হইতে t সেকেণ্ডে x ফুট দূরত্বে থাকে, যেখানে $x=0{\cdot}2t^2+3t+10{\cdot}4$. কণাটি চলিতে আরম্ভ করার 5 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর;

এবং যখন কণাটি 50 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে তখন উহার বেগ নির্ণয় কর। উহার গতির প্রথম 10 সেকেণ্ড সময়ের গড় বেগ বাহির কর।

12. স্থিরাবস্থা হইতে সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি কণার ত্বরণ t সেকেণ্ডে $\left\{3 \sin t+\frac{1}{(t+1)^2}\right\}$ ফুট/সেকেণ্ড^2। ঐ সময়ে কণাটি কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে?

13. সরলরেখায় একটি কণা সমত্বরণে গতিশীল, এবং সময় ও দৈর্ঘ্যের একক যথাক্রমে মিনিট ও গজ হইলে, উহার ত্বরণ 150 একক। স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা আরম্ভ করিয়া থাকিলে, 16 সেকেণ্ডে কণাটি কত পথ অতিক্রম করিবে?

[W. B. H. S. 1967]

14. নির্দ্দিষ্ট বেগে যাত্রা আরম্ভ করিয়া সরলরেখায় একটি কণা 6 সে. মি./সে.^{2} সমত্বরণে গতিশীল। যাত্রার 5 সেকেণ্ড পরে, উহার বেগ 45 সে. মি./সে. হইলে, উহার প্রারম্ভিক বেগ কত ছিল?

15. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার t সেকেণ্ডের সময়ে ত্বরণ : $12-0{\cdot}2t^2$. $t=0$ এতে উহার বেগ শূন্য হইলে, 15 সেকেণ্ডের সময়ে উহার বেগ ও সরণ কত হইবে, যদি কণাটি $t=0$ এতে $x=0$ এতে থাকে?

16. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা 0,1,2 সেকেণ্ডেতে ঐ সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু O হইতে যথাক্রমে 12 সে. মি., 19 সে. মি. ও 34 সে. মি. দূরত্বে থাকে। 5 সেকেণ্ডে কণাটি কত পথ অতিক্রম করে?

17. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা t সেকেণ্ডে s সে. মি. দূরত্ব অতিক্রম করে, যেখানে,

$$s=\begin{cases} 3t^2, \text{ যখন } 0\leq t\leq 1. \\ 6t, \text{ যখন } t>1. \end{cases}$$

কণাটির গতি-প্রকৃতি আলোচনা কর; এবং প্রথম 5 সেকেণ্ডের জন্য উহার গড় বেগ নির্ণয় কর।

18. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার t সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব x সে. মি. নিম্নোক্ত সমীকরণ দ্বারা প্রদত্ত :

$$x=\begin{cases} t^2+t^3, \text{ যখন } 0\leqslant t\leqslant 2, \\ 16t, \text{ যখন } t>2. \end{cases}$$

কণাটির গতি-প্রকৃতি আলোচনা কর এবং 0·5 সেকেণ্ডেতে উহার ত্বরণ নির্ণয় কর।

19. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা যাত্রা আরম্ভের t সেকেণ্ড পরে ঐ সরলরেখার উপরিস্থ O বিন্দু হইতে s সে. মি. দূরত্বে থাকে, যেখানে,

$s=a+bt+ct^2+dt^3$.

a, b, c, d ধনাত্মক ধ্রুবক হইলে, উহাদের অর্থ নির্দেশ কর।

(i) $d=0$ হইলে, দেখাও যে, $v^2-b^2=4c(s-a)$.

(ii) যদি $v^2=4s-s^2$ হয়, তবে দেখাও যে, $v^2+f^2=4$

20. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার t সেকেণ্ডে সরণ x ফুট এবং বেগ v ফু./সে.। যদি $x=\frac{1}{2}vt$ হয়, তবে দেখাও যে, কণাটি সমত্বরণে গতিশীল।

21. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা t সময়ে ঐ সরলরেখার উপরিস্থ একটি বিন্দু O হইতে x দূরত্বে থাকে; এবং তখন উহার বেগ v হয়। যদি $v^2=ax^2+2bx+c$ হয়, যেখানে a, b, c ধ্রুবক, তবে দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ A হইতে উহার দূরত্বের সরলভেদে আছে, যেখানে A বিন্দুটি গতিপথের উপরিস্থ, এবং O হইতে b/a একক পিছনে অবস্থিত। t সময়ে উহার ত্বরণ f হইলে, দেখাও যে, $f^2-av^2=b^2-ac$.

22. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে, যেখানে, $t=as^2+bs, (a,b>0), (a, b$ –ধ্রুবক)। দেখাও যে, কণাটি $2av^3$ মন্দনে গতিশীল।

আরও দেখাও যে, $t=0$ এতে $v=c\neq 0$ হইলে, $\dfrac{1}{v^2}-\dfrac{1}{c^2}=4at$.

23. বক্ররেখায় গতিশীল একটি কণা t সময়ে $P(x, y)$ এতে অবস্থিত হইলে, যেখানে, $x=a\cos\mu t$ এবং $y=b\sin\mu t$, কণাটির পথের সমীকরণ বাহির কর; এবং উহার প্রারম্ভিক অবস্থান নির্দেশ কর। $t=0$ সময়ে, উহার বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

24. একটি কণা t সময়েতে $P(x, y)$ এতে অবস্থিত হইলে, যেখানে $x=a(2t+\sin 2t)$; $y=a(1-\cos 2t)$. দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ ধ্রুবক। ইহা কি সমত্বরণে গতিশীল ?

25. একটি কণা xy-সমতলে এমনভাবে ভ্রমণ করে যে, (x, y) অবস্থানে Ox, Oy অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল উহার বেগ যথাক্রমে $-n^2y$ এবং $-n^2x$. যদি প্রারম্ভে কণাটি (a, o) এতে থাকে, তবে দেখাও যে, কণাটির ভ্রমণ পথ একটি সমপরাবৃত্ত।

[C. U. P. 1977]

26. xy-সমতলে একটি কণা এমন ভাবে গতিশীল যে, যে কোনও সময়ে, x-অক্ষ ও y-অক্ষের সমান্তরাল বরাবর উহার বেগের উপাংশ ধ্রুবক। দেখাও যে, কণাটি সরলরেখায় সমবেগে গতিশীল।

যদি যে কোন সময়ে বেগের উপাংশ x-অক্ষের সমান্তরাল ধ্রুবক কিন্তু y-অক্ষের সমান্তরাল $gt+c$ হয়, যেখানে g এবং c ধ্রুবক (>0), তাহা হইলে, কণাটির ত্বরণ কি হইতে পারে?

27. সোজা রেলপথে সমবেগে দ্রুতগামী একটি রেলগাড়ীতে ব্রেক্ প্রয়োগ করার পর রেলগাড়ীর আধ মাইল যাইতে বেগ ঘণ্টায় 60 মাইল হইতে বেগ ঘণ্টায় 15 মাইল হইলে, স্থিরাবস্থায় আসিবার কত সময় পূর্বে ব্রেক্ প্রয়োগ করা হইয়াছিল এবং স্থিরাবস্থায় আসিতে গাড়ীটির আর কত সময় লাগিয়াছিল?

[**W. B. H. S. 1963**]

28. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার ঐ রেখার উপরিস্থ একটি বিন্দু O হইতে x দূরত্বে বেগ $\mu\sqrt{\frac{c-x}{x}}$. দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ সর্বদা O অভিমুখী এবং O হইতে দূরত্বের বর্গের ব্যস্ত-সমানুপাতিক।

29. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার ঐ রেখার উপরিস্থ O বিন্দু হইতে x দূরত্বে ত্বরণ μx^{-2}, ($\mu>0$), এবং তাহা সর্বদা O অভিমুখী। যদি O হইতে c দূরত্বে অবস্থিত স্থান হইতে কণাটি স্থিরাবস্থায় যাত্রা আরম্ভ করে, তবে O হইতে $c/2$ দূরত্বে উহার বেগ কত হইবে?

30. সরলরেখা বরাবর u বেগ লইয়া যাত্রার t সময় পরে যাত্রা স্থান হইতে x দূরত্বে একটি কণার বেগ $ue^{(at+x)}$ যেখানে a একটি ধনাত্মক ধ্রুবক। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a}\log\frac{2+2u}{1+2u}$ সময় পরে উহার বেগ $2u$ হইবে এবং ঐ অবকাশে উহার অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য হইবে $\frac{1}{a}\log\frac{1+2u}{1+u}$.

31. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার ত্বরণ ঐ সরলরেখার উপরিস্থ O বিন্দু হইতে x দূরত্বে n^2x এবং তাহা O হইতে বহির্মুখী। দেখাও যে, t সময়ে (যখন দূরত্ব x),

$$x=a\cosh nt+\frac{V}{n}\sinh nt,$$

যদি $t=0$ এতে $x=a$ এবং $\frac{dx}{dt}=V$ হয়।

32. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার ত্বরণ ঐ সরলরেখার উপরিস্থ O বিন্দু হইতে x দূরত্বে n^2x এবং তাহা O অভিমুখী। যদি $x=a$ তে উহার প্রক্ষেপ বেগ V হয় এবং তাহা O অভিমুখী হয়, তবে প্রমাণ কর যে, কণাটি O বিন্দুতে আসিবে $\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{na}{V}$ সময় পরে।

ANSWERS (প্রশ্নমালা 4)

1. 3 ফুট/সেকেণ্ড^2 ; 2. 88 ফুট/মিনিট^2 ;

3. 14400 ফু./মি.^{2} ; 4. $\frac{1}{80}$ ফু./সে.^{2} ;

5. সমত্বরণে গতিশীল ; (i) বেগ=85 ফু./সে. ; (ii) সরণ=225 ফুট।

6. দূরত্ব=270 ফুট ; বেগ=195 ফু./সে. ; ত্বরণ=96 ফু./সে.^{2} ;

7. বেগ=24 ফু./সে. ; ত্বরণ=6 ফু./সে.^{2} ; সরণ=105 ফুট ; সমত্বরণে গতিশীল। 9. সমমন্দনে গতিশীল ; বেগ= −25 ফু./সে. ; ত্বরণ= −6ফু./সে.^{2} ;

10. সমত্বরণে গতিশীল নহে ; বেগ=27 ফু./সে. ; দূরত্ব=108 ফুট।

11. 5 সেকেণ্ডেতে (*i*) বেগ=5 ফু./সে. ; (*ii*) ত্বরণ=0·4 ফু./সে.^{2} ; (*iii*) 10 সেকেণ্ডেতে বেগ=7 ফু./সে. ; (*iv*) গড় বেগ=5 ফু./সে.

12. $\{4t-3\sin t-\log(1+t)\}$ ফুট। 13. 16 ফুট। 14. 15 ফু./সে.

15. বেগ=45 ফুট/সেকেণ্ড ; সরণ=506·25 ফুট। 16. 115 ফুট ;

17. কণাটি $0 \leqslant t \leqslant 1$ অবকাশে সমত্বরণে ; $t \geqslant 1$ এর জন্য ইহা সমবেগে গতিশীল ; গড় বেগ=5·4 সে. মি./সে.।

18. কণাটি, $0 \leqslant t \leqslant 2$ অবকাশে অসম ত্বরণে গতিশীল ; কিন্তু $t \geqslant 2$ এর জন্য ইহা সমবেগে গতিশীল। ত্বরণ=5 সে. মি./সে.^{2}।

19. a=প্রারম্ভিক দূরত্ব ; b=প্রারম্ভিক বেগ ; c=প্রারম্ভিক ত্বরণের অর্ধেক ; d=ত্বরণের পরিবর্তন-হারের $\frac{1}{6}$ অংশ।

23. পথের সমীকরণ : $x^2/a^2+y^2/b^2=1$; প্রারম্ভিক অবস্থান=(a, o) ; প্রারম্ভিক বেগ=$b\mu$, (মানে) এবং তাহা y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে ; প্রারম্ভিক ত্বরণ=$a\mu^2$, (মানে) এবং তাহা x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে।

24. অসম ত্বরণে গতিশীল।

26. ত্বরণ=g একক এবং তাহা y-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সমান্তরাল।

27. 1 মিনিট 4 সেকেণ্ড পূর্বে ব্রেক প্রয়োগ করা হইয়াছিল ; আরও 16 সেকেণ্ড সময় লাগিবে। 29. বেগ= $\sqrt{2\mu/c}$; এবং তাহা O অভিমুখী।

পঞ্চম অধ্যায়

সরলরেখায় সমত্বরণে গতি

(Motion in a straight line with uniform acceleration)

5-1. প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী।

f সমত্বরণে সরলরেখায় গতিবিশিষ্ট একটি কণার t অবকাশের প্রারম্ভিক ও প্রান্তিক বেগ যথাক্রমে u এবং v ; এবং ঐ অবকাশে উহার অতিক্রান্ত দূরত্ব s হইলে,

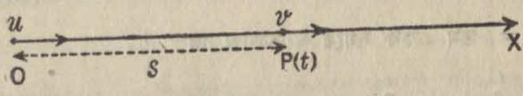
(i) $\mathbf{v = u + ft}$;

(ii) $\mathbf{s = ut + \frac{1}{2}ft^2}$;

(iii) $\mathbf{v^2 = u^2 + 2fs}$;

(iv) $\mathbf{s_t = u + \frac{1}{2}f(2t-1)}$.

প্রমাণ : মনে করি, একটি কণা O বিন্দু হইতে যাত্রা আরম্ভ করিয়া উহার গতির দিকে f সমত্বরণে $\overrightarrow{OX}$ বরাবর গতিশীল ; এবং t সময়েতে উহা P এতে অবস্থিত, যেখানে $\overline{OP} = s$ এবং Pএতে উহার বেগ $= v$.



তাহা হইলে, $t=0$ এতে $s=0$, এবং তখন উহার বেগ $= u$.

এখন, যে কোন সময় t এতে কণাটির বেগ ও ত্বরণ যথাক্রমে $\frac{ds}{dt}$ এবং $\frac{d^2s}{dt^2}$.

$$\therefore \quad \frac{ds}{dt} = v ; \qquad \ldots \qquad (1) ;$$

$$\text{এবং} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = f. \qquad \ldots \qquad (2).$$

$$\text{সুতরাং, (2) হইতে,} \quad \frac{dv}{dt} = f. \qquad \ldots \qquad (3).$$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে সমাকলন করিয়া পাই,

$$v = ft + A \qquad \ldots \qquad (4).$$

এখন, যেহেতু, $t=0$ এতে $\dfrac{ds}{dt}=u$; $\therefore\ A=u$

$$\therefore\ \mathbf{v=u+ft} \quad \dots \quad (5).$$

আবার, (1) এবং (5) হইতে,

$$\frac{ds}{dt}=u+ft \quad \dots \quad (6).$$

t এর সাপেক্ষে ইহাকে সমাকলন করিয়া পাই,

$$s=ut+\tfrac{1}{2}ft^2+B \quad \dots \quad (7).$$

এখন, যেহেতু, $t=0$ এতে, $s=0$, $\therefore\ B=0$.

$$\therefore\ \mathbf{s=ut+\tfrac{1}{2}ft^2} \quad \dots \quad (8).$$

অপিচ, (2) হইতে আমরা পাই,

$$v\frac{dv}{ds}=f\ ;\ \text{বা,}\ \ v\,dv=f\,ds.$$

ইহাকে সমাকলন করিয়া পাই,

$$v^2=C+2fs \quad \dots \quad (9).$$

এখন, যেহেতু, $t=0$ এতে $s=0$ এবং $\dfrac{ds}{dt}=u$, $\therefore\ C=u^2$.

$$\therefore\ \mathbf{v^2=u^2+2fs} \quad \dots \quad (10).$$

আবার, $s_t=t$-তম একক সময়ে অতিক্রান্ত পথ

$$=\int_{t-1}^{t} v\,dt=\int_{t-1}^{t}(u+ft)dt$$

$$=\Big[ut+\tfrac{1}{2}ft^2\Big]_{t-1}^{t}=(ut+\tfrac{1}{2}ft^2)-\{u(t-1)+\tfrac{1}{2}f(t-1)^2\}$$

$$\therefore\ \mathbf{s_t=u+\tfrac{1}{2}f(2t-1)}.$$

বিকল্প পদ্ধতি :

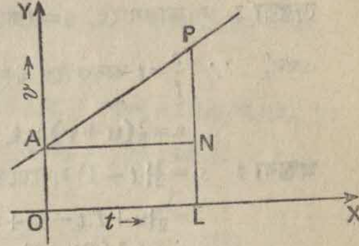
$s_t=[t$ সময়ে অতিক্রান্ত পথ$]-[(t-1)$ সময়ে অতিক্রান্ত পথ $]$

$=(ut+\frac{1}{2}ft^2)-\{u(t-1)+\frac{1}{2}f(t-1)^2\}$

$=u+\frac{1}{2}f(2t-1)$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

কণাটি f সমত্বরণে গতিবিশিষ্ট বলিয়া, ইহার গতির সময়-বেগ লেখ একটি সরলরেখা $\overrightarrow{AP}$ হইবে ; যেখানে $\overrightarrow{OX}$ সময়-সূচক অক্ষ এবং $\overrightarrow{OY}$ বেগ-সূচক অক্ষ। চিত্রে, $\overline{OA}=u$; $\overline{AN}=\overline{OL}=t$; $\overline{LP}=v$.



তাহা হইলে, $\overline{NP}=v-u=t$ অবকাশে বেগের পরিবর্তন।

$\therefore\ \overline{NP}/\overline{AN}=f$;

অর্থাৎ, $(v-u)/t=f$.

$\therefore\ \mathbf{v=u+ft}.$ ... (i)

$s=$ AOLP ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $=\square$ ACLN $+\triangle$ANP.

$\therefore\ \mathbf{s=ut+\frac{1}{2}ft^2}.$ ... (ii)

$\therefore\ v^2=(u+ft)^2$

$=u^2+2uft+f^2t^2$

$=u^2+2f(ut+\frac{1}{2}ft^2)$;

বা, $\mathbf{v^2=u^2+2fs}.$ ... (iii)

আবার, $s_t=(ut+\frac{1}{2}ft^2)-\{u(t-1)+\frac{1}{2}f(t-1)^2\}$

$=u+\frac{1}{2}f(2t-1).$ ... (iv)

বিশেষ দ্রষ্টব্য : f সমমন্দনে সরলরেখায় কণাটি গতিশীল হইলে, এবং t অবকাশে উহার প্রারম্ভিক ও প্রান্তিক বেগ যথাক্রমে u ও v এবং দূরত্ব s হইলে,

(i) $v=u-ft$;

(ii) $s=ut-\frac{1}{2}ft^2$;

(iii) $v^2=u^2-2fs$;

(iv) $s_t=u-\frac{1}{2}f(2t-1)$.

5-2. f সমত্বরণে সরলরেখায় গতিবিশিষ্ট একটি কণার t অবকাশের প্রারম্ভিক ও প্রান্তিক বেগ যথাক্রমে u এবং v এবং ঐ অবকাশে কণাটির অতিক্রান্ত পথ s এবং গড় বেগ V হইলে,

$$\mathbf{V=\frac{1}{2}(u+v)=u+\frac{1}{2}ft}.$$

প্রমাণ : এখানে, $V=\frac{s}{t}=\frac{ut+\frac{1}{2}ft^2}{t}$

$$=u+\frac{1}{2}ft=\frac{2u+ft}{2}$$

$$=\frac{u+(u+ft)}{2}=\frac{1}{2}(u+v).$$

দ্রষ্টব্য : সংজ্ঞানুসারে, **s = (গড়বেগ) × সময়।**

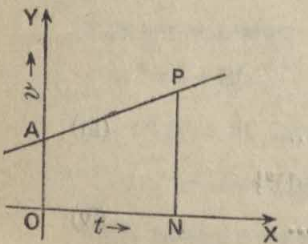
এখন, $\because$ $\frac{s}{t}=t$ অবকাশে গড়বেগ $=\frac{1}{2}(u+v)$,

$\therefore$ $\mathbf{s=\frac{1}{2}(u+v)\times t}$.

মন্তব্য : $s_t=\frac{1}{2}\{(t-1)$ সময়েতে বেগ $+\,t$ সময়েতে বেগ$\}\times 1$

$=\frac{1}{2}\{u+f(t-1)+u+ft\}$
$=u+\frac{1}{2}f(2t-1)$.

বিকল্প পদ্ধতি : f সমত্বরণবিশিষ্ট গতির সময়-বেগ লেখ $\overrightarrow{AP}$ সরলরেখা, যেখানে $\overline{OA}=u$; $\overline{NP}=v$; $\overline{ON}=t$.



এখন, $s=$ AONP ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল

$$=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{NP})\times\overline{ON}$$

$$=\frac{1}{2}(u+v)\times t.$$

কিন্তু, $s=$ গড় বেগ × সময়।

$\therefore$ $V=$ গড় বেগ $=\frac{s}{t}=\frac{1}{2}(u+v$

5-3. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. 4 সে. মি./সেকেণ্ড² সমত্বরণে সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার প্রারম্ভিক বেগ 2 সে. মি./সেকেণ্ড ছিল। কত সময় পরে কণাটি 60 সে. মি. পথ অতিক্রম করিবে ?

মনে করি, নির্ণেয় সময় t সেকেণ্ড।

এখন, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্রে $s=60$; $u=2$; $f=4$

$\therefore$ $60=2t+\frac{1}{2}\times 4\times t^2$

বা, $t^2+t-30=0$,

বা, $(t-5)(t+6)=0$

$\therefore$ $t=5$, বা, -6.

কিন্তু, যেহেতু, সময় কখনও ঋণাত্মক হইতে পারে না,

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : 5 সেকেণ্ড।

উদাহরণ 2. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা নির্দিষ্ট বেগে যাত্রা আরম্ভ করিয়া 4 সেকেণ্ডে 84 সে. মি. পথ অতিক্রম করিল। ইহার পর কণাটি সমবেগে চলিতে থাকিয়া পরবর্তী 4 সেকেণ্ডে 108 সে. মি. পথ অতিক্রম করিল। কণাটির প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

মনে করি, কণাটির প্রারম্ভিক বেগ$=u$ সে. মি./সে. ; ত্বরণ$=f$ সে. মি./সে.^{2}। তাহা হইলে, প্রথম 4 সেকেণ্ডের জন্য, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্রে, $s=84$; $t=4$.

$\therefore$ $84=4u+\frac{1}{2}f\times16$;

বা, $u+2f=21$. ... ... (1)

এখন, 4 সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ$=u+4f$,

সুতরাং, পরবর্তী 4 সেকেণ্ডের জন্য,

$108=(u+4f)\times4$;

বা, $u+4f=27$ ... ... (2)

এখন, (1) এবং (2) হইতে পাই : $f=3$; $u=15$.

$\therefore$ নির্ণেয় প্রারম্ভিক বেগ$=15$ সে. মি./সে. ;
এবং ত্বরণ$=3$ সে. মি/সে^{2}।

উদাহরণ 3. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা 11-তম ও 15-তম সেকেণ্ডে যথাক্রমে 720 সে. মি. এবং 960 সে. মি. পথ অতিক্রম করে। যাত্রা আরম্ভের পর কণাটি যখন 1200 সে. মি. পথ অতিক্রম করিবে, তখন উহার বেগ কত হইবে, এবং কখন হইবে ?

মনে করি, কণাটির প্রারম্ভিক বেগ$=u$ সে. মি./সে. ;
এবং ত্বরণ$=f$ সে. মি./সে.^{2}।

তাহা হইলে, $s_t=u+\frac{1}{2}f(2t-1)$ সূত্রের সাহায্যে পাই :

$720=$11-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথ
$=u+\frac{1}{2}f(2\times11-1)$
$=u+21f/2$; ... ... (1)

$960=$15-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথ
$=u+\frac{1}{2}f(2\times15-1)$
$=u+29f/2$. ... ... (2)

এখন, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই :

$4f=240$; $\quad\therefore\ f=60.$

সুতরাং, (1) হইতে, $u=90.$

নির্ণেয়, বেগ v সে. মি./সে. হইলে,

$v^2=u^2+2fs$ সূত্র হইতে পাই :

$v^2=90\times90+2\times60\times1200$

$=152100=(3\times13\times10)^2.$

$\therefore\ v=390.$

সুতরাং, নির্ণেয় বেগ=390 সে. মি/সে.।

এখন, $v=u+ft$ সূত্র হইতে পাই :

$390=90+60\times t.\ \therefore\ t=5.$

$\therefore$ নির্ণেয় সময়=5 সেকেণ্ড।

উদাহরণ 4. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা পরপর প্রতি এক সেকেণ্ডে যথাক্রমে 7 সে. মি., 9 সে. মি ও 11 সে. মি. পথ অতিক্রম করিল। ইহার গতি কি সমত্বরণের সহিত সামঞ্জস্যপূর্ণ? যদি তাহাই হয়, তবে ত্বরণ কত?

ধরা যাক্, উহার গতি সমত্বরণবিশিষ্ট এবং ত্বরণ f সে. মি./সে.^{2} এবং প্রারম্ভিক বেগ u সে. মি./সে.।

মনে করি, n-তম, $(n+1)$-তম এবং $(n+2)$-তম সেকেণ্ডে কণাটি যথাক্রমে 7 সে. মি., ও 9 সে. মি. ও 11 সে. মি. পথ অতিক্রম করে। এখন, তাহা হইলে, $s_t=u+\frac{1}{2}f\,(2t-1)$ সূত্রের সাহায্যে পাই,

$$7=u+\tfrac{1}{2}f(2n-1)\quad\cdots\quad\cdots\quad(1);$$

$$9=u+\tfrac{1}{2}f\{2(n+1)-1\}\quad\cdots\quad\cdots\quad(2);$$

$$11=u+\tfrac{1}{2}f\{2(n+2)-1\}\quad\cdots\quad\cdots\quad(3);$$

কণাটির গতি সমত্বরণবিশিষ্ট হইবে যদি u এবং f এর নির্দিষ্ট এক সেট মান (1), (2) এবং (3) কে যুগপৎ সিদ্ধ করে।

এখন, (1) এবং (2) হইতে পাই, $f=2$ এবং $u=8-2n.$

স্পষ্টতঃই দেখা যাইতেছে $f=2$ এবং $u=8-2n$, (3)কেও সিদ্ধ করে। সুতরাং, u এবং f এর এই নির্দিষ্ট মানের জন্য (1), (2) এবং (3) সামঞ্জস্যপূর্ণ।

$\therefore$ নির্ণেয় ত্বরণ=2 সে. মি./সে.^{2}.

উদাহরণ 5. সরলরেখায় সমমন্দনে গতিশীল একটি কণা পঞ্চম সেকেণ্ডে 7 সে. মি. পথ অতিক্রম করে, এবং অবশেষে কিছুক্ষণ-পরে উহা স্থিরাবস্থায় আসে। যদি কণাটি সমগ্র অতিক্রান্ত পথের $\frac{1}{64}$ অংশ শেষ সেকেণ্ডে অতিক্রম করে, তবে উহা কতক্ষণ গতিতে ছিল, এবং উহার প্রারম্ভিক বেগ কত ছিল ?

মনে করি, কণাটির প্রারম্ভিক বেগ u সে.মি./সে. ; মন্দন $=f$ সে.মি./সে.^{2} ; এবং সমগ্র পথ উহা t সেকেণ্ডে অতিক্রম করে।

তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$7=u-\tfrac{1}{2}f(2\times5-1)$$
$$=u-9f/2\,; \qquad \cdots \quad (1)$$
$$0=u-ft\,; \qquad \cdots \quad (2)$$

এবং $u-\frac{1}{2}f(2t-1)=\frac{1}{64}(ut-\frac{1}{2}ft^2)$. $\qquad \cdots \quad (3)$

(2) এর সাহায্যে (3) হইতে পাই,

$$ft-\tfrac{1}{2}f(2t-1)=\tfrac{1}{64}(ft^2-\tfrac{1}{2}ft^2)$$

বা, $t^2=64$, $(\because\ f\neq0)$

$$\therefore\ t=8. \qquad \cdots \quad (4)$$

এখন, (1), (2) এবং (4) হইতে,

$$7=ft-9f/2=8\times f-9f/2=7f/2$$
$$\therefore\ f=2. \qquad \cdots \quad (5)$$

তাহা হইলে, (1) হইতে,

$$u=16. \qquad \cdots \quad (6)$$

সুতরাং, কণাটি 8 সেকেণ্ড গতিতে ছিল এবং উহার প্রারম্ভিক বেগ 16 সে মি./সে. ছিল।

উদাহরণ 6. সোজা রেলপথের ধার বরাবর একজন সাইকেল-আরোহী মিনিটে 400 গজ সমবেগে যাইতেছিল। যখন ঐ ব্যক্তি একটি রেল-ইঞ্জিনের 32 গজ পিছনে, ঠিক সেই মুহূর্তে ইঞ্জিনটি স্থিরাবস্থা হইতে 2 ফু./সে.^{2} সমত্বরণে সাইকেলের গতির দিকে চলিতে আরম্ভ করিল। কখন ঐ ব্যক্তি ইঞ্জিনটির সহিত মিলিত হইবে ? দুইটি উত্তর পাইবার কারণ নির্দেশ কর।

মনে করি, ঐ ব্যক্তি ইঞ্জিনটির সহিত t সেকেণ্ডের সময়ে মিলিত হইয়াছিল।

বেগ : মিনিটে 400 গজ = সেকেণ্ডে 20 ফুট ; 32 গজ = 96 ফুট।

t সেকেণ্ডে ইঞ্জিনটির পক্ষে অতিক্রান্ত পথ

$=0+\frac{1}{2}.\ 2.\ t^2$ ফুট $=t^2$ ফুট ;

t সেকেণ্ডে সাইকেল-আরোহীর পক্ষে অতিক্রান্ত পথ $=20t$ ফুট।

যেহেতু t সেকেণ্ড সময়েতে তাহারা মিলিত হইয়াছিল, সুতরাং,

$$20t=96+t^2 ;$$

বা, $t^2-20t+96=0$; বা, $(t-8)(t-12)=0$

$\therefore\ t=8\ ;\ 12.$

সুতরাং, ঐ ব্যক্তি 8 সেকেণ্ড পরে এবং 12 সেকেণ্ড পরে ইঞ্জিনটির সহিত মিলিত হইয়াছিল।

8 সেকেণ্ডেতে ইঞ্জিনটির বেগ = 16 ফু./সে. ; সুতরাং, 8 সেকেণ্ড পরে ঐ সাইকেল-আরোহী ইঞ্জিনটিকে অতিক্রম করিয়া সম্মুখে আগাইয়া যাইতে থাকিবে। কিন্তু, 12 সেকেণ্ড পরে ইঞ্জিনটির বেগ = 24 ফু./সে. হইবে ; অর্থাৎ, তখন, ইঞ্জিনটির বেগ ঐ ব্যক্তির বেগ অপেক্ষা অধিক হওয়ায়, ইহার পর তাহারা আর মিলিত হইতে পারিবে না।

উদাহরণ 7. বন্দুকের একটি বুলেট্ (bullet) 10 ইঞ্চি একটি দেওয়াল ভেদ করার সময় উহার বেগ 120 ফুট/সেকেণ্ড হইতে 80 ফুট/সেকেণ্ড হইল। দেওয়াল ভেদ করিতে বুলেটের কত সময় লাগিয়াছিল এবং অর্ধেক দেওয়াল ভেদ করার পর উহার বেগ কত হইয়াছিল তাহাও নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, দেওয়ালের প্রতিরোধ ক্ষমতা সুষম।

দেওয়ালে আঘাত দেওয়ার মুহূর্তে বুলেটের বেগ 120 ফু./সে. ছিল ; এবং সমমন্দনে চলিতে থাকিয়া দেওয়াল হইতে বাহির হইবার মুহূর্তে বেগ 80 ফু./সে. ছিল।

মনে করি, বুলেটের মন্দন $=f$ ফু./সে.^{2}।

তাহা হইলে, $v^2=u^2-2fs$ সূত্রের সাহায্যে, প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই :

$$80^2=120^2-2\times f\times\frac{10}{12} ;$$

বা, $20f=12\times(12^2-8^2)\times10^2=12\times20\times4\times10^2$

$\therefore\ f=4800.\qquad\cdots\qquad(1)$

এখন, $v=u-ft$ সূত্রের সাহায্যে,

প্রদত্ত শর্ত হইতে হইতে পাই,

$$80 = 120 - f \times t$$

বা, $4800 \times t = 120 - 80$;

$\therefore \quad t = 1/120.$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় : **1/120** সেকেণ্ড।

মনে করি, অর্ধেক দেওয়াল ভেদ করার পর বুলেটের বেগ v_1 ফু./সে. হইয়াছিল। তাহা হইলে,

$$v_1^2 = 120^2 - 2f \times \tfrac{5}{12}$$
$$= 120^2 - 2 \times 4800 \times \tfrac{5}{12}$$
$$= 20 \times 20 \times 26.$$

$\therefore \quad v_1 = 20\sqrt{26} = 101{\cdot}98$ (প্রায়)।

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ $= 20\sqrt{26}$ ফু./সে. ; বা, $101{\cdot}98$ ফু./সে. (প্রায়)।

উদাহরণ 8. সরলরেখায় সমত্বরণে একটি কণা গতিশীল। যদি পরপর তিনটি অবকাশ t_1, t_2, t_3 এতে উহার গড় বেগ যথাক্রমে v_1, v_2, v_3 হয় তবে দেখাও যে,

$$\frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_2} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}.$$

মনে করি, কণাটির ত্বরণ f ; এবং t_1, t_2, t_3 অবকাশের জন্য উহার প্রারম্ভিক বেগ যথাক্রমে u, v, w.

$\therefore \quad v = u + ft_1$;

এবং $w = v + ft_2 = u + (t_1 + t_2)f.$

এখন, গড় বেগ নির্ণয়ের সূত্র : $V = u + \frac{1}{2}ft$ হইতে পাই,

$$v_1 = u + \tfrac{1}{2}ft_1 \; ; \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$
$$v_2 = (u + ft_1) + \tfrac{1}{2}ft_2 \; ; \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$
$$v_3 = \{u + f(t_1 + t_2)\} + \tfrac{1}{2}ft_3 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3).$$
$$\therefore \quad v_2 - v_1 = \tfrac{1}{2}f(t_1 + t_2) \; ; \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$
$$v_3 - v_2 = \tfrac{1}{2}f(t_2 + t_3). \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

$$\therefore \quad \frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_2} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}.$$

উদাহরণ 9. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা পরপর তিনটি অবকাশ t_1, t_2, t_3 এতে সমান সমান দূরত্বের পথ অতিক্রম করিলে, দেখাও যে,

$$\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{3}{t_1+t_2+t_3}.$$

[W. B. H. S. 1973]

মনে করি, t_1, t_2, t_3 অবকাশে কণাটির প্রারম্ভিক বেগ যথাক্রমে v_1, v_2, v_3 এবং t_3 অবকাশের প্রান্তিক বেগ v; এবং প্রত্যেক অবকাশে অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য d. তাহা হইলে,

$\frac{1}{2}(v_1+v_2)=t_1$ অবকাশের গড় বেগ $=d/t_1$;

$\frac{1}{2}(v_2+v_3)=t_2$ অবকাশের গড় বেগ $=d/t_2$;

$\frac{1}{2}(v_3+v)=t_3$ অবকাশের গড় বেগ $=d/t_3$;

$\frac{1}{2}(v_1+v)=(t_1+t_2+t_3)$ অবকাশের গড় বেগ

$=3d/(t_1+t_2+t_3)$.

$$\therefore\ \frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}$$

$$=(v_1+v_2)\frac{1}{2d}-(v_2+v_3)\frac{1}{2d}+(v_3+v)\frac{1}{2d}$$

$$=(v_1+v)\frac{1}{2d}=\frac{3}{t_1+t_2+t_3}.$$

উদাহরণ 10. একটি রেলগাড়ী কোন এক ষ্টেশন হইতে স্থিরাবস্থায় যাত্রা আরম্ভ করিয়া পরবর্তী ষ্টেশনে গিয়া থামে, যেখানে ঐ ষ্টেশন দুইটি সোজাপথের পার্শ্বে অবস্থিত; এবং তাহাদের মধ্যে দূরত্ব d ফুট। গাড়িটি ঐ পথের প্রথম অংশ a ফু./সে.^{2} সমত্বরণে এবং পরবর্তী অংশ b ফু./সে.^{2} সমমন্দনে চলিয়া থাকিলে, প্রমাণ কর যে, সমস্ত পথটি অতিক্রম করিতে উহার সময় লাগিয়াছিল

$$\sqrt{\frac{2(a+b)d}{ab}}\text{ সেকেণ্ড।}$$

মনে করি, গাড়ীটি পথের প্রথম অংশ x_1 ফুট a ফু./সে.^{2} সমত্বরণে t_1 সেকেণ্ডে এবং অবশিষ্ট x_2 ফুট b ফু./সে.^{2} সমমন্দনে t_2 সেকেণ্ডে অতিক্রম করে। তাহা হইলে, $x_1+x_2=d$; এবং সমগ্র পথটি (t_1+t_2) সেকেণ্ডে উহা অতিক্রম করে।

মনে করি, t_1 সেকেণ্ড পরে গাড়ীটির বেগ v ফু./সে হইয়াছিল।

সুতরাং, t_1 সেকেণ্ড সময়ের জন্য :

$$v=at_1\ ;\ v^2=2ax_1\ ; \qquad \cdots \qquad (1)$$

এবং t_2 সেকেণ্ড সময়ের জন্য :

$$0=v-bt_1\ ;\ 0=v^2-2bx_2. \qquad \cdots \qquad (2)$$

$$\therefore\ x_1+x_2=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\frac{v^2}{2};$$

$$\text{বা,}\quad d=\frac{a+b}{2ab}\cdot v^2$$

$$\therefore\quad v=\sqrt{\frac{2abd}{a+b}}. \qquad \cdots \qquad (3)$$

$$\text{আবার,}\ t_1+t_2=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)v=\sqrt{\frac{2(a+b)d}{ab}}. \qquad \cdots \qquad (4)$$

$$\therefore\quad \text{সমগ্র সময়}=\sqrt{\frac{2(a+b)d}{ab}}\ \text{সেকেণ্ড।}$$

উদাহরণ 11. সোজা পথে চলন্ত একটি রেলগাড়ীর বেগ 0 হইতে f_1 সমহারে বৃদ্ধি পাইয়া v হইল ; পরে কিছু সময়ের জন্য সমদ্রুতিতে চলিল ; এবং অবশেষে f_2 সমহারে হ্রাস পাইয়া উহার বেগ 0 হইল। যদি সম্পূর্ণ পথের দৈর্ঘ্য x হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ঐ পথ অতিক্রম করিতে উহার মোট সময় লাগিয়াছিল :

$$\frac{x}{v}+\frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right).$$

মনে করি, গাড়ীটি f_1 সমত্বরণে x_1 দূরত্ব t_1 সময়ে; v সমবেগে x' দূরত্ব t' সময়ে ; এবং f_2 সমমন্দনে x_2 দূরত্ব t_2 সময়ে অতিক্রম করে। তাহা হইলে,

$$v=f_1t_1\ ;\ v^2=2f_1x_1\ ; \qquad \cdots \qquad (1)$$

$$v=f_2t_2\ ;\ v^2=2f_2x_2 \qquad \cdots \qquad (2)$$

$$\therefore\ t_1+t_2=v\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right) \qquad \cdots \qquad (3)$$

যেহেতু, $x_1+x'+x_2=x,$

$\therefore\ x'=x-x_1-x_2\ ;$

বা, $vt'=x-x_1-x_2\ ;$

বা, $vt' = x - \frac{v^2}{2f_1} - \frac{v^2}{2f_2}$

$$\therefore \quad t' = \frac{x}{v} - \frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right). \quad \cdots \quad (4)$$

$\therefore$ সমগ্র সময় $= t_1 + t_2 + t'$

$$= v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) + \frac{x}{v} - \frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$$

$$= \frac{x}{v} + \frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right).$$

উদাহরণ 12. একটি লিফ্‌ট্‌ স্থিরাবস্থা হইতে প্রথমে f সমত্বরণে, পরে সমবেগে এবং অবশেষে f সমমন্দনে উপরের দিকে উঠিয়া থামে। যদি সমগ্র উত্থিত দূরত্ব s এবং মোট সময় t হয়, তবে দেখাও যে, সমবেগে উঠিতে যে সময় লাগে তাহা $\sqrt{(t^2 - 4s/f)}$. **[W. B. H. S. 1963]**

মনে করি, লিফ্‌ট্‌টি f সমত্বরণে s_1 দূরত্ব, v সমবেগে s_2 দূরত্ব এবং f সমমন্দনে s_3 দূরত্ব যথাক্রমে t_1, t_2, t_3 সময়ে অতিক্রম করে।

তাহা হইলে, $s_1 + s_2 + s_3 = s$; $t_1 + t_2 + t_3 = t$.

আবার, যেহেতু, $v = ft_1$; $v = ft_3$;

এবং $s_1 = \frac{1}{2}ft_1^2$; $s_3 = \frac{1}{2}ft_3^2$,

$$\therefore \quad t_1 = t_3 \; ; \; s_1 = s_3.$$

তাহা হইলে, $2t_1 + t_2 = t$ এবং $2s_1 + s_2 = s$.

এখন, t_2 অবকাশের প্রারম্ভিক বেগ$=v$; এবং লিফ্‌ট্‌টি v সমবেগে s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে।

$$\therefore \quad s_2 = vt_2 = (ft_1)t_2.$$

সুতরাং, $s = 2s_1 + s_2 = ft_1^2 + ft_1t_2$

$$= (t_1 + t_2)ft_1$$

$$= \tfrac{1}{2}(t + t_2) \times \tfrac{1}{2}(t - t_2) \times f$$

$$= \tfrac{1}{4}(t^2 - t_2^2)f.$$

$$\therefore \quad t_2 = \sqrt{(t^2 - 4s/f)}.$$

প্রশ্নমালা 5

1. একটি কণা সেকেণ্ডে 15 সেন্টিমিটার প্রারম্ভিক বেগে সরলরেখায় সমত্বরণে চলিতে থাকে এবং 5 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ সেকেণ্ডে 40 সেন্টিমিটার হয়। উহার ত্বরণ এবং প্রথম 8 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ নির্ণয় কর।

2. নির্দিষ্ট বেগে যাত্রা আরম্ভ করিয়া একটি কণা 3 সে. মি./সেকেণ্ড^2 সমত্বরণে চলিতে থাকিল, এবং 26 সে. মি. পথ অতিক্রম করিবার পর উহার বেগ 16 সে. মি./সেকেণ্ড হইল। উহার প্রারম্ভিক বেগ কত ছিল? এক মিনিট পরে উহার বেগ এবং অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ কত হইয়াছিল?

3. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা 3 সেকেণ্ডে 81 ফুট অতিক্রম করিয়া 24 ফুট/সেকেণ্ড বেগ প্রাপ্ত হয়। কণাটির প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1968]

4. একটি কণা নির্দিষ্ট প্রারম্ভিক বেগে যাত্রা আরম্ভ করিয়া সরলরেখায় সমত্বরণে চলিতে থাকে এবং 5 সেকেণ্ডে 80 ফুট অতিক্রম করে। তারপর ত্বরণ বন্ধ হইয়া গেল এবং পরবর্তী 5 সেকেণ্ডে কণাটি 130 ফুট অতিক্রম করে। কণাটির প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

5. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা 8 সেকেণ্ডে 112 ফুট এবং পরবর্তী 6 সেকেণ্ডে 126 ফুট অতিক্রম করে। কণাটির ত্বরণ এবং তৎপরবর্তী 162 ফুট অতিক্রম করিবার সময় বাহির কর। [W. B. H. S. 1962]

6. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি বিন্দু সপ্তম সেকেণ্ডে 93 ফুট এবং দশম সেকেণ্ডে 129 ফুট অতিক্রম করে। কণাটির ত্বরণ কত? উহা পঞ্চম সেকেণ্ডে কত পথ অতিক্রম করিয়াছিল?

7. একটি বস্তু প্রথম সেকেণ্ডে 15 সে.মি., তৃতীয় সেকেণ্ডে 63 সে.মি., এবং পঞ্চম সেকেণ্ডে 111 সে. মি. দূরত্ব অতিক্রম করে। ইহা কি সমত্বরণের সহিত সামঞ্জস্যপূর্ণ? [W. B. H. S. 1967]

8. সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণা পর পর প্রতি 3 সেকেণ্ডে যথাক্রমে 7 ফুট, 9 ফুট ও 11 ফুট অতিক্রম করে। ইহা কি সমত্বরণের সহিত সঙ্গতিপূর্ণ? যদি সঙ্গতিপূর্ণ হয়, তবে ঐ ত্বরণের মান নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1963]

9. একটি বস্তুকণাকে 3 সেকেণ্ডে 396·9 মিটার এবং তাহার পরবর্তী 4 সেকেণ্ডে 392 মিটার এবং তাহারও পরবর্তী 5 সেকেণ্ডে 269·5 মিটার পথ যাইতে দেখা যায়।

প্রমাণ কর যে, কণাটি সমত্বরণে চলিতেছে, এই অনুমানের সহিত ইহা সঙ্গতিপূর্ণ এবং কণাটি থামিয়া যাওয়া পর্য্যন্ত অতিবাহিত সময় নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1965]

10. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা p-তম, q-তম ও r-তম সেকেণ্ডে যথাক্রমে a, b, c ফুট দূরত্ব অতিক্রম করিলে, দেখাও যে,

$a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0.$ [C. U. P. 1962]

11. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার প্রারম্ভিক বেগ সেকেণ্ডে 32 ফুট এবং মন্দন 2ফুট/সেকেণ্ড^2। কণাটি দশম সেকেণ্ডে কত পথ অতিক্রম করিবে এবং 112 ফুট অতিক্রম করার পর উহার বেগ কত হইবে, এবং কত সময় পরে হইবে ?

12. ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে ধাবমান একটি রেলগাড়ীতে ব্রেক্ প্রয়োগ করায় উহা সমমন্দনে চলিতে থাকিয়া $1\frac{1}{2}$ মিনিটে একটি ষ্টেশনে থামে। ষ্টেশন্ হইতে কত দূরত্বে ব্রেক্ প্রয়োগ করা হইয়াছিল ? ফুট সেকেণ্ড-সেকেণ্ডে মন্দন কত ছিল ?

[W. B. H. S. 1966]

13. একটি এক্সপ্রেস গাড়ীকে যদি আধ মাইল দূরত্বের মধ্যে উহার ঘণ্টায় 60 মাইল বেগকে ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে ব্রেক প্রয়োগ করিয়া কমাইয়া আনা হয়, তবে কতক্ষণ যাবৎ ব্রেক প্রযুক্ত ছিল এবং ইহার কতক্ষণ পরই বা উহা থামিয়া গিয়াছিল ? [W. B. H. S. 1963]

14. একটি টার্গেটের 3 ইঞ্চি ভেদ করিতে একটি বুলেটের বেগ অর্ধেক হ্রাস পাইল। বুলেট্‌টি টার্গেটের আর কত ইঞ্চি ভেদ করিবে ? [টার্গেটের বাধা সুষম ধরিতে হইবে।] [C. U. P. 1970]

15. সেকেণ্ডে 1200 ফুট বেগে ধাবমান একটি বুলেট একটি টার্গেটের মধ্যে এক ইঞ্চি প্রবেশ করিবার পর অর্ধেক বেগ হারায়। টার্গেটের বাধা সুষম হইলে, বুলেট্‌টি আর কত দূর গিয়া থামিয়া যাইবে ?

16. একটি বন্দুকের গুলি 9·6 ইঞ্চি পুরু এক দেওয়াল ভেদ করাতে উহার বেগ 1200 ফু./সে. হইতে 900 ফু./সে. হইল। দেওয়াল ভেদ করিতে কত সময় লাগিল তাহা নির্ণয় কর এবং অর্ধেক দেওয়াল ভেদ করার পর উহার বেগ কত হইয়াছিল ? (ধর যে, দেওয়ালের প্রতিরোধ ক্ষমতা সুষম) [C. U. P. 1975]

17. প্রমাণ কর যে, একটি কণা সরলরেখায় সমত্বরণে চলিতে থাকিলে, ক্রমিক সমমান অন্তরের সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্বসমূহ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

[C. U. P. 1974]

18. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা আরম্ভ করিয়া সরলরেখায় f সমত্বরণে চলিতে থাকে। সময়-বেগ লেখ অথবা অন্য উপায়ে প্রমাণ কর যে, $s=\frac{1}{2}ft^2$, (প্রতীকসমূহ প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত)। [W. B. H. S. 1961]

19. সরলরেখায় চলমান একটি কণার প্রারম্ভিক বেগ u এবং একটি নির্দিষ্ট দূরত্বের দুই অর্ধেক উহা যথাক্রমে f_1 এবং f_2 সমত্বরণে অতিক্রম করে। দেখাও যে, কণাটি সমগ্র দূরত্ব $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ সমত্বরণে অতিক্রম করিলে যে প্রান্তিক বেগ হইত, এক্ষেত্রেও তাহাই হইবে। [C. U. P. 1970]

20. স্থিরাবস্থা হইতে সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা প্রথমে 25 ফু./সে.^{2} সমত্বরণে এবং পরে 5 ফু./সে.^{2} সমমন্দনে মোট 192 ফুট দীর্ঘ পথ অতিক্রম করিবার পর স্থিরাবস্থায় আসে। কণাটির সর্বাধিক বেগ কত ছিল, এবং সমস্ত পথ অতিক্রম করিতে মোট কত সময় লাগিয়াছিল?

21. এক বিড়াল 30 ফুট দূরত্বে একটি ইঁদুরকে দেখিয়া ইহাকে ধরিবার জন্য স্থিরাবস্থা হইতে 2 ফুট/সেকেণ্ড^2 সমত্বরণে যেই মাত্র দৌড় দিতে আরম্ভ করিল ঠিক তখনই একই সোজাপথ বরাবর ইঁদুরটি 13 ফু./সে. বেগে সামনের দিকে দৌড়াইতে থাকিল। কখন এবং কতদূরে বিড়ালটি ইদুরটিকে ধরিতে পারিবে?

22. দুইটি কণা A হইতে যাত্রা আরম্ভ করিয়া একই সরলরেখায় একই দিকে গতিশীল হইল। প্রথম কণাটি সেকেণ্ডে 40 ফুট সমবেগে এবং দ্বিতীয় কণাটি প্রারম্ভিক বেগ 16 ফু./সে. এবং সমত্বরণ 6 ফু./সে.^{2} লইয়া চলিতে থাকিলে, কত সময় পরে আবার তাহারা মিলিত হইবে? [C. U. P. 1965]

উহাদের মধ্যে দূরত্ব সর্বাধিক কখন হইবে এবং তাহা কত হইবে?

23. সোজা রাস্তা বরাবর একজন সাইকেল-আরোহী মিনিটে 360 গজ সমবেগে যাইতেছিল। যখন ঐ ব্যক্তি একটি গাড়ীর ঠিক 15 গজ পিছনে ছিল, সেই মুহূর্তে ঐ গাড়ীটি স্থিরাবস্থা হইতে 2 ফু./সে.^{2} সমত্বরণে একই দিকে ঐ রাস্তা বরাবর যাইতে লাগিল। কখন ঐ সাইকেল-আরোহী গাড়ীটির সহিত মিলিত হইবে? দুইটি উত্তর পাইবার কারণ নির্দেশ কর।

24. একই সোজা রেলপথ বরাবর দুইটি রেলগাড়ী পরস্পর অভিমুখে যথাক্রমে α এবং β বেগে ধাবমান। যখন তাহাদের মধ্যে দূরত্ব d, তখন তাহারা পরস্পরকে

দেখিল এবং সঙ্গে সঙ্গে ব্রেক প্রয়োগ করায় তাহারা যথাক্রমে a এবং b সমমন্দনে চলিতে লাগিল। প্রমাণ কর যে, দুর্ঘটনা কোনক্রমে এড়ানো সম্ভব হইবে, যদি

$$\frac{\alpha^2}{a}+\frac{\beta^2}{b}=2d.$$

α এবং β-এর মান যথাক্রম 45 মা./ঘ.; এবং 60 মা./ঘ.; $a=18$ ফু./সে.^{2} ও $d=121$ গজ হইলে b-এর মান কিরূপ হইলে, দুর্ঘটনা হওয়ার সম্ভাবনা কম ?

25. নির্দিষ্ট প্রারম্ভিক বেগ লইয়া সরলরেখায় সমত্বরণে গতিবিশিষ্ট একটি কণা t-তম সেকেণ্ডে x ফুট এবং $(t+n)$-তম সেকেণ্ডে y ফুট অতিক্রম করে। দেখাও যে, উহার ত্বরণ $(y-x)/n$ ফু./সে.^{2}। [W. B. H. S. 1960]

26. সরলরেখায় f সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা কোন এক অবকাশ t সেকেণ্ডে s ফুট দূরত্ব এবং পরবর্তী অবকাশ t' সেকেণ্ডে s' ফুট অতিক্রম করে। দেখাও যে,

$$f=2\left(\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}\right)\Big/(t+t').$$

27. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা পর পর A, B, C বিন্দু দিয়া যায়। A হইতে B তে যাইতে t_1 সময়, B হইতে C তে যাইতে t_2 সময় উহার লাগিলে, এবং $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$ হইলে, প্রমাণ কর যে, কণাটির ত্বরণ

$$=\frac{2(bt_1-at_2)}{(t_1+t_2)t_1t_2}.$$ [W. B. H. S. 1972]

28. সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা যথাক্রমে t_1, t_2, t_3 সময় পরে ঐ সরলরেখার উপরিস্থ O বিন্দু হইতে যথাক্রমে x_1, x_2, x_3 দূরত্বে থাকে। দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ

$$=2\left\{\frac{(x_2-x_3)t_1+(x_3-x_1)t_2+(x_1-x_2)t_3}{(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)}\right\}.$$

29. একটি রেলগাড়ী কোন এক ষ্টেশন হইতে স্থিরাবস্থায় যাত্রা আরম্ভ করিয়া 4 মিনিট পরে 2 মাইল দূরত্বে পরবর্তী ষ্টেশনে থামে। মাইল ও মিনিট যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক হইলে, এবং ট্রেনটি প্রথমে x সমত্বরণে এবং পরে y সমমন্দনে চলিয়া থাকিলে, দেখাও যে,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4.$$

30. একটি রেলগাড়ী এক ষ্টেশন হইতে স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা আরম্ভ করিয়া 14 মিনিটে 7 মাইল দূরত্বে অবস্থিত পরবর্তী ষ্টেশনে থামে। যদি গাড়ীটি প্রথমে সমত্বরণে এবং পরে সমমন্দনে চলিয়া থাকে, তবে উহার সর্বাধিক বেগ কত ছিল ?

31. একটি রেলগাড়ী এক ষ্টেশন হইতে (স্থিতাবস্থা হইতে) রওয়ানা হইয়া অপর এক ষ্টেশনে থামে। ইহা প্রথমে f সমত্বরণে যাত্রা করে। যখন ষ্টীম বন্ধ করিয়া ব্রেক প্রয়োগ করা হয়, তখন ইহা সমমন্দন f' এতে চলিতে থাকে। যদি দুইটি ষ্টেশনের মধ্যে দূরত্ব a হয় তবে দেখাও যে, এক ষ্টেশন হইতে অপর ষ্টেশন যাইবার সময় $=\sqrt{\left\{\dfrac{2a(f+f')}{f.f'}\right\}}$.

32. একটি ট্রেন 50 মিনিটে X ষ্টেশন হইতে স্থিরাবস্থায় যাত্রা আরম্ভ করিয়া Y ষ্টেশনে স্থিরাবস্থায় আসে। X এবং Y এর মধ্যবর্তী Z স্থানে, উহার সর্বাধিক বেগ 50 মা./ঘ. হয়। যদি উহা X হইতে Z পর্যন্ত সমত্বরণে এবং Z হইতে Y পর্যন্ত সমমন্দনে চলিয়া থাকে, তবে X এবং Y এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

[W. B. H. S. 1972]

33. দুইটি কণা একই সরলরেখায় একই দিকে যথাক্রমে f_1 এবং f_2 সমত্বরণে চলিতেছিল। ঐ সরলরেখার উপরিস্থ O বিন্দু হইতে যখন a_1 এবং a_2 দূরত্বে উহারা ছিল, তখন তাহাদের বেগ যথাক্রমে u_1 এবং u_2. প্রমাণ কর যে, তাহারা পরস্পরকে দুইবারের বেশী অতিক্রম করিতে পারে না ; এবং যদি তাহারা দুইবার মিলিত হয়, তবে তাহাদের মিলিত হইবার অবকাশ,

$$2\sqrt{\{(u_1-u_2)^2-2(a_1-a_2)(f_1-f_2)\}}/(f_1\sim f_2).$$

34. একটি ট্রেন্ স্থিরাবস্থায় A ষ্টেশন্ হইতে যাত্রা আরম্ভ করিয়া c দূরত্বে অবস্থিত অপর এক ষ্টেশন্ B তে পৌছাইবার জন্য চলিতে থাকে। প্রথম t সময় সমত্বরণে, পরবর্তী t সময় সমবেগে এবং পরে সমমন্দনে চলিয়া অতিরিক্ত t' সময়ে B এতে আসিয়া থামিল। প্রথম অবস্থার ত্বরণ নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1961]

35. সোজা রেলপথে স্থিরাবস্থা হইতে স্থিরাবস্থায় পরিভ্রমণ শেষ করিতে একটি ট্রেনের T সময় লাগে। ইহা প্রথমে $2T/n$ সময় সমত্বরণে চলিয়া V বেগ লাভ করে ; পরে $(n-3)T/n$ সময় V বেগে চলিতে থাকে এবং অবশেষে T/n সময় সমন্দনে চলিয়া থাকে। প্রমাণ কর যে, ইহার গড় বেগ $(2n-3)V/(2n)$.

[W. B. H. S. 1962]

ANSWERS (প্রশ্নমালা 5)

1. ত্বরণ $=5$ সে. মি./সে.^{2} ; দূরত্ব $=280$ সে. মি.।

2. প্রারম্ভিক বেগ $=10$ সে. মি./সে. ; এক মিনিট পরে বেগ $=190$ সে. মি./সে. ; অতিক্রান্ত পথ $=60$ মিটার ; 3. বেগ $=30$ ফু./সে. ; ত্বরণ $=-2$ফু./সে.^{2}

4. বেগ $=6$ ফু./সে. ; ত্বরণ $=4$ ফু./সে.^{2} 5. ত্বরণ $=1$ ফু./সে.^{2} ; সময় $=6$ সেকেণ্ড। 6. ত্বরণ $=12$ ফু./সে.^{2} ; দূরত্ব $=69$ ফুট। 7. হ্যাঁ, সামঞ্জস্যপূর্ণ।

8. সমত্বরণের সহিত সঙ্গতিপূর্ণ ; ত্বরণ $=2/9$ ফু./সে.^{2} 9. যাত্রা মুহূর্তের 15 সেকেণ্ড পরে ; 11. 13 ফুট ; বেগ $=24$ ফু./সে. ; সময় $=4$ সেকেণ্ড।

12. দূরত্ব $=3/8$ মাইল ; মন্দন $=22/45$ ফুট/সে.^{2}।

13. 48 সেকেণ্ড ; 16 সেকেণ্ড ; 14. 1 ইঞ্চি।

15. $\frac{1}{3}$ ইঞ্চি। 16. সময় $=\frac{16}{21}\times 10^{-3}$ সেকেণ্ড ; বেগ $=750\sqrt{2}$ ফুট/সে.

20. 40 ফুট/সে. ; 9·6 সে.। 21. 15 সেকেণ্ড পরে ; 225 ফুট দূরে।

22. 8 সেকেণ্ড ; দূরত্ব $=48$ ফুট এবং সময় $=4$ সেকেণ্ড।

23. 3 সেকেণ্ড পরে ও 15 সেকেণ্ড পরে ; 3 সেকেণ্ড পরে গাড়ীটির বেগ সাইকেলের বেগের চেয়ে কম ; কিন্তু 15 সেকেণ্ড পরে, ইহা তাহার বিপরীত।

24. 16 ফু./সে.^{2}, বা, উহার অধিক হওয়া প্রয়োজন।

30. ঘণ্টায় 60 মাইল। 32. $20\frac{5}{6}$ মাইল। 34. ত্বরণ $=\dfrac{2c}{t(3t+t')}$.

ষষ্ঠ অধ্যায়

নিউটনের গতিসূত্র

(Newton's Laws of motion)

6-1. উপস্থাপন।

গতিবিদ্যার আলোচনায় এ পর্য্যন্ত কেবল দ্রুতি, বেগ ও ত্বরণ এবং তৎসংক্রান্ত নানাবিধ প্রশ্নাবলী আলোচিত হইয়াছে। বস্তুর গতির কারণ কি এবং বস্তুর ভরের সহিত বলের কোনও সম্পর্ক থাকিতে পারে কিনা তাহা এ পর্য্যন্ত আলোচিত হয় নাই। বর্ত্তমান অধ্যায়ে বলের অস্তিত্ব, বলের সহিত ভরের সম্পর্ক এবং বলের প্রকৃতি আলোচিত হইবে। নিউটনের "গতি-সূত্র" হইতে ইহাদের জানা যাইবে।

1686 খৃষ্টাব্দে নিউটন তাঁহার লিখিত *"Principia Mathematica"* নামক গ্রন্থে গতি সম্বন্ধীয় মূল তথ্যগুলিকে তিনটি সূত্রের আকারে লিপিবদ্ধ করিয়া গিয়াছেন। সেইগুলি নিউটনের "গতি-সূত্র" নামে পরিচিত। ইহাদের প্রমাণ করা যায় না; বলবিদ্যায় ইহারা মৌলিক তথ্য হিসাবে পরিচিত। এই সূত্রগুলির উপর নির্ভর করিয়া গ্রহ ও উপগ্রহের অবস্থান ও গতি-পথ নির্ভুল ভাবে গণনা করা সম্ভব হইয়াছে।

6-2. নিউটনের গতি-সূত্র ঃ

প্রথম সূত্র ঃ বাহির হইতে প্রযুক্ত বল দ্বারা কোন বস্তুর অবস্থার পরিবর্ত্তন না ঘটিলে, স্থির বস্তু চিরকাল স্থিরাবস্থায় থাকিবে, এবং গতিশীল বস্তু চিরকাল সমবেগে সরলরেখায় চলিতে থাকিবে।

[*Every body continues in its state of rest or in its state of uniform motion in a straight line, except in so far as it is compelled by an external impressed force to change that state.*]

দ্বিতীয় সূত্র ঃ একটি গতিশীল বস্তুর ভরবেগের পরিবর্ত্তন-হার বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং ঐ প্রযুক্ত বল যেদিকে ক্রিয়াশীল ভরবেগের পরিবর্ত্তন সেই দিকে হইবে।

[*The rate of change of momentum is proportional to the impressed force, and takes place in the direction in which the force acts.*]

তৃতীয় সূত্র ঃ প্রত্যেক ক্রিয়ার সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া আছে।

[*To every action there is an equal and opposite reaction.*]

6-3. নিউটনের গতি-সূত্রের ব্যাখ্যা।

(a) প্রথম সূত্রের ব্যাখ্যা ঃ

প্রথম সূত্রের প্রথম অংশে বলা হইয়াছে, কোন বস্তু যদি স্থিরাবস্থায় থাকে, তবে উহা চিরকালই স্থিরাবস্থায় থাকিবে, যদি বাহিরের কোন বল বস্তুটির ঐ অবস্থার পরিবর্তন না ঘটায়। বস্তুর এই ধর্মকে **স্থিতিজাড্য (Inertia of rest)** বলা হয়।

একটি বইকে টেবিলের ওপর রাখিলে, উহা একই স্থানে চিরকাল, স্থিরাবস্থায় থাকিবে, যদি না উহার উপর বাহিরের বল প্রয়োগ করিয়া ঐ অবস্থার পরিবর্তন করা হয়। কিন্তু, মনে রাখা দরকার, বাহিরের প্রযুক্ত বল দ্বারা বস্তুর স্থিরাবস্থার পরিবর্তন নাও হইতে পারে। বস্তুর জাড্য ধর্মের জন্য বস্তুটি প্রযুক্ত বল কর্তৃক উহার অবস্থান পরিবর্তনের চেষ্টাকে বাধা প্রদান করিবে। কিন্তু, যখন বস্তুটি ঐ পরিবর্তনের চেষ্টাকে বাধা দিতে সক্ষম হইবে না, কেবলমাত্র তখনই বস্তুটির অবস্থান পরিবর্তন হইবে।

স্থিরাবস্থায় একটি ট্রামগাড়ীতে একজন আরোহী বসিয়া থাকিলে, এবং ঐ গাড়ীটি হঠাৎ চলিতে শুরু করিলে, বস্তুর জাড্য ধর্মহেতু শরীরের উপরের অংশ স্থিরাবস্থায় থাকিবার চেষ্টা করে ; কিন্তু শরীরের নিম্নভাগের যে অংশ গাড়ীর সংস্পর্শে থাকে তাহা গাড়ীর গতির অভিমুখে গাড়ীর সহিত গতিশীল হয়। সেইজন্য গাড়ী চলার সঙ্গে সঙ্গে দেহের উপরের অংশ পিছনের দিকে হেলিয়া পড়ে।

প্রথম সূত্রের দ্বিতীয়াংশে বলা হইয়াছে, কোন বস্তু সমবেগে সরলরেখায় গতিশীল থাকিলে, তাহা চিরকাল ঐভাবে থাকিবে যদি না বাহিরের প্রযুক্ত বল ঐ অবস্থার পরিবর্তন করে। বস্তুর এই ধর্মকে **গতি-জাড্য (Inertia of motion)** বলা হয়।

একটি চলন্ত বাস হইতে কেহ নামিয়া পড়িলে, তাহার পা দুইটি মাটির সংস্পর্শে আসিয়া মাটির ঘর্ষণজনিত বাধাহেতু থামিয়া যায়। কিন্তু, দেহের উপরের অংশ বস্তুর জাড্য ধর্মহেতু গাড়ির গতির সমান গতিতে সামনের দিকে গতিশীল থাকে। সেইজন্য, চলন্ত গাড়ী হইতে নামিবার সঙ্গে সঙ্গে দেহের উপরের অংশ গাড়ীর গতির দিকে হেলিয়া পড়িতে চেষ্টা করে।

একটি চলন্ত ট্রামগাড়ী হঠাৎ থামিয়া গেলে, গতি-জাড্য হেতু ঐ গাড়ীতে আসীন আরোহীর শরীরের উপরের অংশ গতিশীল থাকিতে চায় ; কিন্তু গাড়ীর সহিত সংলগ্ন অংশ গাড়ীর সহিত থামিয়া যায়। সেইজন্য আরোহী সামনের দিকে হেলিয়া পড়ে।

"বাহির হইতে প্রযুক্ত বল" দ্বারা কি বুঝায় তাহা নিম্নের উদাহরণ লক্ষ্য করিলে বুঝিতে অসুবিধা হইবে না। একটি অবিস্তার্য শক্ত দড়ির একপ্রান্ত নিজের কোমরে বাঁধিয়া অপরপ্রান্ত এক হাতে ধরিয়া উপরের দিকে টানিতে থাকিলে (সেই টান যাহাই হউক না কেন), ইহাতে নিজের শরীরকে উপরে তোলা যাইবে না। এইখানে দড়ির টান বাহির হইতে প্রযুক্ত বল নহে।

টেবিলের উপর স্থিরাবস্থায় একটি বই আছে। ঐ বইটির এক পার্শ্বে হাত দ্বারা উপযুক্ত পরিমাণ চাপ দিয়া ঐ স্থিরাবস্থার পরিবর্তন করা যাইতে পারে। এখানে, ঐ প্রযুক্ত চাপই "বাহির হইতে প্রযুক্ত বলের" দৃষ্টান্ত।

গোলের মুখে একটি ফুটবল জোরে ছুটিয়া আসিবার সময় গোলরক্ষক উহাকে হাত দিয়া ধরিলে, হাতে সে যে চাপ অনুভব করে তাহাই বাহির হইতে প্রযুক্ত বলের দৃষ্টান্ত।

(b) দ্বিতীয় সূত্রের ব্যাখ্যা:

নিউটনের দ্বিতীয় গতি-সূত্র হইতে প্রযুক্ত বলের পরিমাপ সম্বন্ধে ধারণা করা যাইবে। একটি বস্তুকে v বেগে ছুঁড়িতে যে বলের প্রয়োজন উহাকে $2v$ বেগে ছুঁড়িতে তাহার দ্বিগুণ বলের প্রয়োজন। আবার, m ভরের কোনও বস্তুকে v বেগে ছুঁড়িতে যে বলের প্রয়োজন, $2m$ ভরের বস্তুকে v বেগে ছুঁড়িতে তাহার দ্বিগুণ বলের প্রয়োজন। সুতরাং, বলের পরিমাপ নির্ণয়ে বল প্রয়োগে উৎপন্ন বেগ এবং বস্তুর ভর উভয়েরই বিবেচনা করিতে হইবে। দেখা যায়, সমান বেগ পরিবর্তনের জন্য অসমান ভরবিশিষ্ট দুইটি বস্তুতে উহাদের ভরের সমানুপাতে বল প্রয়োগ প্রয়োজন।

নির্দিষ্ট মুহূর্তের জন্য কোনও বস্তুর ভর ও উহার বেগের গুণফলকে ঐ মুহূর্তের জন্য উহার ভরবেগ **(momentum)** বলা হয়।

তাহা হইলে, ভরবেগের পরিবর্তন-হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক হইবে এবং প্রযুক্ত বল যে দিকে ক্রিয়াশীল ভরবেগের পরিবর্তনও সেইদিকে হইবে; অর্থাৎ; অবচ্ছিন্নভাবে প্রযুক্ত বল তাহার নিজের দিকে একটি ত্বরণ উৎপন্ন করিবে।

"বলের প্রকৃতিগত স্বাধীনতা তত্ত্ব" (Principle of Physical Independence of forces):

কোনও একটি বস্তুর উপর অবচ্ছিন্নভাবে প্রযুক্ত একটি বল তাহার নিজের ক্রিয়ার দিকে একটি ত্বরণ উৎপন্ন করিবে। সুতরাং, কোনও একটি বস্তুর উপর একাধিক বল যুগপৎ ক্রিয়াশীল হইলে, প্রত্যেক বলই নিজস্ব দিকে ও অভিমুখিতায় একটি ত্বরণ উৎপন্ন করিবে, যে ত্বরণ অপর কোনও বল বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল না হইলেও উৎপন্ন হইত।

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, প্রত্যেক বলের প্রকৃতিগত স্বাধীনতা আছে, এবং তাহা অপর কোনও বলের ক্রিয়াকে ব্যাহত করে না; অর্থাৎ, একটি বলের ক্রিয়া এবং অপর যে কোনও বলের ক্রিয়া পরস্পর নিরপেক্ষ। ইহাই, **"বলের প্রকৃতিগত স্বাধীনতা তত্ত্ব"** নামে পরিচিত।

সোজা রেলপথ বরাবর সমবেগে চলন্ত রেলগাড়ীতে আসীন একজন যাত্রী একটি মার্ব্বেল সোজা উপরে ছুঁড়িয়া দিলে, কিছুক্ষণ পরে ঐ মার্ব্বেলটি যথাযথভাবে পুনরায় তাহার হাতে পড়িবে। এখানে, যে মুহূর্ত্তে মার্ব্বেলটি ছুড়িয়া দেওয়া হইল, ঠিক সেই মুহূর্ত্তে রেলগাড়ীর বেগের সমান এবং রেলগাড়ী যেদিকে যাইতেছে সেইদিকে মার্ব্বেলের একটি বেগ আছে; তাহা ছাড়া, উপরের দিকে ছুঁড়িবার জন্য মার্ব্বেলের আরও একটি বেগ উপরের দিকে ক্রিয়াশীল। কিন্তু, অভিকর্ষজ ত্বরণ মার্ব্বেলের উপর নীচের দিকে ক্রিয়া করিতেছে। উর্দ্ধমুখী প্রক্ষেপ-বেগ ও নিম্নমুখী ত্বরণের ক্রিয়ায় মার্ব্বেলটি উপরে কিছুটা উঠিবার পর, পুনরায় পূর্বস্থানে ফিরিয়া আসিত যদি রেলগাড়ী স্থির থাকিত। কিন্তু অনুভূমিকরেখা বরাবর রেলগাড়ীর গতি-হেতু, ঐ অবকাশে গাড়ীটি কিছুটা পথ যাওয়ায় ঐ ব্যক্তিও ঠিক ততটা পথ আগাইয়া গিয়াছে। সুতরাং, ঐ অবকাশে রেলগাড়ীর বেগহেতু, মার্ব্বেলটি সামনের দিকে ঠিক ততটা পথ আগাইয়া না গেলে উহা পুনরায় যাত্রীর হাতে ফিরিয়া আসিত না। ইহা দ্বারা বুঝা যাইতেছে, মার্ব্বেলটির উপর প্রযুক্ত বলসমূহ নিজ নিজ দিকে অন্য নিরপেক্ষভাবে ক্রিয়া করিতেছে।

সার্কাসে একটি খেলা সাধারণতঃ দেখা যায়। জোকার ঘোড়ার পিঠে চড়িয়া চলিতে চলিতে হঠাৎ উপরের দিকে লাফ দেয়; কিন্তু কিছুক্ষণ পরে দেখা যায় সে ঐ ছুটন্ত ঘোড়ার পিঠেই পড়ে। ইহা পূর্ব দৃষ্টান্তের অনুরূপ।

(c) তৃতীয় সূত্রের ব্যাখ্যা:

তৃতীয় সূত্র হইতে প্রযুক্ত বলের একটি সাধারণ ধর্ম জানা যায়, যথা—"প্রতিটি ক্রিয়ার একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া থাকিবে"। এখানে, **"ক্রিয়া"** কথার অর্থ, একটি বস্তু কর্তৃক অপর একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল এবং **"প্রতিক্রিয়া"** কথার অর্থ, দ্বিতীয়টি দ্বারা প্রথমটির উপরে প্রযুক্ত বল। তৃতীয় সূত্রানুসারে ক্রিয়া ও উহার প্রতিক্রিয়া সমান হইবে এবং তাহারা পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করিবে।

টেবিলের উপর একটি বস্তু রাখিলে, উহা উল্লম্বভাবে নিম্নদিকে টেবিলের উপর একটি বল প্রয়োগ করে। ইহাই টেবিলের উপর বস্তুটির ক্রিয়া। অপর পক্ষে,

টেবিলটিও বস্তুটির উপরে উল্লম্বভাবে উর্ধ্বদিকে সমান পরিমাপের একটি বল প্রয়োগ করে। ইহাই বস্তুটির উপর টেবিলের প্রতিক্রিয়া।

যখন, কোন ব্যক্তি নৌকা থেকে লাফ দিয়ে তীরে নামে, তখন নৌকাটিও বিপরীত দিকে চলিয়া যাইতে থাকে। নৌকার উপরে যে বল-প্রয়োগ করিয়া লোকটি তীরে লাফ দেয় তাহা "ক্রিয়া" বলের দৃষ্টান্ত। আবার নৌকাটি লোকটির উপর সমান ও বিপরীত বল প্রয়োগ করে। ইহাই "প্রতিক্রিয়ার" দৃষ্টান্ত।

6-4. আভ্যন্তরীণ বল ও বহিরাগত বল :

একই বস্তুর বিভিন্ন অংশ পরস্পরে একে অপরের উপর যে বল প্রয়োগ করে, অথবা, কতিপয় বস্তুকে লইয়া গঠিত কোনও সিস্টেম (system)-এর একে অপরের উপর পরস্পরে যে বল প্রয়োগ করে, তাহাকে **আভ্যন্তরীণ বল** বলে।

একই সিস্টেমের অন্তর্গত নহে এইরূপ দুইটি বস্তুর একে অপরের উপর বল প্রয়োগ করিলে, দ্বিতীয়টির উপরে প্রযুক্ত বলকে **বহিরাগত বল** বলা হইবে।

চাপ ও টান :

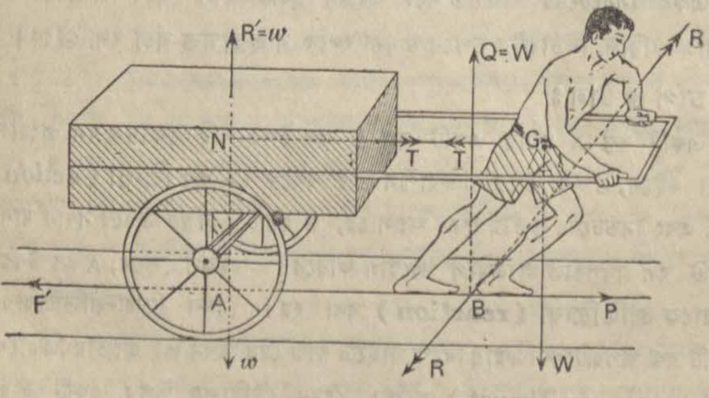
একটি বস্তু A অপর একটি বস্তু B এর উপর যদি কোনও বল প্রয়োগ করে, তাহা হইলে, B এর উপর ক্রিয়াশীল এই বলকে A এর **ক্রিয়া (action)** বলা হয় ; এবং নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুসারে, B বস্তুটি A বস্তুর উপরে সমান মান-বিশিষ্ট একটি বল বিপরীত অভিমুখে প্রয়োগ করিবে। এইরূপ ক্ষেত্রে, A এর উপর B এর ক্রিয়াকে **প্রতিক্রিয়া (reaction)** বলা হয়। যখন ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়ার ফলে, একটি বস্তু অপরটিকে ক্রিয়ার দিকে যাইতে বাধা দেয় তখন এই জাতীয় ক্রিয়াকে **চাপ (Pressure, or Thrust)** বলে। যেমন, টেবিলের উপর একটি বই রাখিলে, উহা টেবিলের উপর নিম্নদিকে যে বল প্রয়োগ করে, তাহাই টেবিলের উপরে সৃষ্ট **চাপ**। আবার, টেবিলও বিপরীত দিকে সমান মানবিশিষ্ট যে বল বইটির উপর প্রয়োগ করে, তাহা টেবিলের **প্রতিক্রিয়া**।

বাঁশের একটি দণ্ড দ্বারা কোন ভারী বস্তুকে ঠেলিতে থাকিলে, ঐ প্রযুক্ত বলই বস্তুটির উপরে দণ্ডের **চাপ** ; আবার বস্তুটিও বিপরীত দিকে সমান মান বিশিষ্ট যে বল দণ্ডের উপর প্রয়োগ করে তাহা বস্তুটির **প্রতিক্রিয়া**।

যখন ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া দুইটি বস্তুকে একসঙ্গে রাখিতে চেষ্টা করে, যাহাতে তাহারা বিচ্ছিন্ন না হইয়া পড়ে, তখন সেই জাতীয় ক্রিয়াকে **টান (Tension, or, Pull)** বলা হয়। কূপ হইতে দড়ির সাহায্যে বালতি করিয়া জল তুলিবার

সময় দড়ি বরাবর নিচের দিকে হাতের উপর বলের অনুভব করা যায়; এই বলই দড়িতে **টানের** দৃষ্টান্ত।

এখন একটি দৃষ্টান্ত লক্ষ্য করা যাক্। মাল বোঝাই দুই চাকার একটি গাড়ীকে একটি দড়ির (বা হ্যাণ্ডেলের) সাহায্যে টানিতে থাকিলে, গাড়ীটিও সমান বল দ্বারা পিছনের দিকে চালককে টানে। তাহা সত্ত্বেও গাড়ী কেন চলিতে থাকে, তাহা দেখা যাক্। দড়ি, (বা হ্যাণ্ডেল) টানিবার সময় লোকটি মাটিতে তির্যকভাবে R চাপ দিতে থাকে, এবং মাটিও বিপরীত দিকে সমান বল R লোকটির উপরে প্রয়োগ করে। সেই প্রতিক্রিয়ার উপাংশ অনুভূমিক বরাবর P ধরা যাক। গাড়ীর উপর চাকার অ্যাক্সেল (axle) এবং মাটির ঘর্ষণ জনিত লব্ধি-বাধা F′ মনে করা যাক্ এবং দড়িতে (বা হ্যাণ্ডেলে) লব্ধি-টান T ধরা যাক্।



এখন, গাড়ীর উপর ক্রিয়াশীল বলসমূহ কেবল বিবেচনা করিলে, গাড়ীটি গতিশীল হইবে, যদি T>F′ হয়। আবার লোকটি উপর ক্রিয়াশীল বলসমূহ কেবল বিবেচনা করিলে, লোকটি গতিশীল হইবে, যদি P>T হয়।

কিন্তু, গাড়ী ও লোকটির উপর ক্রিয়াশীল বলসমূহকে বিবেচনা করিলে, P এবং F′ বহিরাগত বল এবং T, T আভ্যন্তরীণ বল গণ্য হইবে; এবং এইরূপ ক্ষেত্রে আভ্যন্তরীণ বলদ্বয় পরস্পর সমান এবং বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল বলিয়া, গাড়ীটি চলিবে, যদি P>F′ হয়। সুতরাং যদিও দড়িতে T ও T বলদ্বয় বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল, তথাপি গাড়ীটি চলিতে পারে, যদি কেবল P>F′ হয়; যেহেতু এখানে T ও T টানদ্বয় আভ্যন্তরীণ বল, এবং তাহারা ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া হিসাবে কাজ করে।

6-5. ভরবেগ ও তাহার একক :

কোন মুহূর্তে গতিশীল বস্তুর ভর ও বেগের গুণফলকে ঐ মুহূর্তের জন্য ঐ বস্তুর **ভরবেগ (Momentum)** বলা হয়।

তাহা হইলে, কোন মুহূর্তে গতিশীল বস্তুর ভর m এবং ঐ মুহূর্তে উহার বেগ v হইলে, ঐ মুহূর্তের জন্য বস্তুটির **ভরবেগ** mv হইবে।

যেহেতু, যে কোন মুহূর্তে বেগের মান ও দিক্ আছে, অতএব, গতিশীল বস্তুর ভরবেগের মান ও দিক্ থাকিবে। সুতরাং, **ভরবেগ একটি ভেক্টর রাশি।**

এফ্. পি. এস্. (F. P. S.) পদ্ধতিতে ভরবেগের একক 1 পাউণ্ড-ফুট/সেকেণ্ড (সংক্ষেপে, 1 পা.-ফু./সে.) এবং সি. জি. এস্. (C. G. S.) পদ্ধতিতে ভরবেগের একক 1 গ্রাম-সেন্টিমিটার/সেকেণ্ড (সংক্ষেপে, 1 গ্রা.-সে. মি./সে.)।

দৃষ্টান্ত 1. 45 মা./ঘণ্টা সমবেগে গতিশীল 20 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট বস্তুর ভরবেগ নির্ণয় কর।

বেগ = 45 মা./ঘ. = 66 ফুট/সেকেণ্ড।

$\therefore$ নির্ণেয় ভরবেগ = 20×66 পা.-ফু./সে. = 1320 পা.-ফু./সে., এবং তাহা বস্তুর গতির দিক্ বরাবর ক্রিয়াশীল।

দৃষ্টান্ত 2. স্থিরাবস্থা হইতে 15 সে.মি./সে.^{2} সমত্বরণে গতিশীল 16 গ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর ভরবেগ যাত্রার 5 সেকেণ্ড পরে ও 8 সেকেণ্ড পরে কত হইবে ? এই 3 সেকেণ্ড অবকাশে বস্তুটির ভরবেগের পরিবর্তন কত হইবে ?

5 সেকেণ্ড পরে বস্তুর বেগ v সে.মি./সে. হইলে, $v = 0 + 15 \times 5 = 75.$

$\therefore$ 5 সেকেণ্ড পরে ভরবেগ = 16×75 গ্রা.-সে.মি./সে. = 1200 গ্রা.-সে.মি./সে., এবং উহা বস্তুর গতির দিক্ বরাবর ক্রিয়াশীল।

8 সেকেণ্ড পরে বস্তুরবেগ v সে.মি./সে. হইলে, $v = 0 + 15 \times 8 = 120.$

$\therefore$ 8 সেকেণ্ড পরে ভরবেগ = 16×120 গ্রা.-সে.মি./সে.
= 1920 গ্রা.-সে.মি./সে.,

এবং উহা বস্তুর গতির দিক্ বরাবর।

সুতরাং, এই $(8-5)$ সেকেণ্ডে, অর্থাৎ, 3 সেকেণ্ডে ভরবেগের পরিবর্তন
= (1920 − 1200) গ্রা.-সে.মি./সে.
= 720 গ্রা.-সে.মি./সে.।

6-6. P=mf সূত্র স্থাপন :

মনে করি, একটি বস্তুর উপর P পরিমাপবিশিষ্ট একটি বল অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রিয়াশীল, এবং t মুহূর্ত্তে বস্তুটির ভর m, বেগ v ও ত্বরণ f, যেখানে $\frac{dv}{dt}=f$ এবং P বলের জন্য উহার দিক্ বরাবর ত্বরণ f উৎপন্ন। তাহা হইলে, নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী,

$$\frac{d}{dt}(m\,v) \propto P\;;$$

বা, $$P=K\frac{d}{dt}(mv),\ (\,K=\text{ধ্রুবক}\,)\text{।} \qquad \cdots \qquad (1)$$

$\therefore$ বস্তুটির ভর সর্ব্বদা অপরিবর্তিত থাকিলে, (1) হইতে,

$$P=Km\frac{dv}{dt}\;;$$

বা, $$P=Kmf \qquad \cdots \qquad (2)$$

যেখানে, ধ্রুবক K এর মান বলের একক, ভরের একক ও ত্বরণের এককের উপর নির্ভরশীল।

এখন, যে পরিমাপ বল এক একক ভরের উপর প্রযুক্ত হইয়া এক একক ত্বরণ উৎপন্ন করে তাহাকে এক একক বল ধরা যাক্। এইরূপ মনোনীত একক লইলে, অর্থাৎ, যখন $m=1$ এবং $f=1$, তখন $P=1$ হইলে, (2) হইতে পাই,

$$1=K\times1\times1\;;\ \text{অর্থাৎ,}\ K=1.$$

সুতরাং, এইরূপ মনোনীত এককের সাহায্যে (2) হইতে পাই :

$$\mathbf{P=mf}\;; \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (3)$$

অর্থাৎ, **বল = ভর × ত্বরণ।**

মন্তব্য : $P=mf$ সূত্র স্থাপনে যে বল এক একক ভরের উপর প্রযুক্ত হইয়া এক একক ত্বরণ উৎপন্ন করে তাহাকে বলের একক হিসাবে ধরা হইয়াছে। সুতরাং, একক মনোনয়নে, উহাদের যে কোণটির পরিবর্ত্তন হইলে, এই সূত্রটি তখন প্রযোজ্য হইবে না। যেমন, যে বল 5 একক ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত হইয়া এক একক ত্বরণ উৎপন্ন করে তাহাকে এক একক বল ধরিলে, (2) হইতে পাই, $1=K\times5\times1$; অর্থাৎ, $K=1/5$; এবং তখন, $P=\frac{1}{5}mf$; অর্থাৎ, $5P=mf$.

দ্রষ্টব্য : $P=mf$ কে **প্রচলিত গতি-সমীকরণ (Standard kinetic equation)** বলা হয়। কোন গতিশীল বস্তুর ভর ও ত্বরণ জানা থাকিলে, উহাদের গুণফলই বস্তুটির উপর অবিচ্ছিন্নভাবে প্রযুক্ত বলের পরিমাপ হইবে। তাহা ছাড়া, অতি অবশ্যই মনে রাখা দরকার, $P=mf$ সূত্রে P যেদিকে ক্রিয়াশীল থাকিবে, f ও সেইদিকে ক্রিয়াশীল হইবে।

6-7. বলের পরম একক :

$P=mf$ সূত্র স্থাপনে মনোনীত একক বলকে **বলের পরম একক (absolute unit of force)** বলা হয়। ইহার কারণ, সকল স্থানেই এই একক বল অপরিবর্তনীয় থাকে।

বলের পরম একক দুই শ্রেণীর : যেমন (1) পাউণ্ড্যাল্ (Poundal) ও (2) ডাইন্ (Dyne).

পাউণ্ড্যাল্ : যে পরিমাণ বল এক পাউণ্ড ভরের উপর অবিচ্ছিন্নভাবে প্রযুক্ত হইয়া 1 ফুট/সেকেণ্ড^2 ত্বরণ উৎপন্ন করে তাহাকে এক **পাউণ্ড্যাল্** বলা হয়। সুতরাং এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক এক **পাউণ্ড্যাল্**।

ডাইন্ : যে পরিমাণ বল এক গ্রাম ভরের উপর অবিচ্ছিন্নভাবে প্রযুক্ত হইয়া 1 সে.মি./সেকেণ্ড^2 ত্বরণ উৎপন্ন করে তাহাকে এক **ডাইন্** বলা হয়। সুতরাং, সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক এক **ডাইন্**।

মন্তব্য : Absolute unit of force (a poundal or a dyne) is also called a Dynamical unit of force.

দ্রষ্টব্য : 1. $P=mf$ সূত্রে বলের পরিমাপ পাউণ্ড্যাল্ অথবা ডাইন্ হইবে। বস্তুর ভর $=m$ পাউণ্ড এবং উহার ত্বরণ $=f$ ফুট/সে.^{2} হইলে $P=mf$ পাউণ্ড্যাল্ হইবে। কিন্তু বস্তুর ভর $=m$ গ্রাম ও উহার ত্বরণ f সে.মি./সে.^{2} হইলে, $P=mf$ ডাইন্ হইবে।

দ্রষ্টব্য : 2. যেহেতু, 1 পাউণ্ড $=453{\cdot}6$ গ্রাম এবং 1 ফুট $=30{\cdot}48$ সেন্টিমিটার (প্রায়),

∴ 1 পাউণ্ড্যাল্ $=$ 1 পাউণ্ড $\times$ 1 ফুট/সেকেণ্ড^2

$=453{\cdot}6$ গ্রাম $\times\ 30{\cdot}48$ সে.মি./সেকেণ্ড^2

$=453{\cdot}6\times30{\cdot}48$ ডাইন্

$=13825{\cdot}728$ ডাইন্

অর্থাৎ, 1 পাউণ্ড্যাল্ $=13800$ ডাইন্ (প্রায়);

এবং 1 ডাইন্ $=\frac{1}{13800}$ পাউণ্ড্যাল্ (প্রায়)।

দৃষ্টান্ত 1. 50 গ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর একটি ধ্রুবক বল P অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রিয়াশীল হওয়ায়, 2 সে.মি./সে.^{2} ত্বরণ উৎপন্ন হইলে, P এর মান কত ?

$P = mf = 50 \times 2$ ডাইন $= 100$ ডাইন্।

দৃষ্টান্ত 2. 200 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর একটি ধ্রুবক বল P অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রিয়াশীল হওয়ায়, স্থিরাবস্থা হইতে 22 সেকেণ্ড পরে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ উৎপন্ন করিলে, বলের পরিমাপ কত ছিল ?

ঘণ্টায় 30 মাইল $= 44$ ফুট/সেকেণ্ড ;

এখন, $v = u + ft$ সূত্র সাহায্যে $44 = 0 + f \times 22$; অর্থাৎ, $f = 2$ ফু./সে.^{2}।

$\therefore \ P = mf = 200 \times 2$ পাউণ্ড্যাল্ $= 400$ পাউণ্ড্যাল্।

6-8. নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র (Newton's Law of Gravitation) :

বিশ্বের প্রতিটি বস্তু অপর যে কোন বস্তুকে উহাদের ভরকেন্দ্র সংযোজক সরলরেখা বরাবর একটি বল দ্বারা আকর্ষণ করে, যাহা বস্তুদ্বয়ের ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং ভরকেন্দ্রের দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।

[*Every body in the Universe attracts every other body with a force, in the direction of the straight line joining their centres of mass, which is directly proportional to the product of their masses and inversely proportional to the square of the distance between their centres of mass.*]

এই আকর্ষণকে **মহাকর্ষ** বলা হয়। ইহাই প্রাথমিক বল। মনে করি, দুইটি বস্তুর ভর m_1 এবং m_2 এবং উহাদের ভরকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব d. তাহা হইলে, বস্তুদ্বয়ের যে কোনটি অপরটিকে F পরিমাপ বল দ্বারা আকর্ষণ করিলে,

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{d^2} \; ; \text{ অর্থাৎ, } F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{d^2},$$

যেখানে, G একটি ধ্রুবক এবং ইহাকে **মহাকর্ষীয় ধ্রুবক (gravitational constant)** বলা হয়। এই G এর মান ভরের একক, দূরত্বের একক ও বলের এককের উপর নির্ভর করে। সি. জি. এস. পদ্ধতিতে $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-8}$ (প্রায়)।

মন্তব্য : আকর্ষণ (attraction) ও বিকর্ষণ (repulsion) :

যে বল দ্বারা একটি বস্তু অপর একটি বস্তুকে কাছে টানিতে চেষ্টা করে, তাহাকে **আকর্ষণ বল (Force of attraction)** বলা হয়। কিন্তু, যে বল দ্বারা একটি বস্তু অপর একটি বস্তুকে দূরে সরাইতে চেষ্টা করে তাহাকে **বিকর্ষণ বল (Force of repulsion)** বলা হয়।

6·9. অভিকর্ষ (gravity) ও ভার (weight) ঃ

পৃথিবী অন্যান্য সকল বস্তুকে যে বল দ্বারা আকর্ষণ করে তাহাকে **অভিকর্ষজ বল (Force of gravity)** বলা হয়। সুতরাং, মহাকর্ষের এক বিশেষ প্রকারই অভিকর্ষ। পৃথিবীর আকর্ষণই **অভিকর্ষ**। পৃথিবী যে অভিকর্ষজ বল দ্বারা কোন বস্তুকে তাহার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে তাহাকে ঐ বস্তুর **ভার (weight)** বলা হয়। সুতরাং, **ভার একপ্রকার বলের নামান্তর**। ভারের মান ও দিক্ উভয়ই আছে; সেইজন্য ইহা ভেক্টর রাশি।

নিউটনের দ্বিতীয় গতি-সূত্র হইতে আমরা জানি, কোন বস্তুর উপর কোন একটি বল প্রযুক্ত হইলে, ঐ বলের অভিমুখিতায় একটি ত্বরণ উৎপন্ন হয়। অভিকর্ষজ বলের ক্রিয়ায় উৎপন্ন কোন একটি পতনশীল বস্তুর ত্বরণকে **অভিকর্ষজ ত্বরণ (acceleration due to gravity)** বলা হয় এবং ইহাকে g দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং, m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর ভার W হইলে,

$W = mg$ (in absolute units) ; ... (1)

অর্থাৎ, $W = mg$ পাউণ্ড্যাল্, (বস্তুর ভর $= m$ পাউণ্ড এবং g-এর মান ফুট-সেকেণ্ডে প্রকাশিত হইলে);

অথবা, $W = mg$ ডাইন্, (বস্তুর ভর $= m$ গ্রাম এবং g-এর মান সেন্টিমিটার-সেকেণ্ডে প্রকাশিত হইলে);

সুতরাং, $m = 1$ পাউণ্ড হইলে, 1 পাউণ্ড ভরের ভার $= g$ পাউণ্ড্যাল্ ;

অর্থাৎ, **1পাউণ্ড-ভার = g পাউণ্ড্যাল্ ; (i.e., 1 lb. wt. = g poundals).**

কিন্তু $m = 1$ গ্রাম হইলে, 1 গ্রাম ভরের ভার $= g$ ডাইন্ ;

অর্থাৎ, **1 গ্রাম-ভার = g ডাইন্ ; (i e., 1 gm. wt. = g dynes).**

এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে **অভিকর্ষীয় বলের একক (gravitational unit of force) এক পাউণ্ড-ভার** এবং সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে অভিকর্ষীয় বলের একক **এক গ্রাম-ভার**।

আবার, মহাকর্ষ সূত্র হইতে,

$$W = G.\frac{Mm}{r^2}, \qquad \cdots \qquad (2)$$

যেখানে, $G =$ ধ্রুবক ; $m =$ বস্তুর ভর ; $M =$ পৃথিবীর ভর ; $r =$ ঐ বস্তু ও পৃথিবীর ভরকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব, এবং বস্তুটি ভূপৃষ্ঠে অথবা উহা হইতে ঊর্ধ্বে অবস্থিত এবং $W =$

বস্তুটির ভার; অর্থাৎ, পৃথিবী যে বল দ্বারা বস্তুটিকে তাহার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে।

এখন, (1) এবং (2) হইতে পাই,

$$g=\frac{GM}{r^2}. \qquad \cdots \qquad (3)$$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, g এর মান r এর মানের উপর নির্ভরশীল। যেহেতু পৃথিবী গোলাকৃতি নহে, ভূ-পৃষ্ঠের উপর বিভিন্ন অক্ষাংশে এবং একই অক্ষাংশের বিভিন্ন উচ্চতায় g এর মান বিভিন্ন হইবে।

পৃথিবীর উত্তর ও দক্ষিণ মেরু কিছু চাপা, অর্থাৎ, মেরু-ব্যাসার্ধ বিষুবরৈখিক ব্যাসার্ধ অপেক্ষা কিছু ছোট। সেইজন্য, g এর মান মেরুতে বেশী এবং বিষুবরেখায় কম।

ভূ-পৃষ্ঠের উপর মেরুতে g এর মান 32·26 ফুট/সেকেণ্ড² (বা 983·2 সে. মি./সে.²); বিষুবরেখায় ইহার মান 32·09 ফুট/সেকেণ্ড² (বা 978·1 সে. মি./সে.²) এবং কলিকাতায় উহার মান 32·11 ফুট/সেকেণ্ড² (বা, 978·8 সে. মি./সে.²).

মোটামুটিভাবে g এর মান এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে 32 ফুট/সেকেণ্ড² এবং সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে 980 সেন্টিমিটার/সেকেণ্ড² ধরা হইয়া থাকে। অনুরূপ কোন উল্লেখ না থাকিলে g মান **32 ফু/সে.²** বা **980 সে. মি./সে.²** ধরিয়া লইতে হইবে।

সুতরাং, g এর মান ফুট-সেকেণ্ডে প্রকাশিত হইলে,

1 পাউণ্ড-ভার (1 lb. wt.) = 32 পাউণ্ড্যাল্।

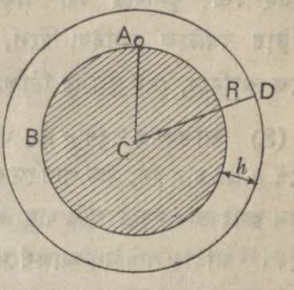
কিন্তু, g এর মান সেন্টিমিটার-সেকেণ্ডে প্রকাশিত থাকিলে,

1 গ্রাম-ভার (1 gm. wt.) = 980 ডাইন্।

মন্তব্য : Gravitational unit of force (i.e., 1 lb. wt., or, 1 gm. wt.) **is also called a statical unit of force.**

দ্রষ্টব্য : (a) ধরা যাক, পৃথিবী গোলাকৃতি এবং উহার ব্যাসার্ধ R ও ভর M. তাহা হইলে, $g=G.\frac{M}{R^2}$, যদি বস্তুটি পৃথিবী পৃষ্ঠে থাকে অথবা $g=G.\frac{M}{(R+h)^2}$ যদি বস্তুটি পৃথিবী পৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় থাকে। এখান হইতে দেখা যাইতেছে, পৃথিবী পৃষ্ঠ হইতে কোন বস্তুকে যতই উপরে নিয়ে যাওয়া হইবে, উহার উপর ক্রিয়াশীল g এর মান ততই কমিতে থাকিবে।

(b) ভূপৃষ্ঠ থেকে পৃথিবীর h দূরত্ব ভিতরে m ভর-বিশিষ্ট একটি বস্তু A তে থাকিলে ঐ স্থানে বস্তুটির জন্য $g=\frac{G.M'}{(R-h)^2}$,



যেখানে, $M'=(R-h)$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট A ঃ গোলকের ভর এবং পৃথিবীর কেন্দ্রই যাহার কেন্দ্র। এই গোলকের বাহিরের অংশ প্রতিসাম্যহেতু বস্তুটির উপর কোন কার্যকরী আকর্ষণ প্রয়োগ করিবে না। পৃথিবী গড় ঘনত্ব σ হইলে,

$$M=\frac{4}{3}\pi R^3\sigma \ ; \ M'=\frac{4}{3}\pi(R-h)^3\sigma.$$

$$\therefore \quad g=G.\frac{4}{3}\pi(R-h)^3.\sigma\times\frac{1}{(R-h)^2}$$

$$=\frac{4}{3}G.\pi\sigma(R-h)=K(R-h), \text{ যেখানে, } K=\frac{4}{3}G\pi\sigma=\text{ধ্রুবক।}$$

সুতরাং, h এর মান যতই বাড়িতে থাকিবে, g এর মান ততই কমিতে থাকিবে। এইরূপ কমিতে কমিতে যদি কল্পনা করা যায় যে, বস্তুটি পৃথিবীর কেন্দ্রে আছে, তাহা হইলে, ঐ স্থানে g এর মান শূন্য হইবে ; অর্থাৎ, $W=m\times 0=0$ হইবে। সেইজন্য, পৃথিবীর কেন্দ্রে সকল বস্তুর ভার শূন্য।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

(1) বলের পরম একক (**absolute unit of force**) অভিকর্ষ অথবা অন্য যে কোন প্রভাব নিরপেক্ষ। অভিকর্ষীয় বলের একক (**gravitational unit of force**) অভিকর্ষের প্রভাবাধীন। মহাকর্ষকে প্রাথমিক বল (**Fundamental force**) বলা হয়।

(2) কোন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজ ত্বরণ সর্বত্র সমান নহে বলিয়া, ঐ বস্তুর ভারও বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন হইবে ; কিন্তু, উহার ভর সর্বত্র একই থাকিবে। সাধারণ তুলাযন্ত্র (**Common balance**) এর সাহায্যে বিভিন্ন অবস্থানে একই বস্তুর বিভিন্ন ভার ধরা পড়িবে না। মনে করি, কোন একটি বস্তুর ভর m ; এবং দুইটি ভিন্ন উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ g এর মান g_1 এবং g_2 ; তাহা হইলে ঐ দুইস্থানে বস্তুটির ভার W_1 এবং W_2 হইলে, $W_1=mg_1$ এবং $W_2=mg_2$ হইবে। সুতরাং, যে বাটখারার ভার (বা, ওজন) প্রথম স্থানে W_1 হইবে, দ্বিতীয় স্থানে সেই

বাটখারার ভার (বা, ওজন) W_2. সেইজন্য উভয় স্থানে সাধারণ তুলাযন্ত্রে একই ভরের ওজন সমান হইবে। একই বস্তুর ওজন যে বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন হইবে তাহা সহজেই স্প্রিং তুলাযন্ত্রে ধরা পড়িবে। এই যন্ত্রটি এমনভাবে নির্মিত যে, স্প্রিং এর আংটায় বস্তুটিকে ঝুলাইয়া দিলে, অভিকর্ষজ ত্বরণ হেতু, বস্তুটি স্প্রিংকে টানিয়া যে সূচকে আনিবে, সেই স্থানের চিহ্নিত দাগ হইতে বস্তুটির ওজন ধরা পড়িবে।

(3) অভিকর্ষজ ত্বরণ g এর মান বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন বলিয়া, সমুদ্রের উপরিভাগে g এর মান যত, উচ্চ পর্ব্বতের চূড়ার উপর মান তাহার চেয়ে বেশ কম। সেইজন্য কোন বস্তুর ভার সমুদ্রোপরি যাহা হইবে, পর্ব্বতের চূড়ায় তাহার চেয়ে অনেক কম হইবে। আবার পৃথিবীর আকর্ষণের বাহিরে বস্তুটি নিয়ে যাওয়া সম্ভব হইলে, সেখানে g এর মান শূন্য হইবে ; এবং তখন m ভরযুক্ত একটি বস্তুর ভার শূন্য হইবে। কারণ, এইরূপ ক্ষেত্রে, বস্তুর ভার $W=m\times g=m\times 0=0$.

(4) আবার, পৃথিবীর ভিতরে যত নীচে একটি বস্তুকে নিয়ে যাওয়া যাইবে, উহার ভার ততই ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে। পৃথিবীর কেন্দ্রে বস্তুটি নিয়ে যাওয়া সম্ভব হইলে, উহার উপর পৃথিবীর মোট আকর্ষণ প্রতিসাম্য হেতু, (**due to symmetry**) শূন্য হইবে, এবং তখন, ঐ বস্তুর কোন ভার থাকিবে না।

(5) পৃথিবীর কেন্দ্রে m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে তুলিতে কোন শক্তি প্রয়োগের প্রয়োজন হয় না। আবার, ঐ বস্তুটিকে ভূপৃষ্ঠের উপর হইতে তুলিতে যে শক্তির প্রয়োজন, ভূপৃষ্ঠ থেকে অনেক উঁচু হইতে উহাকে তুলিতে তাহার চেয়ে অনেক কম শক্তির প্রয়োজন হইবে।

কিন্তু, ঐ বস্তুটিকে নির্দিষ্ট মুহূর্তে নির্দিষ্ট বেগে গতিশীল করিতে একই পরিমাপের বল প্রয়োগ করিতে হইবে—সেই বস্তুটি পৃথিবীর কেন্দ্রে থাকুক, বা ভূপৃষ্ঠের কোথাও থাকুক, অথবা অপর যে কোন স্থানে থাকুক না কেন। তাহার কারণ, $P=mf$ সূত্রটি সর্বত্র প্রযোজ্য, যেখানে প্রারম্ভিক ত্বরণ অর্থাৎ f একই এবং mও একই।

(6) নিবাত শূন্যে (In absolute Vacuo) বিভিন্ন পরিমাপের ভরবিশিষ্ট বস্তুসমূহ একই স্থান হইতে একই সময়ে স্থিরাবস্থা হইতে পতিত হইলে, প্রতি মুহূর্তে প্রত্যেকটির বেগ একই হইবে, এবং তাহারা একই সময়ে একই উচ্চতায় থাকিবে, অর্থাৎ সমান পথ অতিক্রম করিবে। ইহার কারণ, $W=mg$ সূত্র হইতে দেখা যায়, প্রত্যেকটির ত্বরণ একই $(=g)$.

6-10. (a) সমান বলের সংজ্ঞা :

মনে করি, m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর একটি ধ্রুবক বল P অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রিয়াশীল হইয়া ত্বরণ f-উৎপন্ন করে, এবং t অবকাশে উহার বেগ u হইতে v এতে পরিবর্তিত হয়। তাহা হইলে, $v=u+ft$;

এবং $P=mf=\frac{m}{t}(ft)$;

অর্থাৎ, $P=\frac{m}{t}(v-u)$. ... (A)

এবার, মনে করি, ঐ m ভরবিশিষ্ট বস্তুটির উপর P বল ক্রিয়া না করিয়া অপর কোন একটি ধ্রুবক বল P' অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রিয়াশীল হইল, এবং ফলে উহার ত্বরণ f' উৎপন্ন হইল, এবং t অবকাশে উহার বেগ u' হইতে v' এতে পরিবর্তিত হইল। তাহা হইলে $v'=u'+f't$

এবং $P'=mf'=\frac{m}{t}(f't)$;

অর্থাৎ, $P'=\frac{m}{t}(v'-u')$. ... (B)

সুতরাং, যদি $v-u=v'-u'$ হয়, তবে $P=P'$ হইবে।

দুইটি ধ্রুবক বল পৃথক্ পৃথক্ ভাবে (যুগপৎ নহে) একই বস্তুর উপর অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রিয়াশীল হইলে এবং সমান সময়ে বেগের পরিবর্তন (সমান্তরাল দিকে) সমান মানে উৎপন্ন করিলে, ঐ বল দুইটি সমান হইবে।

(b) সমান ভরের সংজ্ঞা :

মনে করি, P পরিমাপবিশিষ্ট দুইটি সমান বল, m এবং m' ভরবিশিষ্ট দুইটি বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল হইয়া যথাক্রমে f এবং f' ত্বরণ উৎপন্ন করে এবং একই সময় t এতে প্রথমটির বেগ u হইতে v এতে এবং দ্বিতীয়টির বেগ u' হইতে v' এতে পরিবর্তিত হয়। তাহা হইলে,

$v=u+ft$; $P=mf$;

এবং $v'=u'+f't$; $P=m'f'$

$\therefore \quad m=\frac{P}{f}=\frac{Pt}{v-u}$;

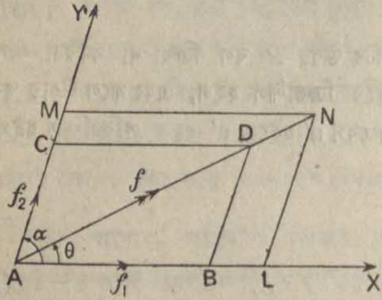
এবং $m'=\frac{P}{f'}=\frac{Pt}{v'-u'}$.

সুতরাং, যদি $v-u=v'-u'\neq 0$ হয়, তবে $m=m'$ হইবে।

দুইটি বস্তুর ভর সমান হইবে, যদি উহাদের উপর সমান পরিমাপ বিশিষ্ট দুইটি বল ক্রিয়াশীল হইয়া একই সময়ে বেগের পরিবর্তন (সমান্তরাল দিকে) সমান মানে উৎপন্ন করে।

6-11. একটি কণার উপর যুগপৎ ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি নির্ণয়।

মনে করি, P ও Q পরিমাপের দুইটি বল A তে অবস্থিত m ভরবিশিষ্ট একটি কণার উপর (যাহা স্থিরাবস্থায় বা গতিশীল অবস্থায় থাকিতে পারে) যুগপৎ $\overrightarrow{AX}$ এবং $\overrightarrow{AY}$ বরাবর যথাক্রমে ক্রিয়াশীল। "বলের প্রকৃতিগত স্বাধীনতা তত্ত্ব" অনুযায়ী, P এবং Q যথাক্রমে $\overrightarrow{AX}$ ও $\overrightarrow{AY}$ বরাবর f_1 এবং f_2 ত্বরণ উৎপন্ন করিবে যেখানে, $P=mf_1$ এবং $Q=mf_2$.



মনোনীত এককের সাহায্যে, $\overline{AB}=f_1$ এবং $\overline{AC}=f_2$ লই এবং ABDC সামান্তরিক অঙ্কন করি এবং $\overline{AD}$ অঙ্কন করি।

$\overline{AD}=f$ হইলে "ত্বরণের সামান্তরিক সূত্র" অনুযায়ী, f_1 এবং f_2 এর লব্ধি হইবে $\overline{AD}$, অর্থাৎ, $f=\sqrt{(f_1^2+f_2^2+2f_1 f_2 \cos \alpha)}$, (মানে),

$$\text{এবং, } \theta=\tan^{-1} \frac{f_2 \sin \alpha}{f_1+f_2 \cos \alpha},$$

যেখানে, $\angle BAC=\alpha$; $\angle BAD=\theta$; এবং $\overrightarrow{AD}$ বরাবর f ক্রিয়াশীল।

এখন, পূর্ব নির্ধারিত এককের সাহায্যে,

$\overline{AL}=P=mf_1=m.\overline{AB}$ লইয়া ALNM সামান্তরিক অঙ্কন করি, যেখানে N, $\overline{AD}$ এর উপরিস্থ এবং $\overline{LN}\parallel\overline{AC}$. এখন, যেহেতু, $\triangle ABD$ ও $\triangle ALN$ সদৃশ,

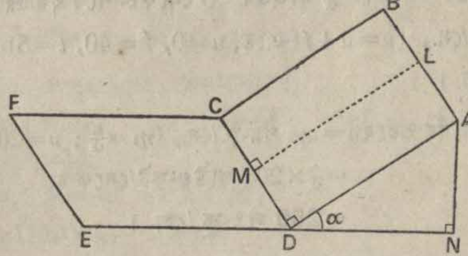
$\therefore \overline{AN}/\overline{AD}=\overline{AL}/\overline{AB}=m.$

অর্থাৎ, $\overline{AN}=m.\overline{AD}=mf.$

সুতরাং, P ও Q এর লব্ধি R (মানে) হইলে, $R=\overline{AN}$ এবং ইহা $\overrightarrow{AN}$ (বা, $\overrightarrow{AD}$) বরাবর ক্রিয়াশীল।

6-12. অনুভূমিক তলের সহিত নির্দ্দিষ্ট কোণে নতিবিশিষ্ট নততল।

যে তল অনুভূমিকতলে, বা উহার সহিত সমকোণে অবস্থিত নহে, তাহাকে **নততল** (Inclined plane) বলা হয়।



চিত্রে, CDEF অনুভূমিক তল ; ABCD একটি নততল, যেথানে উহা অনুভূমিক তলকে $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা বরাবর ছেদ করে। নততলে অবস্থিত যে সরলরেখা অনুভূমিকতল ও নততলের সাধারণ ছেদিত রেখার উপর লম্ব তাহাকে ঐ নততলের **সর্বাধিক নতিবিশিষ্ট রেখা** (the line of greatest slope) বলা হয়। সর্ব্বাধিক নতিবিশিষ্ট রেখার দৈর্ঘ্যই **নততলের দৈর্ঘ্য** (length of the inclined plane); ঐ রেখার সর্ব্বোচ্চ প্রান্ত হইতে অনুভূমিক তলের উপর লম্বের দৈর্ঘ্যই **নততলের উচ্চতা**, (height of the inclined plane) এবং ঐ রেখা এবং অনুভূমিকতলে উহার লম্ব-অভিক্ষেপের মধ্যবর্ত্তী কোণই নততলের **নতি** (angle of the inclined plane).

চিত্রে, $\overleftrightarrow{CD}$ সাধারণ রেখা ; $\overline{AD}\perp\overline{CD}$; $\overline{AN}\perp\overline{DN}$; $\overline{ED}$ ও $\overline{DN}$ একই রেখায় অবস্থিত এবং অনুভূমিক তলে $\overline{DA}$ এর লম্ব-অভিক্ষেপ $\overline{DN}$. $\angle ADN=\alpha$, ($0^\circ<\alpha<90^\circ$).

তাহা হইলে, ABCD নততলের সর্ব্বাধিক নতিবিশিষ্ট রেখা $\overline{AD}$ (= $\overline{LM}$) ; উহার উচ্চতা $\overline{AN}$; উহার দৈর্ঘ্য $\overline{AD}$ এবং নতি α.

যদি $\overline{AD}=n$ এবং $\overline{AN}=1$ হয় তাহা হইলে $\sin\alpha=1/n$. এইরূপ ক্ষেত্রে, ABCD নততলকে **'n এতে 1 উন্নতি বিশিষ্ট নততল'** বলা হইয়া থাকে।

6-13. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 20 আউন্সের একটি বস্তু 40 ফুট/সেকেণ্ড^2 সমত্বরণে সোজাপথে গতিশীল হইলে, 5 সেকেণ্ড পরে উহা কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

বস্তুটির ভর = 20 আউন্স = $\frac{5}{4}$ পাউণ্ড। 5 সেকেণ্ড পরে বস্তুটির বেগ
= 40×5 ফু./সে., ($v=u+ft$-এতে, $u=0$, $f=40$, $t=5$)
= 200 ফু./সে.।

∴ নির্ণেয় ভরবেগ = mv পা.-ফু./সে , ($m=\frac{5}{4}$; $v=200$);
= $\frac{5}{4} \times 200$ পাউণ্ড-ফুট/সেকেণ্ড
= **250 পা.-ফু./সে.।**

উদাহরণ 2. স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া কোন একটি বস্তু 3 সে. মি./সে.^{2} সমত্বরণে সোজাপথে গতিশীল হইল এবং 10 সেকেণ্ড পরে উহা 45000 গ্রা.-সে-মি./সে. ভরবেগ লাভ করিল। বস্তুটির ভর কত ?

10 সেকেণ্ড পরে বস্তুটির বেগ
= 3×10 সে. মি./সে. = 30 সে. মি./সে.।
মনে করি, বস্তুটির ভর = m গ্রাম।
তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে,
$mv = 45000$, ($v=30$) ;
বা, $m \times 30 = 45000$; বা, $m = 1500$.
∴ নির্ণেয় ভর = 1500 গ্রাম = **1·5 কিলোগ্রাম।**

উদাহরণ 3. যে বলের নিরবচ্ছিন্ন ক্রিয়ায় 30 গ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 15 সেকেণ্ডে স্থিতাবস্থা হইতে 9 মিটার দূরে নীত হয়, তাহার মান কত ?

9 মিটার = 900 সেণ্টিমিটার।
বস্তুটি f সে. মি./সে.^{2} সমত্বরণে গতিশীল হইলে, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্রের সাহায্যে,
$900 = 0 + \frac{1}{2} \times f \times (15 \times 15)$; বা, $f=8$.
এখন, $P=mf$ সূত্রের সাহায্যে,
$P = 30 \times 8$ ডাইন = 240 ডাইন্।
∴ নির্ণেয় বলের পরিমাপ = **240 ডাইন্।**

উদাহরণ 4. 10 হন্দর ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর যে বল ক্রিয়াশীল হওয়ায়, 10 সেকেণ্ডে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগ সঞ্চার করে তাহার মান কত ? (বস্তুটি প্রথমে স্থিরাবস্থায় ছিল)।

বস্তুটির ভর $=10\times4\times28$ পাউণ্ড $=1120$ পাউণ্ড।

ঘণ্টায় 3 মাইল বেগ $=\frac{22}{15}\times3$ ফু./সে. $=\frac{22}{5}$ ফু./সে.।

মনে করি, বস্তুটির ত্বরণ $=f$ ফুট/সেকেণ্ড^2।

তাহা হইলে, $v=u+ft$ সূত্র-সাহায্যে,

$\frac{22}{5}=f\times10$; ($\because v=\frac{22}{5}$; $u=0$; $t=10$);

বা, $f=\frac{11}{25}$.

এখন, $P=mf$ সূত্র সাহায্যে,

$P=1120\times\frac{11}{25}$ পাউণ্ডাল্

$=492{\cdot}8$ পাউণ্ডাল্ $=$ **15·4 পাউণ্ড-ভার।**

উদাহরণ 5. 200 ডাইনের একটি ধ্রুবক বল সরলরেখায় গতিশীল একটি বস্তুর উপর অর্ধ মিনিট কাল ক্রিয়া করিলে, উহার বেগ সেকেণ্ডে 290 সে. মি. হইতে সেকেণ্ডে 3·5 মি. এতে পরিবর্তিত হয়। বস্তুটির ভর নির্ণয় কর।

মনে করি, বস্তুটির ত্বরণ $=f$ সে. মি./সে.^{2}।

তাহা হইলে, $v=u+ft$ সূত্র-সাহায্যে,

$350=290+f\times30$; ($\because v=350$; $u=290$; $t=30$);

বা, $f=2$.

মনে করি, বস্তুটির ভর $=m$ গ্রাম।

তাহা হইলে, $P=mf$ সূত্র-সাহায্যে,

$200=m\times2$, ($\because P=200$; $f=2$);

বা, $m=100$.

$\therefore$ নির্ণেয় ভর $=$ **100 গ্রাম।**

উদাহরণ 6. স্থিরাবস্থা হইতে 15 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর একটি ধ্রুবক বল 3 সেকেণ্ড নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রিয়া করিয়া নিষ্ক্রিয় হয়। পরবর্তী 5 সেকেণ্ডে বস্তুটি 320 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করিলে, বলের পরিমাপ কত ছিল ?

[W. B. H. S. 1970]

মনে করি, বলের পরিমাপ P পাউণ্ডাল্, এবং এই বলের ক্রিয়ায় f ফুট/সেকেণ্ড^2 ত্বরণ উৎপন্ন হয়।

স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রার 3 সেকেণ্ড পরে বস্তুটির বেগ v ফু./সে. হইলে,

$v = 3f.$ ... ... (1)

বলটি নিষ্ক্রিয় হইবার পরে, বস্তুটি সমবেগে গতিশীল ছিল। তাহা হইলে, পরবর্তী 5 সেকেণ্ড সময়ের জন্য,

320 ফুট = 5 সেকেণ্ডে সরণ $= v \times 5$ ফুট ;

অর্থাৎ, $320 = 3f \times 5$; বা, $f = \frac{64}{3}$.

এখন, $P = mf$ সূত্র-সাহায্যে

$P = 15 \times \frac{64}{3} = 320.$

∴ নির্ণেয় বলের পরিমাণ = 320 পাউণ্ডাল্ = **10 পাউণ্ড-ভার।**

উদাহরণ 7. 1600 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি মোটরগাড়ী ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে ধাবমান। (i) 11 সেকেণ্ডের পর, (ii) 121 ফুট অতিক্রমের পর গাড়ীটিকে থামাইতে কত পাউণ্ড-ভার বল প্রয়োগ করিতে হইবে ?

ঘণ্টায় 30 মাইল $= \frac{22}{15} \times 30$ ফুট/সে. = 44 ফু./সে. ;

(i) মনে করি, নির্ণেয় বলের পরিমাপ P পাউণ্ডাল্। বস্তুটির গতির বিপরীত মুখে এই বল প্রয়োগ করিলে 11 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ শূন্য হইবে। মনে করি, উহা f ফুট/সেকেণ্ড^2 সমমন্দনে গতিশীল হইল। তাহা হইলে,

$0 = 44 - f \times 11$; বা, $f = 4.$

এখন, $P = mf$ সূত্র-সাহায্যে,

$P = 1600 \times 4 = 6400.$

∴ নির্ণেয় বলের পরিমাপ = 6400 পাউণ্ডাল্ = **200 পাউণ্ড-ভার।**

(ii) মনে করি, দ্বিতীয়ক্ষেত্রে P_1 পাউণ্ডাল্ বল প্রয়োগ করা হইয়াছিল এবং বস্তুটি f_1 ফু./সে.^{2} সমমন্দনে গতিশীল হইয়াছিল।

তাহা হইলে, $0^2 = 44^2 - 2 \times f_1 \times 121$; বা, $f_1 = 8.$

এখন, $P = mf$ সূত্র সাহায্যে,

$P_1 = 1600 \times 8 = 12800.$

∴ নির্ণেয় বলের পরিমাপ = 12800 পাউণ্ডাল্ = **400 পাউণ্ড-ভার।**

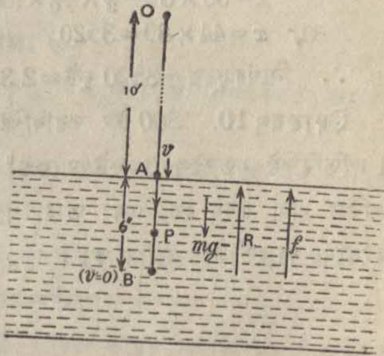
উদাহরণ 8. স্থিরাবস্থা হইতে 10 ফুট পতনের পর 20 পাউণ্ড ভর-বিশিষ্ট একটি বস্তু বালির মধ্যে 6 ইঞ্চি প্রবেশ করিয়া থামিয়া যায়। বস্তুটির উপর বালির চাপ কত ছিল? (ধর ঐ চাপ সুষম) [$g=32$ ফুট/সে.^{2}].

বালিতে প্রবেশ করিবার ঠিক পূর্বমুহূর্তে বস্তুটির বেগ সেকেণ্ডে v ফুট হইলে,

$$v^2=0^2+2g\times 10;$$

বা, $v^2=640.$

মনে করি, বালির চাপ R পাউণ্ড্যাল্ (যাহা উর্দ্ধদিকে ক্রিয়াশীল) এবং বালির মধ্যে বস্তুটি f ফুট/সেকেণ্ড^2 সমমন্দনে গতিশীল।



তাহা হইলে, 6 ইঞ্চি অর্থাৎ 1/2 ফুট বালির মধ্যে প্রবেশ করিয়া বস্তুটি স্থিরাবস্থায় আসায়,

$$0^2=v^2-2f\times\tfrac{1}{2};$$

বা, $f=640.$

এখন, $P=mf$ সূত্র-সাহায্যে,

$$(R-mg)=mf; \text{ অর্থাৎ, } (R-20\times 32)=20\times 640;$$

বা, $R=32\times 420.$

∴ নির্ণেয় চাপ $=32\times 420$ পাউণ্ড্যাল্ $=$ **420 পাউণ্ড-ভার।**

উদাহরণ 9. 100 টন ভরের একটি রেলগাড়ী অনুভূমিক তলে সোজা রেলপথ বরাবর ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে গতিশীল ছিল। ইঞ্জিনের বাষ্প বন্ধ করায় ঘর্ষণ জনিত বাধার দরুণ 1 মিনিট 20 সেকেণ্ড পরে গাড়িটি থামিয়া গেল। প্রতি টনে বাধা কিরূপ ছিল এবং ব্রেক প্রয়োগের পর উহা কত দূর গিয়াছিল?

বেগ ঘণ্টায় 60 মাইল $=88$ ফুট/সেকেণ্ড।

মনে করি, প্রতি টনে বাধা R পাউণ্ড-ভার এবং ঐ বাধার দরুণ গাড়ীটি f ফুট/সে.^{2} সমমন্দনে (ব্রেক প্রয়োগের পর) গিয়াছিল। তাহা হইলে,

$$0=88-f\times 80; \text{ বা, } f=11/10.$$

এবং, $P=mf$ সূত্র-সাহায্যে,

$$R\times100\times32=(100\times2240)\times11/10\ ;$$

বা, $R=77$.

সুতরাং, প্রতি টনে বাধা 77 পাউণ্ড-ভার।

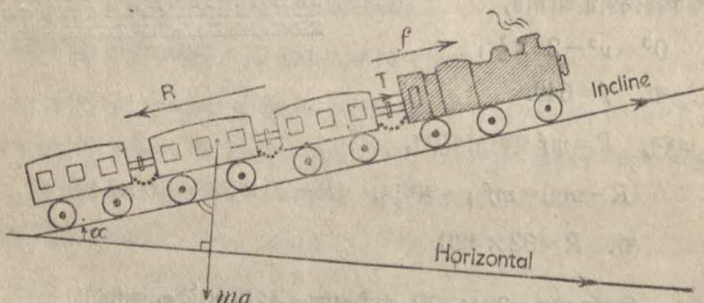
নির্ণেয় দূরত্ব x ফুট হইলে,

$$x=88\times80-\tfrac{1}{2}\times\tfrac{11}{10}\times(80\times80)\ ;$$

বা, $x=44\times80=3520$.

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব = 3520 ফুট = **2/3 মাইল।**

উদাহরণ 10. 300 টন ভরবিশিষ্ট একটি গাড়ীকে একটি ইঞ্জিন 150 এতে 1 নতিবিশিষ্ট নততলে 3 ফুট/সেকেণ্ড² সমত্বরণে টানিয়া উঠাইতেছে। যদি ঘর্ষণ জনিত বাধা সুষম হয়, এবং তাহা গাড়ীটির ভারের $\frac{1}{40}$ অংশ হয়, তবে গাড়ী ও ইঞ্জিনের মধ্যবর্তী টান বাহির কর। [$g=32$ ফু./সে.²] **[W. B. H. S. 1965]**



নততলটি অনুভূমিকের সহিত α কোণ উৎপন্ন করিলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$\sin\alpha=1/150.$$

ঘর্ষণজনিত মোট বাধা R পাউণ্ড্যাল্ হইলে,

$$R=(300\times2240)\times32\times\tfrac{1}{40}.$$

মনে করি, ইঞ্জিনের টান $=T$ পাউণ্ড্যাল্।

তাহা হইলে, $P=mf$ সূত্র-সাহায্যে,

$$(T-R-mg\sin\alpha)=mf\ ;$$

বা, $T=(300\times2240\times32\times\frac{1}{40})+(300\times2240\times32\times\frac{1}{150})+(300\times2240)\times3$

$$=4\times301\times2240$$

$\therefore$ নির্ণেয় টান $= 4 \times 301 \times 2240$ পাউণ্ড্যাল্

$$= \frac{4 \times 301 \times 2240}{32} \text{ পাউণ্ড-ভার}$$

$$= \frac{4 \times 301}{32} \text{ টন-ভার} = 37\frac{5}{8} \text{ টন-ভার।}$$

প্রশ্নমালা 6

1. ঘণ্টায় 40 মাইল বেগে গতিশীল 12 আউন্স ভরবিশিষ্ট বস্তুটির ভরবেগ নির্ণয় কর।

2. 3 টন ভরবিশিষ্ট একটি মোটর গাড়ীর বেগ ঘণ্টায় 45 মাইল হইলে উহার ভরবেগ কত ?

3. স্থিরাবস্থা হইতে 5 সে. মি./সে.^{2} সমত্বরণে গতিশীল 50 গ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 20 সেকেণ্ড পরে কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

4. স্থিরাবস্থা হইতে অবাধে পতনশীল 20 আউন্স ভরের একটি বস্তু 15 সেকেণ্ড পরে কত ভরবেগ লাভ করিবে ? [$g=32$ ফুট/সেকেণ্ড^2].

5. স্থিরাবস্থা হইতে 5 সে. মি./সে.^{2} সমত্বরণে সোজাপথে 10 সে. মি. দূরত্ব অতিক্রমের পর 1 কিলোগ্রাম ভরের একটি বস্তু কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

6. স্থিরাবস্থা হইতে 24 ফু./সে.^{2} সমত্বরণে গতিশীল একটি বস্তু 10 সেকেণ্ড পরে 30 পা.-ফু./সে. ভরবেগ লাভ করিলে, বস্তুটির ভর কত ?

7. স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে সরলপথে গতিশীল 6 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু 5 সেকেণ্ড পরে 60 পা.-ফুট/সে. ভরবেগ লাভ করিলে, বস্তুটির ত্বরণ কত ছিল ?

8. 100 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর কি পরিমাপের একটি ধ্রুবক বল অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রিয়াশীল হইয়া 22 সেকেণ্ড পরে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ সঞ্চার করিবে ?

9. যে বলের অবিচ্ছিন্ন ক্রিয়ায় 30 গ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 1 মিনিটের পরে স্থিরাবস্থা হইতে 441 মিটার দূরে নীত হয়, তাহার পরিমাপ কত ?

($g=980$ সে. মি./সে.^{2})।

10. 10 হন্দর ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর স্থিরাবস্থা হইতে যে ধ্রুবক বল অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রিয়াশীল হওয়ায়, 10 সেকেণ্ড পরে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগ সঞ্চারিত হয়, তাহার পরিমাপ কত ?

11. এক আউন্স ভারের একটি বল এক পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর অবিচ্ছিন্নভাবে সরলরেখায় ক্রিয়াশীল হইলে এবং বস্তুটি স্থিরাবস্থা হইতে চলিতে থাকিলে, 10 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ এবং অতিক্রান্ত দূরত্ব কত হইবে ?

12. 10 পাউণ্ড-ভারের একটি বল 1 টন ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রিয়াশীল হইলে, উহা স্থিরাবস্থা হইতে কত সময়ের পরে 224 ফুট দূরে সরিয়া যাইবে ?

13. একটি ধ্রুবক বল 6 আউন্স ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর স্থিরাবস্থা হইতে অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রিয়াশীল হওয়ায়, 2 সেকেণ্ড পরে উহা বস্তুটিতে সেকেণ্ডে 10 ফুট বেগ সঞ্চার করে। বলের পরিমাপ 'ডাইনে' প্রকাশ কর।

(1 ফুট = 30·5 সে. মি.; 1 পা. = 453·6 গ্রা.) [W. B. H. S. 1967]

14. 200 ডাইনের একটি বল সরলরেখায় গতিশীল একটি বস্তুর উপর গতির অভিমুখে অবিচ্ছিন্নভাবে ক্রিয়াশীল হওয়ায়, 1 মিনিটে উহার বেগ সেকেণ্ডে 250 মিটার হইতে সেকেণ্ডে 300 মিটারে পরিবর্তিত হইল। বস্তুটির ভর কত ?

15. স্থিরাবস্থায় স্থিত 15 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর কোন একটি ধ্রুবক বল 3 সেকেণ্ড ক্রিয়া করিয়া নিষ্ক্রিয় হয়। পরবর্তী 5 সেকেণ্ডে বস্তুটি 320 ফুট পথ অতিক্রম করিলে, বলের পরিমাপ কত ছিল ? [W. B. H. S. 1968]

16. 10 গ্রাম-ভারের একটি 'বল' 27 গ্রাম ভরের একটি বস্তুর উপর এক সেকেণ্ড ধরিয়া ক্রিয়া করে। যদি $g = 981$ সে. মি./সে.^{2} হয়, তবে বস্তুটিতে উৎপন্ন বেগ এবং উহা কতদূর পথ অতিক্রম করিয়াছে, তাহা নির্ণয় কর।

[W. B. H. S. 1969]

17. 3 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর উপর সরলরেখায় একটি বল প্রয়োগ করায়, উহা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 5 সেকেণ্ড পরে 10 ফুট/সেকেণ্ড বেগ অর্জন করে। বলের পরিমাণ নির্ণয় কর। 5 সেকেণ্ড পরে যদি ঐ বলটি নিষ্ক্রিয় হয়, তবে যে সুষম বাধার দরুণ ইহা মোট 10 সেকেণ্ড পরে স্থিরাবস্থায় আসিবে তাহা নির্ণয় কর।

[W. B. H. S. 1962]

18. m পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি স্থির বস্তুর উপর P পাউণ্ড্যাল্ ধ্রুবক বল t সেকেণ্ড সময় ব্যাপিয়া ক্রিয়া করে এবং ঐ সময়ে বস্তুটি x ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে ও t সেকেণ্ডের সময়ে 'সেকেণ্ডে v ফুট' বেগ লাভ করে। প্রমাণ কর যে, $Px = \frac{1}{2}mv^2$.

[W. B. H. S. 1968, '70]

19. স্থিরাবস্থায় স্থিত 9 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর উপর 10773 ডাইন্ পরিমাপের একটি ধ্রুবক বল সরলরেখা বরাবর 2 মিনিট কাল ক্রিয়াশীল থাকিলে, ঐ অবকাশে বস্তুটি কত ফুট দূরত্ব অতিক্রম করিবে ? (1 ফুট=30·4 সে. মি. ; 1 পাউণ্ড=453·6 গ্রাম) [C. U. P. 1963]

20. 30 গ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু যখন সেকেণ্ডে 40 সেন্টিমিটার সমবেগে গতিশীল, তখন ইহা যে অভিমুখে গতিশীল তাহার ঠিক বিপরীত অভিমুখে 60 ডাইন পরিমাপের একটি 'বল' উহার উপর প্রযুক্ত হইল। কত সময় পরে বস্তুটি স্থিরাবস্থায় আসিবে এবং তখন উহা কত পথ অতিক্রম করিবে ? [W. B. H. S. 1963]

21. 3 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু অবাধে অভিকর্ষের প্রভাবে 4 সেকেণ্ড পড়ার পর ঊর্ধ্বাভিমুখে কি পরিমাণ সুষম বল উহার উপর প্রয়োগ করিলে, উহা আরও 64 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করিয়া স্থিরাবস্থায় আসিবে ? [W. B. H. S. 1960]

22. স্থিরাবস্থা হইতে 1 মিটার পতনের পর 100 গ্রাম ভরের একটি বস্তু কাদার মধ্যে 10 সে. মি. প্রবেশ করিয়া স্থিরাবস্থায় আসে। বস্তুটির উপর কাদার বাধা সুষম ধরিয়া তাহা নির্ণয় কর।

23. 10 গ্রাম ভরের একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 10 মিটার পড়িবার পর বালুকার মধ্যে 5 সেন্টিমিটার প্রবেশ করিয়া স্থিরাবস্থায় আসে। বালুকার ধ্রুবক বাধা গ্রাম-ভারে নির্ণয় কর। [C. U. P. 1977]

24. একটি বন্দুকের গুলি 9·6 ইঞ্চি পুরু একটি দেওয়াল ভেদ করাতে উহার বেগ সেকেণ্ডে 1200 ফুট হইতে সেকেণ্ডে 900 ফুট হইল। দেওয়াল ভেদ করিতে কত সময় লাগিল তাহা নির্ণয় কর, এবং অর্ধেক দেওয়াল ভেদ করার পর উহার বেগ কত হইয়াছিল, তাহাও বাহির কর। (ধর যে, দেওয়ালের প্রতিরোধ-ক্ষমতা সুষম)।

[C. U. P. 1975]

25. 10 আউন্স ভরবিশিষ্ট একটি গুলি সেকেণ্ডে 160 ফুট বেগে একটি দেওয়ালে আঘাত করিল এবং দেওয়ালটির 6 ইঞ্চি ভেদ করিয়া স্থিরাবস্থায় আসিল। দেওয়ালের বাধা সুষম হইলে, উহা নির্ণয় কর।

26. সেকেণ্ডে 2000 সে. মি. বেগে ধাবমান একটি বুলেট 4×10^6 ডাইন্ সুষম বাধার বিরুদ্ধে লক্ষ্য স্থানে আঘাত করিয়া 16 সে. মি. ভিতরে প্রবেশ করে। বুলেটের ভর নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1964]

27. একটি রাইফেল বুলেট একটি তক্তা ভেদ করিবার কালে উহা বেগের ১/২০ অংশ হারায়। বুলেট্‌টি যখন স্থিরাবস্থায় আসিবে তখন পাশাপাশি অবস্থিত এইরূপ কতগুলি তক্তা উহা ভেদ কবিতে পারিবে ?

28. একটি ট্রেন্ ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে ধাবমান ছিল। যদি ঘর্ষণজনিত বাধা প্রতি টনে 5 পাউণ্ড-ভার হয়, তবে ব্রেক প্রয়োগ করার পর কত দূরে ইহা থামিবে ?

29. 100 টন ভরের একটি ট্রেন্ ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে যাইতেছিল। ইহাকে ব্রেক প্রয়োগ করিয়া 10 সেকেণ্ডে স্থিরাবস্থায় আনা হইল। ব্রেক প্রয়োগ করার পর ট্রেন্‌টি কতদূর গিয়াছিল এবং কি পরিমাণ ব্রেকের বলই বা প্রয়োগ করা হইয়াছিল ?

[**C. U. P. 1970**]

30. একজন সাইকেল-আরোহী সেকেণ্ডে 4·5 মিটার বেগে যাইতেছিল। সাইকেল ও সাইকেল-আরোহীর মোট ভর 109 কিলোগ্রাম হইলে এবং ঘর্ষণের জন্য পথের মোট বাধা 5 কিলোগ্রাম ভার হইলে, প্যাড্‌লিং বন্ধ করার পর কত দূরত্বে সে স্থিরাবস্থায় আসিবে ? (g = ৯81 সে. মি./সে.^{২})।

31. অনুভূমিকতলে 120 টন্ ভরবিশিষ্ট একটি রেলগাড়ী ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে ধাবমান ছিল। হঠাৎ ইহার বাষ্প বন্ধ করিয়া ব্রেক্ কষায় 200 গজ দূরে গিয়া ইহা থামিল। গতির বিরুদ্ধে মোট বাধা নির্ণয় কর।

32. ইঞ্জিন বাদে একটি রেলগাড়ীর ভর 200 টন এবং ইহা অনুভূমিকতলে গতিশীল। যদি 10 মিনিটে ইহার বেগ ঘণ্টায় 10 মাইল হইতে ঘণ্টায় 40 মাইলে পরিবর্তিত হয়, তবে রেলগাড়ী ও ইঞ্জিনের মধ্যবর্তী টান নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, ঘর্ষণজনিত মোট বাধা প্রতি টনে 10 পাউণ্ড-ভার।

33. ইঞ্জিন বাদ দিয়া একটি রেলগাড়ীর ভর 435 টন। স্থিরাবস্থা হইতে অনুভূমিক তলে সোজাপথ বরাবর যাত্রা করিয়া উহা 7 মিনিটে ঘণ্টায় 40 মাইল বেগ অর্জন করে। প্রতি টনে বাধা 15 পাউণ্ড-ভার হইলে, ইঞ্জিনের টান নির্ণয় কর।

[**W. B. H. S. 1971**]

34. অনুভূমিকতলে সেকেণ্ডে 7 মিটার বেগে দ্রুতগামী একটি ট্রেন্ 100 এতে 1 উন্নতি বিশিষ্ট একটি নততলের পাদদেশে আসিল। যদি ঘর্ষণজনিত বাধা সুষম হয় এবং তাহা প্রতি মেট্রিক টনে 4 কিলোগ্রাম-ভার হয়, তবে গাড়ীটি নততলে কতদূর পর্যন্ত যাইতে পারিবে ? (g=980 সে. মি./সে.^{২})।

35. একটি রেলগাড়ী 100 এতে 1 অবনতি বিশিষ্ট নততলে স্থিরাবস্থা হইতে 1 মাইল পথ অতিক্রম করিয়া নততলের পাদদেশে পৌছায়। যদি ঘর্ষণজনিত মোট বাধা টন প্রতি 8 পাউণ্ড-ভার হয়, তবে গাড়ীটি অনুভূমিক তলে নততলের পাদদেশ হইতে কত দূর যাইবে ?

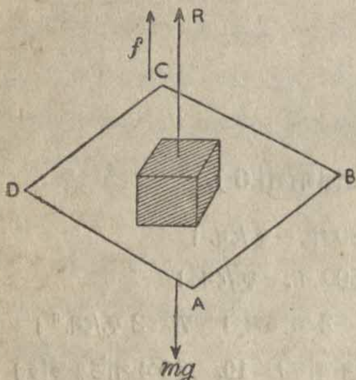
ANSWERS (প্রশ্নমালা 6).

1. 44 পা. – ফু./সে.। **2.** 443, 520 পা. – ফু./সে.।
3. 5000 গ্রা. – সে. মি./সে.। **4.** 600 পা. – ফু./সে.।
5. 10,000 গ্রা. – সে. মি./সে.। **6.** 2 আউন্স্। **7.** 2 ফু./সে.^{2}।
8. $6\frac{1}{4}$ পাউণ্ড-ভার। **9.** 3/4 গ্রাম-ভার। **10.** 15·4 পাউণ্ড-ভার।
11. 20 ফু./সে. ; 100 ফু.। **12.** 56 সে.। **13.** 25,940·25 ডাইন্।
14. 2·4 গ্রাম। **15.** 10 পাউণ্ড-ভার।
16. $363\frac{1}{3}$ সে. মি./সে. ; $181\frac{2}{3}$ সে. মি.।
17. 3 আউন্স্-ভার ; 3 আউন্স্-ভার। **19.** 625 ফুট ;
20. 20 সেকেণ্ড ; 4 মিটার। **21.** 15 পাউণ্ড-ভার।
22. 1100 গ্রাম-ভার। **23.** 2010 গ্রাম-ভার।
24. (2/2625) সে. ; $750\sqrt{2}$ ফু./সে.। **25.** 500 পাউণ্ড-ভার।
26. 32 গ্রাম। **27.** 10 খানা ভেদ করিবে ; একাদশ খানার মধ্যে থামিবে।
28. $2\frac{17}{30}$ মাইল। **29.** 440 ফুট ; 27·5 টন-ভার। **30.** 22·5 মিটার।
31. 24·2 টন-ভার। **32.** $3026\frac{2}{3}$ পাউণ্ড-ভার।
33. $10778\frac{1}{3}$ পাউণ্ড-ভার। **34.** (5/28) কি. মি.। **35.** 1·8 মাইল।

6-14. একটি গতিশীল তলে স্থাপিত ভরের চাপ।

মনে করি, $ABCD$ অনুভূমিক তলে m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু স্থাপিত আছে।

(a). প্রথমে মনে করা যাক্, তলটি উর্ধ্বমুখে f সমত্বরণে গতিশীল। তাহা হইলে বস্তুটিও উর্ধ্বমুখে f সমত্বরণে গতিশীল এবং তখন বস্তুটির উপর তলের উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া R ধরা যাক্।



তাহা হইলে, বস্তুটির গতি সমীকরণ :

$$R-mg=mf.$$

$\therefore\ R=m(g+f)$, উর্ধ্বমুখে।

সুতরাং, নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী, তলের উপর বস্তুটির চাপ R হইবে, যেখানে :

$$\mathbf{R=m(g+f)}, \text{ নিম্নাভিমুখে।}$$

(b). এখন ধরা যাক, তলটি নিম্নমুখে f সমত্বরণে গতিশীল এবং তখন বস্তুটির উপর তলের উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া R.

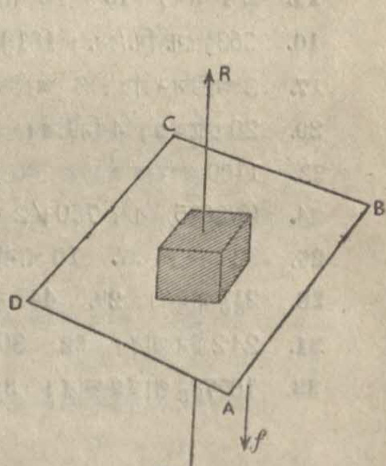
তাহা হইলে, বস্তুটির গতি সমীকরণ :

$$mg-R=mf.$$

$\therefore\ R=m(g-f)$, উর্ধ্বমুখে।

সুতরাং, নিউটনের তৃতীয় গতি সূত্র অনুযায়ী তলের উপর বস্তুটির চাপ $R\downarrow$ হইবে, যেখানে :

$$\mathbf{R=m(g-f)}.$$



দ্রষ্টব্য : তলটি যদি স্থিরাবস্থায় থাকে, অথবা, সমবেগে উপরে উঠে বা নীচে নামে, তাহা হইলে, তলের উপর বস্তুর চাপ R হইবে, যেখানে :

$$\mathbf{R=mg}.$$

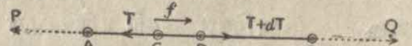
মন্তব্য : তলটি উর্ধ্বমুখে f ত্বরণে উঠিবার কালে উহার বেগ ক্রমশঃ কমিতে থাকিলে, f ঋণাত্মক হইবে, এবং তখন তলের উপর বস্তুটির চাপ mg এর চেয়ে কম হইবে।

অনুরূপভাবে, তলটি নিম্নমুখে f ত্বরণে নামিবার কালে, উহার বেগ ক্রমশঃ কমিতে থাকিলে, তলের উপর বস্তুটির চাপ mg অপেক্ষা বেশী হইবে।

এই সমস্ত কারণে, লিফ্‌টে উপরে উঠিবার বা নীচে নামিবার সময়, কখনও কখনও নিজেকে হালকা এবং কখনও কখনও নিজেকে বেশ ভারী বলিয়া মনে হয়।

6-15. হাল্‌কা ও অবিস্তার্য দড়িতে টান।

(a) মনে করি, l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট AB একটি হালকা ও অবিস্তর্য দড়ি। উহার A প্রান্তে P বল এবং B প্রান্তে Q বল ক্রিয়াশীল এবং দড়িটি একই সরলরেখা বরাবর অশিথিল অবস্থায় অবস্থিত। মনে করি, AB এর উপর যে কোন বিন্দু C এতে দড়ির টান T এবং D এতে উহা $T+dT$. দড়িটি হালকা বলিয়া উহার (দড়ির) ভর শূন্য।



সুতরাং, দড়িটি $\vec{AB}$ বরাবর f ত্বরণে গতিশীল হইলে, CD অংশের গতি সমীকরণ :

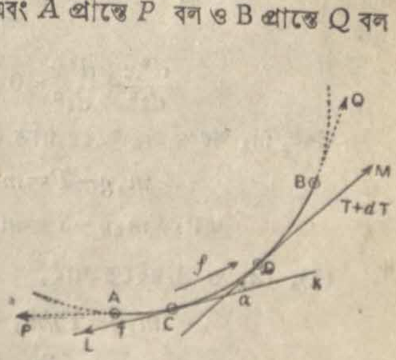
$$(T+dT)-T=0\times f$$

$$\therefore \quad dT=0; \quad \text{অর্থাৎ, } T=\text{ধ্রুবক}।$$

সুতরাং, এইরূপ ক্ষেত্রে, দড়ির টান সর্বত্র একই থাকিবে।

সুতরাং, সাম্যাবস্থায়, $\mathbf{P=T=Q}$.

(b) মনে করি, l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট AB (হাল্‌কা ও অবিস্তার্য) দড়িটি একটি সমতলীয় মসৃণ বক্ররেখার উপর স্থাপিত এবং A প্রান্তে P বল ও B প্রান্তে Q বল সক্রিয়। মনে করি, উহার উপরে যে কোন বিন্দু C এতে দড়ির টান T এবং D এতে উহা $T+dT$, যেখানে বক্ররেখার C ও D এতে স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ অতীব ক্ষুদ্র এবং তাহা α রেডিয়ান্। বক্ররেখাটি মসৃণ বলিয়া, দড়িতে ঘর্ষণজনিত কোন বাধা থাকিবে না। দড়িটি হালকা বলিয়া উহার ভর শূন্য। α অতীব ক্ষুদ্র বলিয়া, দড়ির CD অংশের



উপর বক্ররেখার লম্ব প্রতিক্রিয়ার উপাংশ $\overrightarrow{LC}$ বরাবর প্রায় শূন্য হইবে। সুতরাং, দড়ির CD অংশের জন্য $\overrightarrow{LC}$ বরাবর ইহার গতি- সমীকরণ :

$$(T+dT)\cos\alpha - T = 0\times f\,;$$

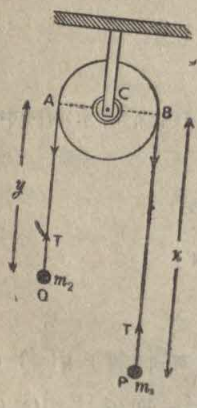
$$\text{বা,}\quad (T+dT)-T=0, \qquad (\because\ \cos\alpha\simeq 1)$$

$$\therefore\ dT=0\,;\ \text{অর্থাৎ,}\quad T=\text{ধ্রুবক}।$$

সুতরাং, এইরূপ ক্ষেত্রেও, দড়ির টান সর্বত্রই একই থাকিবে।

সুতরাং, সাম্যাবস্থায় $\mathbf{P=T=Q}$.

6-16. হাল্কা ও অবিস্তার্য দড়ি এবং মসৃণ কপিকলের সাহায্যে বিভিন্ন বস্তুর গতি ও দড়ির টান নির্ণয়।



(a) মনে করি, l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট হাল্কা ও অবিস্তার্য একটি দড়ির এক প্রান্তে m_1 ভর এবং অপর প্রান্তে m_2 ভর বাঁধিয়া দড়িটিকে একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর স্থাপন করিয়া m_1 ও m_2 কে উল্লম্বভাবে ঝুলাইয়া দেওয়া আছে। মনে করি, দড়ির টান T এবং t সময়ে কপিকলের কেন্দ্র বরাবর অনুভূমিক তল হইতে m_1 এবং m_2 এর দূরত্ব যথাক্রমে x ও y. তখন, কপিকলের ব্যাসার্ধ a ধরিলে,

$$x+y+\pi a=l\,;$$

$$\text{অর্থাৎ,}\quad x+y=(l-\pi a)=\text{ধ্রুবক}।$$

$$\therefore\ \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=0\,;\ \text{অর্থাৎ,}\quad \ddot{x}+\ddot{y}=0. \qquad \cdots(1)$$

এখন, m_1 ভর ও m_2 ভরের গতি সমীকরণ যথাক্রমে :

$$m_1g-T=m_1\ddot{x} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots(2)$$

$$\text{এবং,}\quad m_2g-T=m_2\ddot{y} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots(3)$$

(1), (2), ও (3) হইতে পাই,

$$(m_1g-T)/m_1+(m_2g-T)/m_2=0.$$

$$\therefore\ \mathbf{T=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g.} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (4)$$

(1) হইতে $\ddot{y}=-\ddot{x}$; অর্থাৎ, m_1 ভরটি নিম্নাভিমুখে যে ত্বরণে গতিশীল হইবে, m_2 ভরটিও সেই একই ত্বরণে ঊর্ধ্বাভিমুখে গতিশীল হইবে ; অথবা বিপরীতক্রমে।

(2) এবং (4) হইতে,

$$\ddot{x}=\frac{(m_1-m_2)}{m_1+m_2}g\,; \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots(5)$$

এবং তখন, (1) এবং (5) হইতে,

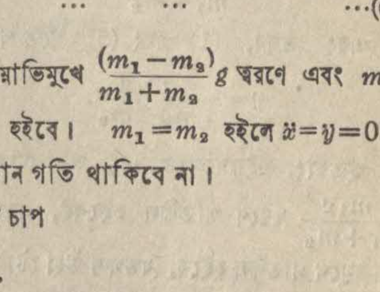
$$\ddot{y}=-\frac{(m_1-m_2)}{m_1+m_2}g \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots(6)$$

সুতরাং, $m_1>m_2$ হইলে, m_1 ভর নিম্নাভিমুখে $\frac{(m_1-m_2)}{m_1+m_2}g$ ত্বরণে এবং m_2 ভর ঊর্ধ্বাভিমুখে একই ত্বরণে গতিশীল হইবে। $m_1=m_2$ হইলে $\ddot{x}=\ddot{y}=0$; $T=m_1g$; এবং তখন, যে কোন ভরের কোন গতি থাকিবে না।

দ্রষ্টব্য : কপিকলের উপর দড়ির মোট চাপ

$$=2T=\frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}g.$$

(b) মনে করি, l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট হাল্কা ও অবিস্তার্য একটি দড়ির এক প্রান্তে m_1 ভর এবং অপর প্রান্তে m_2 ভর বাঁধিয়া, m_2 ভরকে একটি অনুভূমিক মসৃণ টেবিলের উপর রাখা আছে ; এবং ঐ টেবিলের এক প্রান্তে একটি স্থির ক্ষুদ্র মসৃণ কপিকলের উপর দড়িটি স্থাপন করিয়া m_1 ভরটিকে নিম্নদিকে উল্লম্বভাবে ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। মনে করি, দড়ির টান T এবং কপিকলের কেন্দ্র হইতে t সময়ে m_2 এর দূরত্ব y এবং উহার কেন্দ্র বরাবর অনুভূমিক তল



হইতে m_1 এর দূরত্ব x. তাহা হইলে, সর্বদাই $x+y=l-\frac{1}{2}\pi a=$ ধ্রুবক ; ($a=$ কপিকলের ব্যাসার্ধ)।

$$\therefore\ \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=0\,;\ \text{অর্থাৎ,}\ \ddot{x}+\ddot{y}=0. \qquad \cdots \quad (1)$$

এখন, m_1 এবং m_2 এর গতি সমীকরণ যথাক্রমে :

$$m_1g-T=m_1\ddot{x}\,; \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

$$\text{এবং,}\quad -T=m_2\ddot{y}. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (3)$$

(1), (2) এবং (3) হইতে পাই :

$$(m_1g-T)/m_1-T/m_2=0.$$

$$\therefore \quad T=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}g. \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(2) এবং (4) হইতে পাই :

$$\ddot{x}=\frac{m_1g}{m_1+m_2}\,; \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

এবং তখন, (1) এবং (5) হইতে পাই :

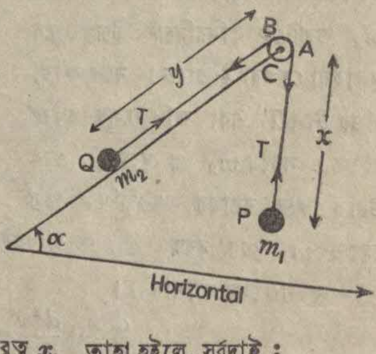
$$\ddot{y}=-\frac{m_1g}{m_1+m_2}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে, m_2 ভর যেমন হউক না কেন, m_1 ভরটি নিম্নাভিমুখে $\frac{m_1g}{m_1+m_2}$ ত্বরণে গতিশীল হইবেই, এবং m_2 ভরটিও সেই একই ত্বরণে কপিকল অভিমুখে গতিশীল হইবে, (যতক্ষণ উহা টেবিলের উপর থাকিবে)।

দ্রষ্টব্য : কপিকলের উপর দড়ির মোট চাপ

$$=2T\cos 45^\circ=T\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)g.$$

(c) মনে করি, l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট হাল্কা ও অবিস্তার্য একটি দড়ির একপ্রান্তে m_1 ভর এবং অপর প্রান্তে m_2 ভর বাঁধিয়া অনুভূমিক তলের সহিত α (রেডিয়ান্) কোণে নতিবিশিষ্ট নততলে m_2 স্থাপিত করা আছে এবং ঐ নততলের শীর্ষোপরি একটি স্থির ক্ষুদ্র মসৃণ কপিকলের উপর দড়িটি লইয়া m_1 ভরটিকে নিম্নদিকে উল্লম্বভাবে ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। মনে করি, দড়ির টান T এবং কপিকলের কেন্দ্র হইতে t সময়ে m_2 এর দুরত্ব y এবং উহার কেন্দ্র বরাবর অনুভূমিকতল হইতে m_1 এর দুরত্ব x. তাহা হইলে, সর্বদাই :



$$x+y=l-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)a=\text{ধ্রুবক}\,;\ (a=\text{কপিকলের ব্যাসার্ধ})\,।$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=0\,;\ \text{অর্থাৎ},\ \ddot{x}+\ddot{y}=0. \quad (1)$$

এখন, m_1 এবং m_2 এর গতি সমীকরণ যথাক্রমে :

$$m_1 g - T = m_1 \ddot{x}\,; \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

এবং, $$m_2 g \sin \alpha - T = m_2 \ddot{y} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(1), (2) ও (3) হইতে পাই :

$$(m_1 g - T)/m_1 + (m_2 g \sin \alpha - T)/m_2 = 0$$

$$\therefore \quad T = \frac{(1 + \sin \alpha) m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

তখন, (2) এবং (4) হইতে পাই :

$$\ddot{x} = \frac{(m_1 - m_2 \sin \alpha)}{m_1 + m_2} g\,; \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

এবং, (1) ও (5) হইতে,

$$\ddot{y} = \frac{-(m_1 - m_2 \sin \alpha)}{m_1 + m_2} g. \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

সুতরাং, $m_1 > m_2 \sin \alpha$ হইলে, m_1 ভরটি নিম্নাভিমুখে $\frac{(m_1 - m_2 \sin \alpha)}{m_1 + m_2} g$ ত্বরণে এবং m_2 ভরটি নততলে কপিকল অভিমুখে ঐ একই ত্বরণে গতিশীল হইবে। $m_1 = m_2 \sin \alpha$ হইলে, কোন ভরেরই গতি থাকিবে না।

দ্রষ্টব্য : কপিকলের উপর দড়ির মোট চাপ

$$= 2T \cos \tfrac{1}{2} (90^\circ - \alpha)$$

মন্তব্য : (i) $\alpha = 90^\circ$ হইলে (*a*) এর, এবং (ii) $\alpha = 0^\circ$ হইলে (*b*) এর ফল এইখান হইতে পাওয়া যাইবে।

6-16. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. 10 ষ্টোন্ ভরের এক ব্যক্তি 8 ফু./সে.^{2} ত্বরণে একটি লিফ্‌টে চড়িয়া নীচের দিকে নামিতে থাকিলে, লিফ্‌টের উপর তাহার পায়ের চাপ কত হইবে ? যদি লিফটটি ঐ ত্বরণে উপরে উঠিতে থাকিত, তবে লিফ্‌টের উপর তাহার পায়ের চাপ কত হইত ? নামিবার বা উঠিবার সময় যদি লিফ্‌টের চেন ছিঁড়িয়া যায়, তবে ঐ চাপ কত হইবে ? [$g = 32$ ফু./সে.^{2}]

$m = 10$ ষ্টোন $= 10 \times 14$ পাউণ্ড $= 140$ পা. ; $f = 8$ ফু./সে.^{2} ।

মনে করি, লিফ্‌টের উপর ঐ ব্যক্তির পায়ের চাপ $= R$ পাউণ্ড্যাল্ ।

(i) যখন লিফ্‌টটি নীচের দিকে 8 ফুট/সেকেণ্ড² ত্বরণে নামিতে থাকিবে, তখন :

$$mg - R = mf;$$

বা, $R = m(g-f) = 140 \times (32-8) = 140 \times 24$;

∴ নির্ণেয় চাপ $= 140 \times 24$ পাউণ্ড্যাল্

$= \frac{140 \times 24}{32}$ পা.-ভার $= 7\frac{1}{2}$ ষ্টোন্‌-ভার

(ii) যখন লিফ্‌টটি উর্ধ্বদিকে 8 ফু./সে.² ত্বরণে উঠিতে থাকিবে, তখন :

$$R - mg = mf;$$

বা, $R = m(g+f) = 140 \times (32+8) = 140 \times 40$;

∴ নির্ণেয় চাপ $= 140 \times 40$ পাউণ্ড্যাল্

$= \frac{140 \times 40}{32}$ পা.-ভার $= 12\frac{1}{2}$ ষ্টোন-ভার।

যদি নীচের দিকে নামিবার সময় বা উপরের দিকে উঠিবার সময় চেনটি ছিঁড়িয়া যায়, তবে উভয়ক্ষেত্রেই লোকসহ লিফ্‌টটি g ত্বরণে নীচের দিকে নামিতে থাকিবে: এবং উভয় ক্ষেত্রেই, $mg - R = mg$; বা, $R = 0$: অর্থাৎ, লিফ্‌টের উপর ঐ ব্যক্তির চাপ শূন্য হইবে।

উদাহরণ 2. 5 আউন্স্‌ ও 3 আউন্স্‌ ভর বিশিষ্ট দুইটি বস্তু একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর দিয়ে ঝুলানো একটি হাল্‌কা ও প্রসারবিহীন দড়ির দুই মাথায় যথাক্রমে উল্লম্বভাবে ঝুলিতে থাকিলে, দড়ির টান ও উভয় বস্তুর ত্বরণ নির্ণয় কর। [$g = 32$ ফু./সে.²]

এখানে, $m_1 = 5$ আউন্স্‌ $= \frac{5}{16}$ পাউণ্ড ;

$m_2 = 3$ আউন্স্‌ $= \frac{3}{16}$ পাউণ্ড ;

মনে করি, নির্ণেয় টান T পাউণ্ড্যাল্ এবং নির্ণেয় ত্বরণ f ফুট/সেকেণ্ড²। তাহা হইলে,

$$m_1 g - T = m_1 f \text{ ; এবং } T - m_2 g = m_2 f.$$

$$\therefore \; (m_1 + m_2) f = (m_1 - m_2) g \; ;$$

বা, $f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{(5-3)/16}{(5+3/16} \times 32 = 8.$

এবং $T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2 \times 5 \times 3}{16 \times 16} \times \frac{16}{5+3} \times 32 = 7\frac{1}{2}.$

∴ নির্ণেয় টান $= 7\frac{1}{2}$ পাউণ্ড্যাল্ এবং ত্বরণ $= 8$ফু./সে.²।

উদাহরণ 3. 6 পাউণ্ড ও 10 পাউণ্ড ভর বিশিষ্ট দুইটি বস্তু একটি হাল্কা ও প্রসারবিহীন দড়ির দুই মাথায় বাঁধিয়া একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া উল্লম্বভাবে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। 6 পাউণ্ড ভরটি 9 ফুট উচুতে উঠিবার মুহূর্তে দড়িটি ছিঁড়িয়া গেলে, কতক্ষণ পরে ঐ বস্তুটির উর্ধ্বগতি রুদ্ধ হইবে?

এখানে, $m_1=10$ পা. ; $m_2=6$ পা. ; $g=32$ ফু./সে.^{2}

মনে করি, বস্তুদ্বয়ের ত্বরণ f ফু./সে.^{2} এবং দড়ির টান T পাউণ্ড্যাল্। তাহা হইলে,

$$m_1g-T=m_1f \text{ ; এবং } T-m_2g=m_2f.$$

$$\therefore \quad f=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g=\frac{10-6}{10+6}\times 32=8.$$

সুতরাং, ভর দুইটি প্রত্যেকে 8 ফু./সে.^{2} ত্বরণে চলিতে থাকিবে।

মনে করা যাক্, 6 পাউণ্ড ভরটি 9 ফুট উঠিবার পর উহার বেগ v_1 ফু./সে.। তাহা হইলে, $v^2=u^2+2fs$ সূত্র-সাহায্যে,

$$v_1^2=2\times 8\times 9, \quad (\because \; v=v_1\,;\; u=0\,;\; f=8\,;\; s=9)\,; \text{ বা, } v_1=12.$$

সুতরাং, 9 ফুট উঠিবার মুহূর্তে 6 পাউণ্ড ভরের বস্তুটির বেগ উর্ধ্বদিকে 12 ফু/সে. ছিল। এই মুহূর্তে দড়ি ছিঁড়িয়া গেলে, কতক্ষণ পরে ভরটির উর্ধ্বগতি রুদ্ধ হইবে, তাহাই দেখিবার কথা। মনেকরি, t সেকেণ্ড পরে উহার বেগ উর্ধ্বদিকে শূন্য হইবে। তাহা হইলে,

$v=u+ft$ সূত্র-সাহায্যে,

$0=12+(-32)\times t$; বা, $t=3/8$.

$\therefore$ নির্ণেয় সময়$=3/8$ সেকেণ্ড।

উদাহরণ 4. একটি মসৃণ টেবিলের উপর স্থিত 8 আউন্স ভরের একটি ঘনকের সহিত একটি হালকা ও অবিস্তার্য দড়ির এক প্রান্ত সংযুক্ত করিয়া এবং অপর প্রান্তে 4 আউন্স ভরের একটি গুলি বাঁধিয়া দড়িটিকে টেবিলের একপ্রান্তে একটি স্থির ক্ষুদ্র মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া গুলিসহ উল্লম্বভাবে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। দড়ির টান ও যে কোন বস্তুর ত্বরণ কিরূপ হইবে?

এখানে, $m_1=4$ আউন্স $=\frac{1}{4}$ পাউণ্ড ;

$m_2=8$ আউন্স $=\frac{1}{2}$ পাউণ্ড।

মনে করি, দড়ির টান T পাউণ্ড্যাল্ এবং নির্ণেয় ত্বরণ f ফুট/সেকেণ্ড^2।

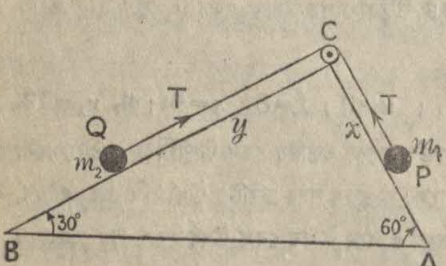
তাহা হইলে,

$$m_1g - T = m_1 f \text{ এবং } T = m_2 f.$$

$$\therefore\ f = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2} = 32/3\ ;\ T = \frac{1}{2} \times \frac{32}{3} = 16/3.$$

∴ নির্ণেয় টান $= 16/3$ পাউণ্ড্যাল্ এবং ত্বরণ $= 32/3$ ফু./সে.^{2}

উদাহরণ 5. অনুভূমিকতলের সহিত $60°$ এবং $30°$ নতিবিশিষ্ট দুইটি মসৃণ নততলে যথাক্রমে 5 পাউণ্ড ও 3 পাউণ্ড ভরের দুইটি বস্তুকে রাখিয়া এবং একটি হাল্কা ও প্রসারহীন দড়ির দুই প্রান্তে উহাদের যথাক্রমে বাঁধিয়া ঐ দড়িটিকে নততলদ্বয়ের সাধারণ মাথায় স্থিত একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর রাখিলে (যেখানে দড়িটি অশিথিল অবস্থায় আছে) স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রার 1 সেকেণ্ড পরে দ্বিতীয় বস্তুটি কতদূর পথ অতিক্রম করিবে?



এখানে, $m_1 = 5$ পাউণ্ড ; $m_2 = 3$ পাউণ্ড।

মনে করি, দড়ির টান T পাউণ্ড্যাল্। ধরা যাক্, গতি আরম্ভের t সেকেণ্ড পরে, m_1 এবং m_2 ভরের দুরত্ব কপিকল হইতে নততল বরাবর যথাক্রমে x ফুট এবং y ফুট। তাহা হইলে,

$$x + y = \text{ধ্রুবক}\ ;\ \text{অর্থাৎ, } \ddot{x} + \ddot{y} = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (1)$$

এখন, m_1 এবং m_2 ভরের বস্তুদ্বয়ের গতি-সমীকরণ যথাক্রমে,

$$m_1 g \sin 60° - T = m_1 \ddot{x}\ ; \qquad \ldots\ldots \qquad (2)$$

$$m_2 g \sin 30° - T = m_2 \ddot{y} \qquad \ldots\ldots \qquad (3)$$

এখন, (1), (2) এবং (3) হইতে পাই,

$$(m_1 g \sin 60° - T)/m_1 + (m_2 g \sin 30° - T)/m_2 = 0\ ;$$

বা, $\left(5 \times 32 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - T\right) \Big/ 5 + (3 \times 32 \times \frac{1}{2} - T)/3 = 0\ ;$

বা, $\frac{8}{15} \times T = 16(\sqrt{3} + 1)$. $\therefore\ T = 30(\sqrt{3} + 1)$.

$$\therefore\ \ddot{y} = g \sin 30° - T/m_2 = 16 - 10(1 + \sqrt{3})$$
$$= -(10\sqrt{3} - 6).$$

সুতরাং, নততল বরাবর 3 পাউণ্ড বস্তুটি কপিকলের দিকে $(10\sqrt{3}-6)$ ফু./সে.^{2} সমত্বরণে যাইতে থাকিবে।

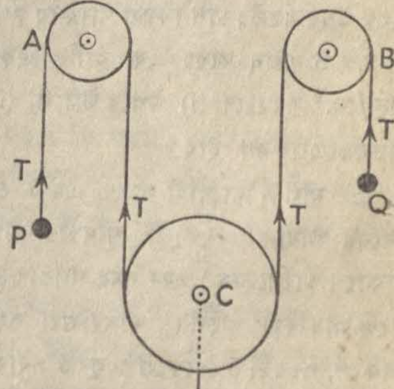
তাহা হইলে, গতি আরম্ভের পর 1 সেকেণ্ডে a ফুট দূরত্ব অতিক্রম করিলে, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র-সাহায্যে,

$a=\frac{1}{2}\times(10\sqrt{3}-6)\times 1=5\sqrt{3}-3=5{\cdot}66$ প্রায়।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=(5\sqrt{3}-3)$ ফুট, বা, $5{\cdot}66$ ফুট (প্রায়)।

উদাহরণ 6. একটি প্রসারবিহীন হাল্কা দড়ির দুই প্রান্তে P ও Q ওজনের দুইটি বস্তুকে বাঁধিয়া দুইটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া যথাক্রমে দুইপার্শ্বে P ও Q কে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল ; এবং কপিকলদ্বয়ের মধ্যবর্তী দড়ির ফাঁসে (loop) W ওজনের একটি মসৃণ কপিকল ঝুলাইয়া রাখা হইল। যদি W সর্বদা নিশ্চল থাকে, এবং দড়ির ঝুলানো অংশগুলি উল্লম্বভাবে থাকে, তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}=\frac{4}{W}.$$



মনে করি, দড়ির টান T ; এবং গতি আরম্ভের পর t সময়েতে যে কোন স্থির কপিকল দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক তল হইতে P, Q, W এর দূরত্ব যথাক্রমে x, y, z. তাহা হইলে, সর্বদাই

$x+y+2z=$ ধ্রুবক ;

অর্থাৎ, $\ddot{x}+\ddot{y}+2\ddot{z}=0$ ··· (1)

আবার, P, Q, W এর গতি-সমীকরণ :

$$P-T=\frac{P}{g}\ddot{x}\ ; \quad \cdots \quad (2)$$

$$Q-T=\frac{Q}{g}\ddot{y}\ ; \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

$$W-2T=\frac{W}{g}\ddot{z}. \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

যদি W সর্বদা নিশ্চল থাকে, তবে

$$\ddot{z}=0 \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

তাহা হইলে, $\ddot{x}+\ddot{y}=0$ ······ (6)

তখন, (2) (3) ও (6) হইতে পাই :

$$\frac{g}{P}(P-T)+\frac{g}{Q}(Q-T)=0\,;$$

বা, $$\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}=\frac{2}{T}. \qquad \ldots\ldots \qquad (7)$$

আবার, (4) এবং (5) হইতে পাই :

$$2T=W. \qquad \ldots\ldots \qquad (8)$$

তাহা হইলে (7) ও (8) হইতে,

$$\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}=\frac{4}{W}. \qquad \ldots\ldots \qquad (9)$$

প্রশ্নমালা 7

1. যে তলের উপর 40 পাউণ্ড ভরের একটি ঘনক অবস্থিত তাহা (i) সেকেণ্ডে 5 ফুট সমবেগে, (ii) 3 ফু./সে.^{2} সমত্বরণে দুই দফায় উপরে উঠিলে, প্রতিক্ষেত্রে তলের উপর বস্তুটির চাপ কিরূপ থাকিবে ?

2. 8 ষ্টোন্ ভরের এক ব্যক্তি একটি লিফ্‌টে দাঁড়াইয়া আছে। লিফ্‌ট টি 10ফু./সে.^{2} সমত্বরণে (i) উপরে উঠিলে, (ii) নীচে নামিলে, লিফ্‌টে ঐ ব্যক্তির চাপ প্রতিক্ষেত্রে কিরূপ হইবে ?

3. মাল ও আরোহী সমেত একটি বেলুনের মোট ওজন 658 পাউণ্ড ভরের ওজনের সমান। বেলুনটি পৃথিবীর উপরি-তল হইতে সমান উচ্চতায় থাকিয়া আকাশে ভাসিতেছে ; এমন সময় প্যারাশুট্‌সহ 154 পাউণ্ড ভরের এক ব্যক্তি বেলুন হইতে লাফাইয়া পড়িল। আবহাওয়া সংক্রান্ত অন্যান্য সকল অবস্থা অপরিবর্তিত থাকিলে, পরবর্তী 6 সেকেণ্ডে বেলুনটি পূর্বাবস্থান হইতে কত ফুট উচ্চে উঠিবে ?

4. একটি পাতলা কাচের প্লেট সর্বাধিক 10 পাউণ্ড ভরের ওজন বহন করিতে সক্ষম। একটি বস্তু প্লেটটির উপর রাখা হইলে এবং ক্রমবর্ধমান ত্বরণে বস্তুসহ প্লেট্‌টি উপরে উঠিতে থাকিলে, যদি উহার ত্বরণ যখন 8 ফু./সে.^{2} ঠিক তখন প্লেট্‌টি ভাজিয়া যায়, তবে বস্তুটির ভর কত ?

5. একটি বেলুন 8 ফুট/সেকেণ্ড^2 সমত্বরণে উপরে উঠিতেছে। যদি ঐ উড়ন্ত বেলুনে স্থিত একটি বস্তুর ওজন স্প্রিং-তুলাযন্ত্রে 50 পাউণ্ড ভার হয় তবে বস্তুটির প্রকৃত ওজন কত ? [$g=32$ ফুট/সে.^{2}]

6. স্থিরাবস্থা হইতে 1 হন্দরের একটি প্যারাসুট্ সমত্বরণে নীচে নামিতে থাকিয়া প্রথম 4 সেকেণ্ডে 16 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। বায়ুর ঊর্ধ্বচাপ প্যারাসুটের উপর কি পরিমাণ ছিল ?

7. একটি লিফ্টের ছাদ হইতে 2 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু হালকা অবিস্তার্য দড়ির সাহায্যে ঝুলিতেছে। লিফ্টটি উপরের দিকে (i) 8 ফু./সে.^{2} সমত্বরণে, (ii) সমবেগে, (iii) 8 ফু./সে.^{2} সমমন্দনে উঠিতে থাকিলে, প্রতিক্ষেত্রে দড়ির টান কিরূপ হইবে ?

8. একটি লিফ্ট্ 3 ফু./সে. সমবেগে উপরে উঠিতেছে। ইহার ছাদ হইতে একটি প্রস্তরখণ্ড ফেলিয়া দিলে, তাহা $\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডের লিফ্টের মেঝেতে পড়ে। যখন লিফ্টটি (i) 5 ফু./সে. সমবেগে নামে, (ii) 4 ফু./সে.^{2} সমত্বরণে উপরে উঠে, (iii) 8 ফু./সে.^{2} সমত্বরণে নীচে নামে, তখন উপরোক্ত তিনটি ক্ষেত্রে প্রস্তরখণ্ডটির মেঝেতে পড়িতে সময় কত লাগিবে ? [C. U. P. 1976]

8. (a) একটি লিফ্ট্ 3 ফু./সে. সমবেগে উপরে উঠিতেছে। ইহার ছাদ হইতে একটি প্রস্তর খণ্ড ফেলিয়া দিলে, তাহা $\frac{3}{4}$ সেকেণ্ডে লিফ্টের মেঝেতে পড়ে। যখন লিফ্টটি (i) 5 ফু./সে. সমবেগে নামে, (ii) $8\frac{1}{2}$ ফু./সে.^{2} সমত্বরণে উপরে উঠে, (iii) $7\frac{1}{2}$ ফু./সে.^{2} সমত্বরণে নীচে নামে, তখন প্রস্তর খণ্ডটির মেঝেতে পড়িতে কত সময় লাগিবে ?

9. একটি হাল্কা অবিস্তার্য দড়ির সাহায্যে 1 টন ভরের একটি বস্তুকে 400 গজ গভীর একটি খনির তলদেশ হইতে উপরে তুলিতে হইবে। দড়ির সহনশক্তি সর্বাধিক 4 টন ভার হইলে এবং বস্তুটিকে স্থিরাবস্থা হইতে স্থিরাবস্থায় আনিতে হইলে, সর্বাপেক্ষা কত কম সময়ে তাহা সম্ভব হইবে ?

10. একটি হাল্কা অবিস্তার্য দড়ির সাহায্যে M ভরের একটি বস্তুকে স্থিরাবস্থা হইতে h উচ্চতায় স্থিরাবস্থায় তুলিতে হইবে। দড়ির সহন শক্তি nM ভরের ওজন অপেক্ষা কখনও বেশী না হইলে, দেখাও যে, সর্বাপেক্ষা যে কম সময়ে বস্তুটিকে উপরে তোলা সম্ভব হইবে, তাহা $\sqrt{\left\{\frac{2nh}{(n-1)g}\right\}}$.

11. ভূতলে স্থিরাবস্থা হইতে 140 পাউণ্ড ভরের সমান ওজনের এক ব্যক্তি লিফ্টে চড়িয়া যখন সমত্বরণে উপরে উঠিতেছে, তখন লিফ্টের উপর ঐ ব্যক্তির নিম্নচাপ 145·6 পাউণ্ড ভরের ওজনের সমান হইলে, এবং যে কোন দুইটি তলার ব্যবধান 10 ফুট হইলে, কতক্ষণ পরে ঐ ব্যক্তি একটি আকাশ-ছোঁয়া বাড়ীর 40-তম তলা পার হইবে ? [W. B. H. S. 1964]

12. 8 গ্রাম ও 7 গ্রাম এর দুইটি ভরকে একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া গলানো একটি প্রসারহীন হাল্কা দড়ির দুই মাথায় বাঁধিয়া ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে। 10 সেকেণ্ডে উহাদের যে কোনটির দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর, যেখানে $g = 981$ সে. মি./সে.^{2}। **[W. B. H. S. 1969]**

13. একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া গলানো একটি প্রসারহীন হাল্কা দড়ির দুই প্রান্তে দুইটি বস্তু ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। যদি উহাদের ভরের অন্তরফল 4 পাউণ্ড হয় এবং সাধারণ ত্বরণ 8 ফু./সে.^{2} হয়, তবে বস্তুদ্বয়ের ভর এবং দড়ির টান নির্ণয় কর। **[W. B. H. S. 1968]**

14. একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর গলানো যথেষ্ট দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি হাল্কা প্রসারবিহীন দড়ির দুই প্রান্তে দুইটি সমান হাল্কা পাল্লা বাঁধিয়া উল্লম্বভাবে ঝুলাইয়া দেওয়া আছে। 12 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুকে কিরূপ দুই অংশে ভাগ করিয়া পাল্লা দুইটির উপর যথাক্রমে রাখিলে, বৃহত্তর অংশটি পাল্লাসহ 5 সেকেণ্ডে 50 ফুট নীচে নামিবে ?

15. একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপরে রাখা একটি হাল্কা অবিস্তার্য দড়ির এক প্রান্তে বাঁধা 3 পাউণ্ড ভর নীচে নামিবার সময় দড়ির অপর প্রান্তে বাঁধা 2 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুকে টানিয়া উপরে তুলিতেছে। গতি আরম্ভের 5 সেকেণ্ডের মাথায় দড়িটি ছিঁড়িয়া গেলে 2 পাউণ্ড ভরটি আর কতদূর উপরে উঠিবে ?

[W. B. H. S. 1970]

16. একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপরে রাখা একটি হাল্কা অবিস্তার্য দড়ির এক প্রান্তে 4 আউন্স ভরের একটি বস্তু এবং অপর প্রান্তে ইহা অপেক্ষা বৃহত্তর ভরের একটি বস্তু বাঁধিয়া ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। গতি আরম্ভের 3 সেকেণ্ডের মাথায় দড়িটি কাটিয়া যাওয়ায় প্রথমোক্ত বস্তুটি আরও $1\frac{7}{8}$ ফুট উপরে উঠিবার পর নীচে নামিতে থাকিল। দ্বিতীয় বস্তুটির ভর কত ? **[W. B. H. S. 1967]**

17. একটি প্রসারবিহীন হাল্কা দড়ির এক প্রান্তে 9 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু এবং অপর প্রান্তে 7 পা. ও 4 পা. ভরের দুইটি বস্তুকে বাঁধিয়া একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া উহাদের দুইপার্শ্বে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। উহাদের গতি আরম্ভের 15 সেকেণ্ডের মাথায় 4 পাউণ্ড ভরের বস্তুটিকে কাটিয়া বাদ দেওয়া হইল। ইহার পর মুহূর্তকাল থামিয়া গিয়া নীচে নামিতে শুরু করিবার আগে পর্যন্ত 9 পাউণ্ড ভরের বস্তুটি আর কতক্ষণ উপরে উঠিবে? **[W. B. H S. 1965]**

18. একটি মসৃণ অনুভূমিক টেবিলের এক প্রান্তে স্থিত একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া স্থাপিত একটি হাল্‌কা অবিস্তার্য দড়ির এক প্রান্তে 10 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু বাঁধিয়া টেবিলের উপর রাখা হইল এবং দড়ির অপর প্রান্তে 5 পাউণ্ড ভরের অন্য একটি বস্তু বাঁধিয়া উল্লম্বভাবে অবাধে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। ভর দুইটির সাধারণ ত্বরণ, দড়ির টান ও কপিকলের উপর মোট চাপ নির্ণয় কর।

19. একটি মসৃণ অনুভূমিক টেবিলের দুই প্রান্তে দুইটি স্থির মসৃণ কপিকল অবস্থিত। একটি হালকা প্রসারবিহীন দড়ির মধ্যস্থলে M ভরের একটি বস্তুকে বাঁধিয়া টেবিলের উপর রাখা হইল এবং ঐ দড়ির দুই প্রান্তে m_1 এবং m_2 ভরের দুইটি বস্তু বাঁধিয়া এবং কপিকলদ্বয়ের উপর দিয়া দড়ি লইয়া তাহাদিগকে উল্লম্বভাবে অবাধে দুই পার্শ্বে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। যে কোন বস্তুর ত্বরণ এবং দড়ির টান নির্ণয় কর।

20. 4 ফুট উচ্চ ও 20 ফুট দীর্ঘ একটি মসৃণ নততলের পাদদেশে একটি 5 পাউণ্ড ভরের বস্তু রাখা আছে। এই বস্তুটির সহিত একটি হাল্‌কা প্রসারবিহীন দড়ির এক প্রান্ত সংযুক্ত করিয়া এবং দড়িটিকে নততলের শীর্ষস্থিত একটি মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া লইয়া অপর প্রান্তে 3 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুকে বাঁধিয়া অবাধে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। যদি প্রথম অবস্থায় 3 পাউণ্ড ভরের বস্তুটি অনুভূমিক তল হইতে 3·24 ফুট উচ্চতায় থাকে, তবে কতক্ষণ পরে এই বস্তুটি অনুভূমিক তলে আসিবে?

21. একটি মসৃণ নততলের দৈর্ঘ্য উচ্চতার দ্বিগুণ। একটি হাল্‌কা অবিস্তার্য দড়ির দুই প্রান্তে যথাক্রমে 22 পাউণ্ড ও 14 পাউণ্ড ভরের দুইটি বস্তু বাঁধা হইল, এবং ঐ নততলের শীর্ষস্থিত একটি ক্ষুদ্র মসৃণ স্থির কপিকলের উপর দিয়া দড়িটি গলাইয়া বৃহত্তর বস্তুটিকে নততলে রাখা হইল, আর ক্ষুদ্রতর বস্তুটিকে অবাধে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। যে কোন বস্তুর ত্বরণ নির্ণয় কর, এবং 2 সেকেণ্ডে বৃহত্তর বস্তুটি কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে, তাহা বাহির কর।

22. অনুভূমিক তলের সহিত 30° এবং 60° কোণে নত একই উচ্চতাবিশিষ্ট দুইটি নততল পাশাপাশি অবস্থিত। উহাদের সাধারণ মাথায় স্থিত একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া গলানো একটি হাল্‌কা অবিস্তার্য দড়ির দুই প্রান্তে 6 পাউণ্ড ও 10 পাউণ্ড ভরের দুইটি বস্তু বাঁধিয়া দড়ির অশিথিল অবস্থায় নততল দুইটির উপর যথাক্রমে রাখা হইল। এখন, দড়ির টান ও যে কোন বস্তুর ত্বরণ নির্ণয় কর। প্রথম 2 সেকেণ্ডে যে কোন বস্তু কত পথ অতিক্রম করিবে?

23. একটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া গলানো একটি হাল্কা ও অবিস্তার্য দড়ির একপ্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বাঁধিয়া অবাধে ঝুলাইয়া রাখা হইল এবং অপর প্রান্তে দড়ি ধরিয়া একটি বালক সমত্বরণে উপরে উঠিতে লাগিল। যদি বালকটি 2 সেকেণ্ডে 16 ফুট পথ অতিক্রম করে, এবং সর্বদাই W স্থির থাকে, তবে দেখাও যে, বালকের ওজন $\frac{4}{5}$ W.

24. একটি মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া রাখা হাল্কা ও সম্প্রসারণবিহীন একটি দড়ির দুই প্রান্তে W এবং W′ ওজনের দুইটি বস্তুকে বাঁধিয়া অবাধে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। যদি এখন কপিকলটি অভিকর্ষজ ত্বরণের সমান ত্বরণে উর্ধ্বদিকে উঠিতে থাকে, তবে দেখাও যে, দড়ির টান $=\dfrac{4WW'}{W+W'}$ [C. U. P. 1965]

25. একটি হাল্কা ও অবিস্তার্য দড়ির দুই প্রান্তে P ও Q ওজনের দুইটি বস্তু বাঁধিয়া দুইটি স্থির মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া যথাক্রমে দুইপার্শ্বে তাহাদের অবাধে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল, এবং কপিকলদ্বয়ের মধ্যবর্তী দড়ির ফাঁসে W ওজনের একটি মসৃণ কপিকল ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। (দড়ির ঝুলানো অংশগুলি উল্লম্ব ভাবে আছে)। দেখাও যে, যদি $\dfrac{4}{W}>\dfrac{1}{P}+\dfrac{1}{Q}$ হয়, তবে W ওজনের কপিকলটি উর্ধ্বদিকে সমত্বরণে উঠিতে থাকিবে। ঐ ত্বরণ কত?

ANSWERS (প্রশ্নমালা 7)

1. (i) 40 পাউণ্ড-ভার; (ii) 43·75 পাউণ্ড-ভার। 2. (i) 147 পাউণ্ড-ভার; (ii) 77 পাউণ্ড-ভার। 3. 176 ফুট। 4. 8 পাউণ্ড। 5. 40 পাউণ্ড-ভার। 6. 105 পাউণ্ড-ভার। 7. (i) 2·5 পাউণ্ড-ভার; (ii) 2 পাউণ্ড-ভার; (iii) 1·5 পাউণ্ড-ভার। 8. (i) $\frac{1}{2}$ সে.; (ii) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ সে.; (iii) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ সে.; (a) (i) $\frac{3}{4}$ সে. (ii) $\frac{2}{3}$ সে.; (iii) $\frac{6}{7}$ সে. 9. 10 সে.। 11. 25 সে.। 12. 32·7 মিটার। 13. $m_1=10$ পাউণ্ড; $m_2=6$ পাউণ্ড; T=7·5 পাউণ্ড-ভার। 14. 6·75 পাউণ্ড; 5·25 পাউণ্ড। 15. 16 ফুট। 16. 5 আউন্স্। 17. 12 সেকেণ্ড। 18. $10\frac{2}{3}$ ফু./সে.^{2}; $3\frac{1}{3}$ পাউণ্ড-ভার $(10\sqrt{2})/3$ পাউণ্ড-ভার। 19. $f=(m_1-m_2)g/(M+m_1+m_2)$; $T_1=(M+2m_2)m_1g/(M+m_1+m_2)$; $T_2=(M+2m_1)m_2g/(M+m_1+m_2)$। 20. 0·9 সেকেণ্ড। 21. (8/3) ফু./সে.^{2}; (16/3) ফুট। 22. (i) $15(\sqrt{3}+1)/8$ পাউণ্ড-ভার; $(10\sqrt{3}-6)$ ফু./সে.^{2}; $(20\sqrt{3}-12)$ ফুট। 25. $\{4PQ-W(P+Q)\}g/\{4PQ+W(P+Q)\}$.

সপ্তম অধ্যায়

অভিকর্ষের অধীন উল্লম্ব গতি

(Vertical motion under gravity)

7-1. উপস্থাপন :

পূর্ব্ব অধ্যায়ে অভিকর্ষ (**gravity**) এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ (**acceleration due to gravity**) সম্বন্ধে বিশদভাবে আলোচনা করা হইয়াছে। এখানে তাহারই কিছু পুনরাবৃত্তি করা হইল।

পৃথিবীকে R ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলক ধরিলে এবং উহার ভর M হইলে, ভূ-পৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় m ভরবিশিষ্ট বস্তুর ত্বরণ g হইবে, যেখানে

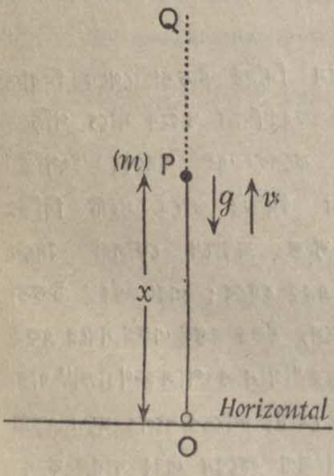
$g = GM/(R+h)^2$, (G = একটি ধ্রুবক)।

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, ভূ-পৃষ্ঠ হইতে কোন নির্দিষ্ট উচ্চতা থেকে নিবাত শূন্যে যে কোন বস্তুকে অবাধে ফেলিয়া দিলে, উহা ক্রমবর্ধমান ত্বরণে নীচে পড়িতে থাকিবে। বস্তুটির উপর পৃথিবীর আকর্ষণের ফলেই এই ত্বরণের উৎপত্তি। তাহা ছাড়া, দেখা যাইতেছে, ভূ-পৃষ্ঠের কোন নির্দিষ্ট স্থানে দুইটি বিভিন্ন ভরের বস্তুকে বিভিন্ন উচ্চতা হইতে নিবাত শূন্যে অবাধে ফেলিয়া দিলে ভূ-পৃষ্ঠ হইতে একই উচ্চতায় উভয়েরই ত্বরণ একই হইবে ; এবং একই উচ্চতা হইতে নিবাত শূন্যে উহাদের অবাধে ফেলিয়া দিলে, উভয় বস্তুই একই সময়ে একই উচ্চতায় থাকিবে। দ্বিতীয় সত্যটি নিউটন তাঁহার "গিনি ও পালক-পরীক্ষা" দ্বারা প্রতিষ্ঠিত করিয়াছিলেন। নিউটন একটি লম্বা মোটা কাচের নলের মধ্যে একটি গিনি ও একটি পালক রাখিয়া উহার দুই মুখ বন্ধ করেন এবং বায়ু-নিষ্কাশন যন্ত্রের সাহায্যে উহার মধ্য হইতে সম্পূর্ণরূপে বায়ু-নিষ্কাশন করেন। তাহার পর, নলটিকে উলটাইয়া ধরিয়া তিনি লক্ষ্য করেন যে, গিনি ও পালক একই সঙ্গে অপর প্রান্তে পৌঁছিল। গ্যালিলিও বহুপূর্ব্বে এই একই সিদ্ধান্তে উপনীত হইয়াছিলেন। তিনি পিসার হেলানো মিনার হইতে একই আকারের বিভিন্ন ভরের বিভিন্ন গুরুত্বের বস্তুসমূহকে একই সঙ্গে ফেলিয়া লক্ষ্য করেন যে, উহারা প্রায় একই সঙ্গে মিনারের পাদদেশে পৌঁছে।

আবার, কোন বস্তুকে ঊর্ধ্বদিকে উল্লম্বভাবে উৎক্ষেপ করিলে, উহার বেগ ক্রমশঃ হ্রাস পাইতে থাকিবে ; ইহার কারণ, বস্তুটির গতির বিপরীত অভিমুখে উহার উপর অভিকর্ষজ ত্বরণ ক্রিয়াশীল। সুতরাং, অবাধে কোন বস্তু ঊর্ধ্বদিকে অথবা নিম্নদিকে গতিশীল হইলে, পৃথিবীর আকর্ষণের প্রভাবে অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তুটির উপর সর্বদা নিম্নদিকে ক্রিয়াশীল থাকিবে, এবং তাহা বিভিন্ন উচ্চতায় বিভিন্ন হইবে। কিন্তু, বর্তমান ও পরবর্তী অধ্যায়ে অন্য কোন কিছু উল্লেখ না থাকিলে, অভিকর্ষজত্বরণ অর্থাৎ g এর মান সকল উচ্চতায় একই ধরা হইবে এবং তাহা এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে 32 ফুট/সেকেণ্ড^2 এবং সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে 980 সেন্টিমিটার/সেকেণ্ড^2 নিতে হইবে।

7-2. ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর গতি নির্ণয়।

মনে করি, ভূ-পৃষ্ঠের উপরিস্থ কোন এক স্থান O হইতে নিবাত শূন্যে (in absolute vacuo) m ভরের একটি বস্তুকে u বেগে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে উৎক্ষেপ করা হইল। মনে করি, উৎক্ষেপ করার t সময় পরে, বস্তুটি ভূ-পৃষ্ঠ হইতে x উচ্চতায় অবস্থিত। যেহেতু, অভিকর্ষজ ত্বরণ g বস্তুটির উপর উল্লম্বভাবে নিম্নাভিমুখে সর্বদাই ক্রিয়াশীল, অতএব, বস্তুটির গতি-সমীকরণ :



$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg\ ;$$

$$\text{বা,}\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-g. \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, t এর সাপেক্ষে (1) কে সমাকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dx}{dt}=A-gt. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$t=0$ এতে, $\dfrac{dx}{dt}=u$ বলিয়া, (2) হইতে $A=u$.

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=u-gt. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

পুনরায়, t এর সাপেক্ষে (3) কে সমাকলন করিয়া পাই,

$$x = B + ut - \tfrac{1}{2}gt^2. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

$t=0$ এতে $x=0$ বলিয়া, (4) হইতে পাই, $B=0$.

$$\therefore \quad x = \mathbf{ut} - \tfrac{1}{2}\mathbf{gt}^2. \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

(1) এর উভয়পক্ষকে $2\dfrac{dx}{dt}$ গুণ করিয়া পাই,

$$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -2g\frac{dx}{dt}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

এখন, (6) কে t এর সাপেক্ষে সমাকলন করিয়া পাই,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C - 2gx \quad \cdots \quad \cdots \quad (7)$$

যেহেতু, $\dfrac{dx}{dt} = u$ যখন $x=0$, $\therefore\ C = u^2$.

$$\therefore \quad \left(\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\right)^2 = \mathbf{u}^2 - \mathbf{2gx}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (8)$$

(8) হইতে দেখা যায়, x এর মান যতই বাড়িতে থাকিবে, অর্থাৎ, বস্তুটি উপরে উঠিতে থাকিবে, ততই উহার বেগ ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে এবং $\dfrac{dx}{dt}=0$ যখন $x = u^2/(2g)$; ইহার পর বস্তুটি আর উপরে উঠিতে পারে না।

ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষিপ্ত কোন বস্তুর বেগ যে অবস্থানে শূন্য হইবে, উৎক্ষেপ বিন্দু হইতে সেই স্থানের উচ্চতাকে বস্তুটির গতিপথের **সর্ব্বাধিক উচ্চতা** (*greatest height*) বলা হয়।

বস্তুটির গতিপথের সর্ব্বাধিক উচ্চতা H হইলে, (8) হইতে পাই,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{2g}}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (9)$$

উৎক্ষেপ বিন্দু হইতে ঐ সর্ব্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছিবার সময়কে বস্তুটির **আরোহণ কাল** (*time of rise*) বলা হয়। বস্তুটির আরোহণ কাল T হইলে (যখন $\dfrac{dx}{dt}=0$), (3) হইতে পাই :

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{g}}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (10)$$

সর্ব্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছিবার পর বস্তুটি অভিকর্ষজ ত্বরণ-হেতু নীচের দিকে নামিতে থাকিবে। সর্ব্বাধিক উচ্চতা হইতে উৎক্ষেপ বিন্দুতে পৌঁছিবার সময়কে বস্তুটির **অবতরণ কাল** (*time of fall*) বলা হয়। বস্তুটির অবতরণ কাল T_1 হইলে, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র-সাহায্যে,

$$H=0+\tfrac{1}{2}gT_1^2\ ;$$

$$\text{বা,}\quad T_1^2=\frac{2H}{g}=\frac{u^2}{g^2}\ ;$$

$$\text{অর্থাৎ,}\quad T_1=\frac{u}{g}. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \qquad (11)$$

সুতরাং, বস্তুটির **আরোহণ কাল = অবতরণ কাল = u/g.**

উৎক্ষেপ মুহূর্ত্ত হইতে আরম্ভ করিয়া সর্ব্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছিবার পর পুনরায় ঐ উৎক্ষেপ বিন্দুতে ফিরিয়া আসিতে বস্তুটির যে সময় লাগে, তাহাকে বস্তুটির **উত্থিত কাল** (*total time of flight*) বলা হয়।

$$\therefore\quad \text{উত্থিত কাল}=2T=\frac{2u}{g}. \quad \cdots \quad \cdots \qquad (12)$$

উৎক্ষেপ বিন্দুতে পুনরায় পৌঁছিবার পর, উহার বেগ v_1 হইলে, $v=u+ft$ সূত্র সাহায্যে,

$$v_1=0+gT_1\ ;$$

$$\text{বা,}\quad v_1=g\times\frac{u}{g}=u.$$

সুতরাং, উৎক্ষেপ স্থানে পৌঁছিবার মুহূর্ত্তে বস্তুটির বেগ = উহার প্রারম্ভিক উৎক্ষেপ বেগ।

7-3. ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর কোন নির্দ্দিষ্ট উচ্চতায় পৌঁছিবার সময় এবং ঐ স্থানে উহার বেগ নির্ণয়।

মনে করি, ভূ-পৃষ্ঠের উপরিস্থ কোন এক স্থান O হইতে নিবাত শূন্যে একটি বস্তুকে u বেগে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে উৎক্ষেপ করা হইল। নির্দ্দিষ্ট $h\left(<\frac{u^2}{2g}\right)$ উচ্চতায় আসিতে উহার কত সময় লাগিবে, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। মনে করি, ঐ h উচ্চতায় পৌঁছিতে বস্তুটির t সময় লাগে। তাহা হইলে, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র-সাহায্যে,

$$h=ut-\tfrac{1}{2}gt^2,\ \left(h<\frac{u^2}{2g}\right)\ ;$$

বা, $gt^2-2ut+2h=0.$

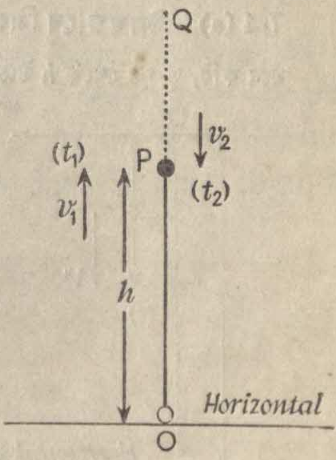
$$\therefore \quad t=\frac{u}{g}\pm\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g}. \quad \cdots \quad (1)$$

যেহেতু, বস্তুটির আরোহণ কাল $T=u/g$, সুতরাং, উপরের দিকে উঠিবার কালে বস্তুটি h উচ্চতায় t_1 সময়ে পৌঁছিলে, $t_1<T$ অর্থাৎ $t_1<u/g$. সুতরাং, (1) হইতে,

$$\mathbf{t_1=\frac{u}{g}-\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g}}. \quad \cdots \quad (2)$$

কিন্তু, বস্তুটি উৎক্ষেপ বিন্দু হইতে উপরে উঠিতে থাকিয়া সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছিবার পর নীচের দিকে পতনের কালে h উচ্চতায় ফিরিয়া আসিতে t_2 সময় লাগিলে, $t_2>T$ অর্থাৎ, $t_2>u/g$ হইবে। সুতরাং, (1) হইতে,

$$\mathbf{t_2=\frac{u}{g}+\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g}}. \quad \cdots \quad (3)$$



চিত্রে, $OP=h$; $OQ=H=\frac{u^2}{2g}$.

O হইতে Pতে যাইতে সময় t_1; P হইতে Qতে যাইতে সময় $T-t_1$; Q হইতে Pতে আসিতে সময় t_2-T এবং P হইতে Oতে আসিতে সময় $2T-t_2$.

মনে করি, উৎক্ষেপ বিন্দু O হইতে উপরে উঠিবার সময় h উচ্চতায়, অর্থাৎ Pতে, বস্তুটির বেগ $v_1\uparrow$. তাহা হইলে,

$$v_1=u-gt_1$$
$$=u-g\times\left\{\frac{u}{g}-\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g}\right\}$$
$$\therefore \quad \mathbf{v_1=\sqrt{u^2-2gh}}. \quad \cdots \quad (4)$$

মনে করি, উৎক্ষেপ বিন্দু O হইতে উপরে উঠিতে থাকিয়া সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছিবার পর নীচের দিকে নামিবার সময় h উচ্চতায়, অর্থাৎ P তে, বস্তুটির বেগ $v_2\downarrow$. তাহা হইলে,

$$-v_2=u-gt_2\,;$$

বা, $v_2 = -u + gt_2$

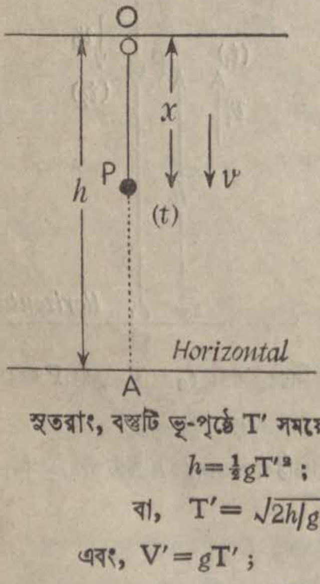
$$= -u + g \times \left\{\frac{u}{g} + \frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{g}\right\},$$

$$\therefore \quad \mathbf{v_2 = \sqrt{u^2 - 2gh}} \quad \cdots \quad (5)$$

সুতরাং, নির্দ্দিষ্ট উচ্চতা h এতে, আরোহণ ও অবতরণ বেগ মানে সমান, কিন্তু পরস্পর বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল থাকিবে।

7-4 (a). উল্লম্বভাবে নিম্নদিকে অবাধে পতনশীল বস্তুর গতি নির্ণয়।

মনে করি, ভূ-পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতা হইতে একটি বস্তু নিবাত শূন্যে অবাধে পতিত হইল। তাহা হইলে, উহার প্রারম্ভিক বেগ শূন্য; তাহা ছাড়া, অভিকর্ষজ ত্বরণ g বস্তুটির উপর সর্বদা নিম্নাভিমুখে ক্রিয়াশীল।



মনে করি, পতনের মুহূর্ত হইতে t সময়ে বস্তুটি x দূরত্ব অতিক্রম করে এবং তখন উহার বেগ v, যাহার দিক্ নিম্নাভিমুখী। তাহা হইলে,

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2\,; \quad \cdots \quad (1)$$

$$v = gt. \quad \cdots \quad (2)$$

সুতরাং, বস্তুটি ভূ-পৃষ্ঠে T′ সময়ে পৌছিলে এবং তখন উহার বেগ V′ হইলে,

$$h = \tfrac{1}{2}gT'^2\,;$$

বা, $T' = \sqrt{2h/g}\,; \quad \cdots \quad (3)$

এবং, $V' = gT'\,;$

বা, $V' = \sqrt{2gh}. \quad \cdots \quad (4)$

(b) উল্লম্বভাবে নিম্নদিকে বস্তুর গতি নির্ণয়।

মনে করি, ভূ-পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতা হইতে একটি বস্তুকে নিবাত শূন্যে নিম্নাভিমুখে u বেগে নিক্ষিপ্ত করা হইল। মনে করি, নিক্ষেপ মুহূর্ত হইতে t সময়ে বস্তুটি x দূরত্ব অতিক্রম করে এবং তখন উহার বেগ v যাহার দিক্ নিম্নাভিমুখী। তাহা হইলে,

$$x = ut + \tfrac{1}{2}gt^2\,; \quad \cdots \quad (i)$$

$$v = u + gt. \quad \cdots \quad (ii)$$

সুতরাং, বস্তুটি ভূ-পৃষ্ঠে T′ সময়ে পৌছিলে এবং তখন উহার বেগ V′ হইলে,

$$V'^2 = u^2 + 2gh\ ;$$

$$\text{বা,}\quad V' = \sqrt{u^2+2gh}\ ; \qquad \cdots \qquad \text{(iii)}$$

$$\text{এবং,}\quad V' = u + gT'\ ;$$

$$\text{বা,}\quad T' = \frac{\sqrt{u^2+2gh}}{g} - \frac{u}{g}. \qquad \cdots \qquad \text{(iv)}$$

7-5. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. 300 গ্রাম ভরের একটি বস্তু উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে নিবাত শূন্যে সেকেণ্ডে 350 সে.মি. বেগে উৎক্ষিপ্ত হইলে,উহা সর্বাধিক কত উচ্চতা পর্যন্ত পৌছিতে পারিবে? সমগ্র উত্থিতকাল কত হইবে? সর্বাধিক উচ্চতার মধ্যপথে উহার বেগ কত হইবে এবং তাহা কখন হইবে? কি বেগে উহা উৎক্ষেপ বিন্দুতে ফিরিয়া আসিবে? [$g = 980$ সে. মি/সে.^{2}]

এখানে, u = উৎক্ষেপ বেগ = 350 সে. মি./সে. ;

$H = \dfrac{u^2}{2g}$ সূত্র-সাহায্যে,

$$H = \frac{350\times 350}{2\times 980} = \frac{125}{2} = 62{\cdot}5$$

∴ সর্বাধিক উচ্চতা = **62·5 সে. মি.**।

$2T = \dfrac{2u}{g}$ সূত্র-সাহায্যে,

$$2T = \frac{2\times 350}{980} = \frac{5}{7}.$$

∴ সমগ্র উত্থিতকাল = $\frac{5}{7}$ **সেকেণ্ড**।

মনে করি, H/2 উচ্চতায়, অর্থাৎ 125/4 সে. মি. উচ্চতায়, বস্তুটির বেগ v সে. মি./সে.। তাহা হইলে,

$v^2 = u^2 + 2fs$ সূত্র-সাহায্যে,

$$v^2 = 350\times 350 - 2\times 980\times 125/4$$
$$= 35^2\times 5^2\times 4 - 35^2\times 5^2\times 2$$
$$= 35^2\times 5^2\times 2\ ;$$

$$\text{বা,}\quad v = \pm 35\times 5\sqrt{2} = \pm 175\sqrt{2}.$$

সুতরাং, সর্বাধিক উচ্চতার মধ্যপথে বস্তুটির বেগ **175 $\sqrt{2}$ সে. মি./সে.** (মানে) হইবে ; এবং তাহা উপরের দিকে উঠিবার সময় এবং নীচের দিকে নামিবার সময় হইবে।

সর্বাধিক উচ্চতার মধ্যপথে বস্তুটি t সেকেণ্ড সময়ে পৌছিলে, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র সাহায্যে,

$$\frac{125}{4}=350\times t-\tfrac{1}{2}\times 980\times t^2;$$

বা, $98\times 4t^2-70\times 4t+25=0$;

বা, $t=\dfrac{280\pm\sqrt{70^2\times 4^2-4\times 98\times 4\times 25}}{2\times 98\times 4}$

$$=\frac{280\pm\sqrt{7^2\times 5^2\times 4^2\times 4-7^2\times 5^2\times 4^2\times 2}}{2\times 98\times 4}$$

$$=\frac{280\pm 140\sqrt{2}}{2\times 98\times 4}=\frac{5}{14}\pm\frac{5\sqrt{2}}{28}=\frac{5}{28}(2\pm\sqrt{2}).$$

সুতরাং, **উঠিবার কালে**, সর্বাধিক উচ্চতার মধ্যপথে যাইতে $\frac{5}{28}(2-\sqrt{2})$ সেকেণ্ড সময় লাগিবে ; এবং, **নামিবার কালে**, ঐ স্থানে আসিতে $\frac{5}{28}(2+\sqrt{2})$ সেকেণ্ড সময় লাগিবে।

পুনরায় উৎক্ষেপ বিন্দুতে ঐ বস্তুটি ফিরিয়া আসিবে ঐ উৎক্ষেপ-বেগে, অর্থাৎ, **350 সে. মি./সে.** বেগে, কিন্তু বিপরীত অভিমুখে,

উদাহরণ 2. 100 পাউণ্ড ভরের একটি গোলা নির্দিষ্ট বেগে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে উৎক্ষেপ করার পর দেখা গেল, উহা সর্বাধিক 10^4 ফুট উচ্চতায় পৌছিল। গোলাটির সমগ্র উত্থিতকাল কত ছিল? উৎক্ষেপ করার 20 সেকেণ্ড এবং 30 সেকেণ্ড পরে গোলাটি কোথায় ছিল এবং তখন উহার বেগ কিরূপ ছিল? সর্ব্বাধিক উচ্চতা হইতে 100 ফুট নীচে উহার বেগ কত ছিল? ($g=32$ ফু./সে.)

উৎক্ষেপ বেগ $=u$ ফুট/সেকেণ্ড হইলে,

$H=\dfrac{u^2}{2g}$ সূত্র-সাহায্যে,

$10^4=\dfrac{u^2}{2\times 32}$; বা, $u=800$.

$\therefore$ সমগ্র উত্থিতকাল $=\dfrac{2u}{g}$ সেকেণ্ড

$=\dfrac{2\times 800}{32}$ সেকেণ্ড $=$ **50 সেকেণ্ড।**

উৎক্ষেপ করার পর 20 সেকেণ্ডেতে গোলাটি h_1 ফুট উচ্চতায় থাকিলে এবং তখন উহার বেগ v_1 ফুট/সে. হইলে,

$$v_1 = 800 - 32 \times 20 = 160\ ;$$

$$v_1^2 = 800^2 - 2 \times 32 \times h_1\ ;$$

বা, $160^2 = 800^2 - 64 \times h_1$; বা, $h_1 = 9600$.

তাহা হইলে, নিক্ষেপ করার **20 সেকেণ্ড পরে** গোলাটি **9600 ফুট** উচ্চতায় ছিল এবং তখন উহার বেগ **160 ফুট/সে.** (মানে) ছিল এবং তাহার দিক্ **উর্ধ্বমুখী** ছিল।

নিক্ষেপ করার পর 30 সেকেণ্ডেতে গোলাটি h_2 ফুট উচ্চতায় থাকিলে, এবং তখন উহার বেগ v_2 ফু/সে. হইলে,

$$v_2 = 800 - 32 \times 30 = -160\ ;$$

$$v_2^2 = 800^2 - 2 \times 32 \times h_2\ ;$$

বা, $160^2 = 800^2 - 2 \times 32 \times h_2$; বা, $h_2 = 9600$.

তাহা হইলে, নিক্ষেপ করার **30 সেকেণ্ড পরে** গোলাটি **9600 ফুট** উচ্চতায় ছিল এবং তখন উহার বেগ **160 ফুট/সে.** (মানে) ছিল এবং তাহার দিক্ **নিম্নাভিমুখী** ছিল।

সর্বাধিক উচ্চতা হইতে 100 ফুট নীচে গোলাটির বেগ v_3 ফুট/সে. হইলে

$$v_3^2 = 2 \times 32 \times 100\ ;\ \text{বা,}\ v_3 = 80.$$

সুতরাং, তখন গোলাটির বেগ ছিল **সেকেণ্ড 80 ফুট** (মানে) এবং তাহা উঠিবার কালে উর্ধ্বদিকে, এবং নামিবার কালে নিম্নদিকে, ছিল।

উদাহরণ 3. একটি গম্বুজের শীর্ষদেশ হইতে একটি প্রস্তরখণ্ড অবাধে নিবাত শূন্যে পতিত হইল। গম্বুজের পাদদেশে পৌঁছিবার শেষ সেকেণ্ডে উহার উচ্চতার 5/9 অংশ অতিক্রম করিলে, গম্বুজটির উচ্চতা কত? কি বেগে এবং কত সময়ে উহা পাদদেশে আসিল? ($g = 32$ ফু. / সে^{2}.)

মনে করি, গম্বুজের উচ্চতা h ফুট এবং পাদদেশে পৌঁছিতে উহার t সেকেণ্ড সময় লাগে। প্রস্তরখণ্ডের প্রারম্ভিক বেগ শূন্য। সুতরাং,

$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

এবং t-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{1}{2}g(2t-1)$.

তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$\frac{1}{2}g(2t-1)=\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}gt^2$$

বা, $5t^2-18t+9=0$

বা, $(t-3)(5t-3)=0$

$\therefore\ t=3\ ;\ \frac{3}{5}.$

স্পষ্টতঃই, t এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

$\therefore\ t=3\ ;$

এবং $h=\frac{1}{2}\times32\times9=144.$

সুতরাং, গম্বুজের নির্ণেয় উচ্চতা $=144$ ফুট।

প্রস্তরখণ্ডটি পাদদেশে 3 সেকেণ্ডে আসিয়াছিল।

মনে করি, প্রস্তরখণ্ডটি v_1 ফু./সে. বেগে পাদদেশে আসিয়াছিল। তাহা হইলে,

$$v_1=32\times3=96.$$

সুতরাং, প্রস্তরখণ্ডটি পাদদেশে 96 ফু./সে. বেগে আসিয়াছিল।

উদাহরণ 4. 290 ফুট উচ্চ একটি স্তম্ভের শীর্ষ হইতে নিবাত শূন্যে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে সেকেণ্ডে 22 ফুট বেগে 5 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু উৎক্ষিপ্ত হইল। কত সময় পরে বস্তুটি স্তম্ভের পাদদেশে পৌছিবে এবং তখন উহার বেগ কত হইবে? ভূ-পৃষ্ঠ হইতে সর্বাধিক কত উচ্চতায় বস্তুটি উঠিবে?

মনে করি, t সেকেণ্ড সময়েতে বস্তুটি স্তম্ভের পাদদেশে আসিবে। তাহা হইলে, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র অনুযায়ী,

$290=(-22)t+\frac{1}{2}\times32\times t^2\ ;$

বা, $8t^2-11t-145=0\ ;$

বা, $(t-5)(8t+29)=0\ ;$

বা, $t=5$, কারণ t এর মান, অর্থাৎ সময়ের মান, কখনও ঋণাত্মক হইবে না।

সুতরাং, বস্তুটি স্তম্ভের পাদদেশে 5 সেকেণ্ড পরে পৌছিবে। মনে করি, তখন উহার বেগ v_1 ফুট/সেকেণ্ড। তাহা হইলে, $v=u+ft$ সূত্র সাহায্যে,

$$v_1=(-22)+32\times5=138\ ;$$

অর্থাৎ, পাদদেশে বস্তুটির বেগ 138 ফুট/সে.

স্তম্ভের শীর্ষ হইতে সর্বাধিক উচ্চতা H ফুট পর্যন্ত বস্তুটি উঠিলে,

$$H=\frac{22\times 22}{2\times 32}=\frac{121}{16}=7\frac{9}{16}.$$

সুতরাং, ভূ-পৃষ্ঠ হইতে সর্বাধিক উচ্চতা

$$=(H+290) \text{ ফুট}$$

$$=\mathbf{297\tfrac{9}{16}} \text{ ফুট।}$$

উদাহরণ 5. ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বগামী একটি বেলুন হইতে একটি ক্ষুদ্র বস্তু পড়িয়া গেল এবং 15 সেকেণ্ড পরে উহা মাটিতে পৌছিল। কত উচ্চতায় স্থিত বেলুনটি হইতে বস্তুটি পড়িয়াছিল? বস্তুটি যখন মাটিতে পড়িল, তখন বেলুনটি ভূ-পৃষ্ঠ হইতে কত উচ্চতায় ছিল?

ঘণ্টায় 20 মাইল = সেকেণ্ডে 88/3 ফুট।

মনে করি, বেলুনটি যখন h ফুট উচ্চতায় ছিল, ঠিক তখনই বস্তুটি পড়িয়াছিল। তাহা হইলে, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$, সূত্র-সাহায্যে,

$$h=(-88/3)\times 15+\tfrac{1}{2}\times 32\times(15\times 15)$$

$$=-88\times 5+16\times 225=3160$$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা = **3160 ফুট।**

এই 15 সেকেণ্ডে, বেলুনটি $\frac{88}{3}\times 15$ ফুট অর্থাৎ 440 ফুট উপরে উঠিয়াছিল।

সুতরাং, ভূ-পৃষ্ঠ হইতে বেলুনটির নির্ণেয় উচ্চতা

$$=(3160+440) \text{ ফুট}=3600 \text{ ফুট}$$

$$=\mathbf{\tfrac{15}{22}} \textbf{ মাইল।}$$

উদাহরণ 6. একটি কূপের মুখ হইতে উহার মধ্যে একখণ্ড পাথর ফেলিয়া দেওয়া হইল এবং উহার $3\frac{9}{70}$ সেকেণ্ড পরে জলে পড়িবার শব্দ শোনা গেল। শব্দের গতিবেগ সেকেণ্ডে 1120 ফুট হইলে, কূপের গভীরতা কত?

মনে করি, কূপের গভীরতা = h ফুট এবং পাথরটি t সেকেণ্ড সময়ে জলের উপর পৌছায়। তাহা হইলে, শব্দ $(3\frac{9}{70}-t)$ সেকেণ্ডে h ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে।

সুতরাং, পাথরটির ক্ষেত্রে, $h=\frac{1}{2}gt^2$;

এবং শব্দের ক্ষেত্রে, $h=1120\times(3\frac{9}{70}-t)$.

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}gt^2=1120\times(3\tfrac{9}{70}-t);$$

$$\text{বা, }\ 16t^2=16(219-70t);$$

বা, $t^2+70t-219=0$;

বা, $(t-3)(t+73)=0$

$\therefore\ t=3$; $t\neq-73$,

কারণ, সময় কখনই ঋণাত্মক হইতে পারে না।

$\therefore\ h=\frac{1}{2}\times32\times9=144.$

সুতরাং, কূপের নির্ণেয় গভীরতা = **144 ফুট**।

উদাহরণ 7. একটি গম্বুজের শীর্ষদেশ হইতে এক ব্যক্তি সেকেণ্ডে 96 ফুট বেগে একটি বস্তু উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে উৎক্ষেপ করিল এবং ইহার ঠিক 5 সেকেণ্ড পরে ঐ স্থান হইতে অপর একটি বস্তু নীচে ফেলিয়া দিল। যদি উভয় বস্তু একই সময়ে গম্বুজের পাদদেশে পৌছায়, তবে উহার উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে করি, গম্বুজের উচ্চতা = h ফুট এবং প্রথম বস্তুটি t সেকেণ্ডেতে উহার পাদদেশে আসিয়াছিল।

তাহা হইলে, প্রথম বস্তুর ক্ষেত্রে,

$h=(-96)\times t+\frac{1}{2}\times32\times t^2$
$=16t^2-96t$;

এবং দ্বিতীয় বস্তুরক্ষেত্রে,

$h=\frac{1}{2}\times32\times(t-5)^2=16(t-5)^2.$

$\therefore\ 16t^2-96t=16(t-5)^2$;

বা, $t^2-6t=t^2-10t+25$;

বা, $t=25/4.$

$\therefore\ h=16\times(25/4-5)^2=16\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}=25$

$\therefore$ গম্বুজের নির্ণেয় উচ্চতা = **25 ফুট**।

উদাহরণ 8. একটি লিফ্‌ট্‌ সেকেণ্ডে 5 ফুট বেগে উপরে উঠিতেছিল। ইহার ছাদ হইতে একটি স্ক্রু হঠাৎ খুলিয়া গেল এবং ইহার $\frac{3}{4}$ সেকেণ্ড পরে লিফ্‌টের মেঝেতে পড়িল। লিফ্‌ট্‌টি যদি (i) সেকেণ্ডে 5 ফুট সমবেগে নীচে নামিতে থাকিত, (ii) 5 ফুট/সে.^{2} সমত্বরণে উপরে উঠিত, তাহা হইলে, ইহাদের ক্ষেত্রে স্ক্রুটির লিফ্‌টের মেঝেতে পড়িতে কত সময় লাগিত?

মনে করি, লিফ্‌ট্‌টির উচ্চতা h ফুট। 3/4 সেকেণ্ডে লিফ্‌ট্‌টি $5\times\frac{3}{4}$ ফুট অর্থাৎ 15/4 ফুট উপরে উঠে। সুতরাং, স্ক্রুটি পতনের স্থান হইতে $(h-15/4)$ ফুট দূরত্ব নীচের দিকে 3/4 সেকেণ্ডে অতিক্রম করে।

$\therefore\ h-\frac{15}{4}=(-5)\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times 32\times(\frac{3}{4})^2$;

বা, $h=9$.

সুতরাং, লিফ্‌টের উচ্চতা=9 ফুট। লিফ্‌ট্‌টি যদি 5 ফু./সে. সমবেগে নীচে নামিত, তাহা হইলে, t সেকেণ্ড পরে স্ক্রুটি মেঝেতে পড়িলে,

$h+5\times t=5\times t+\frac{1}{2}\times 32\times t^2$;

বা, $t^2=9/16$. $\therefore\ t=3/4$.

অর্থাৎ, 3/4 সেকেণ্ড পরে স্ক্রুটি মেঝেতে পড়িত।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, লিফ্‌ট্‌টি 5 ফুট/সে². সমত্বরণে উপরে উঠিবার সময় স্ক্রুটি যে মুহূর্তে পড়িয়া গেল সেই মুহূর্তে লিফ্‌টের বেগ u ফু./সে. থাকিলে, এবং ইহার t সেকেণ্ড পরে স্ক্রুটি মেঝেতে পড়িলে, ঐ সময়ে লিফ্‌ট্‌টি $(ut+\frac{1}{2}\times 5\times t^2)$ ফুট উপরে উঠিবে।

সুতরাং, ঐ সময়ের জন্য স্ক্রুটির ক্ষেত্রে,

$$h-(ut+\tfrac{1}{2}\times 5\times t^2)=(-u)\times t+\tfrac{1}{2}\times 32\times t^2\ ;$$

$$\text{বা, } 9-ut-\frac{5t^2}{2}=-ut+16t^2\ ;$$

$$\text{বা, } t^2=\frac{18}{37}\ ;\ \text{বা, } t=\frac{3\sqrt{74}}{37}\ \text{সেকেণ্ড।}$$

তাহা হইলে, এইরূপ ক্ষেত্রে, $\frac{3\sqrt{74}}{37}$ সেকেণ্ড

$\simeq 0{\cdot}6975$ সেকেণ্ড সময় লাগিত।

উদাহরণ 9. একই উচ্চতা হইতে একই সময়ে দুইটি বস্তুর প্রত্যেকটিকে একই বেগে একটিকে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে এবং অপরটিকে উল্লম্বভাবে নীচের দিকে ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। প্রথমটি t_1 সেকেণ্ড সময়েতে এবং দ্বিতীয়টি t_2 সেকেণ্ড সময়েতে মাটিতে পৌঁছিল। দেখাও যে, উহাদের যে কোনওটি ঐ একই উচ্চতা হইতে অবাধে পতিত হইলে, মাটিতে $\sqrt{t_1 t_2}$ সেকেণ্ড সময়েতে আসিত।

মনে করি, উহাদের যে কোনটির প্রারম্ভিক বেগ u ফুট/সেকেণ্ড এবং নির্দিষ্ট উচ্চতা h ফুট হইতে ক্ষেপন করা হইয়াছিল। তাহা হইলে, প্রথমটির ক্ষেত্রে,

$h=-ut_1+\frac{1}{2}gt_1^2$;

এবং, দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে,

$h=ut_2+\frac{1}{2}gt_2^2$.

$\therefore\ h/t_1+h/t_2=\frac{1}{2}g(t_1+t_2)$;

বা, $h=\frac{1}{2}gt_1t_2$.

এখন, যে কোন বস্তুকে h ফুট উচ্চতা হইতে অবাধে ফেলিয়া দিলে যদি উহা t সেকেণ্ড সময়েতে মাটিতে পৌছায়, তবে

$$h=\tfrac{1}{2}gt^2.$$

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}gt_1t_2=\tfrac{1}{2}gt^2.$$

$$\therefore\ t=\sqrt{t_1t_2}.$$

সুতরাং, যে কোনও বস্তু $\sqrt{t_1t_2}$ সেকেণ্ডে মাটিতে পৌছিত।

উদাহরণ 10. ভূ-পৃষ্ঠ হইতে m পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু উল্লম্বভাবে উর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষেপ করার পর দেখা গেল, t_1, t_2, t_3 সেকেণ্ড পরে উহা a, b, c ফুট উচ্চতায় আছে। ঐ স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণ g ফুট/সেকেণ্ড^2 হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$g=2\left\{\frac{a(t_2-t_3)+b(t_3-t_1)+c(t_1-t_2)}{(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)}\right\}$$

মনে করি, উৎক্ষেপ বেগ $=u$ ফুট/সেকেণ্ড।

$$\therefore\ a=ut_1-\tfrac{1}{2}gt_1^2\ ;$$
$$b=ut_2-\tfrac{1}{2}gt_2^2\ ;$$
$$c=ut_3-\tfrac{1}{2}gt_3^2.$$

$$\therefore\ a(t_2-t_3)+b(t_3-t_1)+c(t_1-t_2)$$
$$=u\times 0-\tfrac{1}{2}g\sum(t_2-t_3)t_1^2$$
$$=\tfrac{1}{2}g(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)$$

$$\therefore\ g=2\sum\{a(t_2-t_3)\}/\{(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)\}.$$

প্রশ্নমালা 8

1. একটি বস্তু উল্লম্বভাবে উর্ধ্বদিকে নিবাত শূন্যে সেকেণ্ডে 32 গজ বেগে উৎক্ষিপ্ত হইলে, উহা যে সর্বাধিক উচ্চতা পর্য্যন্ত উঠিবে তাহা কত? সমগ্র উত্থিতকাল কত? সর্বাধিক উচ্চতার মধ্যপথে উহার বেগ কত হইয়াছিল?

2. একই স্থান হইতে m_1 ভরের একটি বস্তুকে সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে এবং m_2 ভরের অপর একটি বস্তুকে সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে উল্লম্বভাবে উর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষেপ করা হইল। উহাদের মধ্যে সর্বাধিক উচ্চতার পার্থক্য এবং উত্থিতকালের মধ্যে তফাৎ নির্ণয় কর।

3. উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বাভিমুখে একটি কণা সেকেণ্ডে 128 ফুট বেগে উৎক্ষিপ্ত হইলে, উহার সমগ্র উত্থিতকাল এবং উহা যে সর্বাধিক উচ্চতা পর্যন্ত উঠিবে তাহা নির্ণয় কর। কখন কণাটি উৎক্ষেপ স্থান হইতে 112 ফুট উচ্চতায় আসিবে, এবং তখন উহার বেগ কত হইবে?

4. 500 গ্রাম ভরের একটি বস্তুকে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বাভিমুখে সেকেণ্ডে 42 মিটার বেগে নিক্ষেপ করিলে, বস্তুটির সমগ্র উত্থিতকাল এবং উহা যে সর্বাধিক উচ্চতা পর্যন্ত উঠিবে তাহা নির্ণয় কর। কখন উহার বেগ সেকেণ্ডে 28 মিটার হইবে?

[$g = 980$ সে. মি./সে.^{2}]

5. 5 পাউণ্ড ভরের একটি গোলাকে নির্দিষ্ট বেগে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষেপ করিলে যদি উহা সর্বাধিক 27 গজ পর্যন্ত উঠিতে পারে, তাহা হইলে, উৎক্ষেপ-মুহূর্ত হইতে কখন উহা 80 ফুট উচ্চতায় পৌছিয়াছিল? কখন উহার বেগ সেকেণ্ডে 64 ফুট ছিল?

6. 20 গ্রাম ভরের একটি মার্বেল উলম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে নিবাত শূন্যে উৎক্ষেপ করায় 6 সেকেণ্ড পরে পুনরায় ঐ স্থানে উহা ফিরিয়া আসিল। উহা কত বেগে উৎক্ষেপ স্থানে ফিরিয়া আসিয়াছিল এবং উৎক্ষেপ স্থান হইতে (i) 80 ফুট উচ্চতায় (ii) 144 ফুট উচ্চতায় কত বেগ ছিল? ইহা কি 50 গজ উচ্চতা পর্যন্ত উঠিতে পারিবে?

7. এক ক্ষেপনকারী একটি বল উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষেপ করিল এবং 7 সেকেণ্ড পরে সে উহা ধরিল। বলটি সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠিয়াছিল এবং কত বেগে উহা উৎক্ষিপ্ত হইয়াছিল? উৎক্ষেপের 4 সেকেণ্ড পরে উহা সর্বাধিক উচ্চতায় কত নীচে ছিল? [W. B. H. S. 1967]

8. উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষিপ্ত একটি কণার সর্বাধিক উচ্চতা 5886 সে. মি.। উৎক্ষিপ্ত হওয়ায় কতক্ষণ পরে উহা 3270 সে. মি. উচ্চতায় থাকিবে?

($g = 981$ সে. মি./সে.^{2})। [W. B. H. S. 1973]

9. ভূ-পৃষ্ঠের নির্দিষ্ট উচ্চতা হইতে অবাধে মুক্তভাবে পতনশীল একটি বস্তু পতন-কালের সর্বশেষ সেকেণ্ডে 224 ফুট অতিক্রম করে। বস্তুটি কত উচ্চতা হইতে পতিত হইয়াছিল এবং উহার পতনকাল কত ছিল?

10. একটি উল্লম্ব স্তম্ভের শীর্ষ হইতে অবাধে পতনশীল একটি বস্তু স্তম্ভের পাদদেশে পতনকালের শেষ সেকেণ্ডে উহার উচ্চতার $\frac{1}{2}\frac{6}{5}$ অংশ অতিক্রম করে। স্তম্ভটির উচ্চতা কত এবং পাদদেশে কত বেগে বস্তুটি পতিত হইয়াছিল তাহা নির্ণয় কর।

11. একটি বহুতল বাড়ীর (a sky-scraper) সর্ব্বনিম্ন তলার উচ্চতা 33 ফুট। বাড়ীর ছাদ হইতে একখণ্ড প্রস্তর ফেলিয়া দিলে উহা $\frac{1}{4}$ সেকেণ্ডে সর্বনিম্নতলা অতিক্রম করে। বাড়ীটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

12. স্থিরাবস্থা হইতে পতনশীল একটি বস্তু কোন এক নির্দিষ্ট বিন্দু সেকেণ্ডে 120 ফুট বেগে অতিক্রম করে। 2 সেকেণ্ড পূর্ব্বে উহা কোথায় ছিল এবং 2 সেকেণ্ড পরে উহা কোথায় থাকিবে ?

13. সেকেণ্ডে 40 ফুট বেগে নিম্নাভিমুখে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু কোন এক নির্দ্দিষ্ট সেকেণ্ডে 216 ফুট অতিক্রম করে। পূর্ববর্ত্তী সেকেণ্ডে উহা কত পথ অতিক্রম করিয়াছিল ? [W. B. H. S. 1966]

14. 64 গজ উচ্চতাবিশিষ্ট একটি উল্লম্ব স্তম্ভের শীর্ষ হইতে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে নিবাত শূন্যে 2 কিলোগ্রাম ভরের একটি বস্তু সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে উৎক্ষেপ করা হইল। বস্তুটি স্তম্ভের পাদদেশে কখন আসিবে এবং তখন উহার বেগ কত হইবে ?

15. একটি কূপের মধ্যে একখণ্ড পাথর ফেলিয়া দেওয়া হইল। যদি জলে আঘাতের শব্দ পাথরটি ফেলিবার $3\frac{9}{70}$ সেকেণ্ড পরে শোনা যায় এবং পাথরটি জলের উপর সেকেণ্ডে 32 গজ বেগে পড়ে, তবে শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

16. একটি কূপের মধ্যে একখণ্ড পাথর ফেলিয়া দেওয়ার $2\frac{33}{56}$ সেকেণ্ড পরে জলে পড়ার শব্দ শোনা গেল। যদি শব্দের বেগ সেকেণ্ডে 1120 ফুট হয়, তবে কূপের (জলের উপরিভাগের) গভীরতা এবং পাথর জলের উপর যে বেগে পড়িয়াছিল তাহা নির্ণয় কর।

17. ভূ-পৃষ্ঠ হইতে একটি বেলুন 4 ফুট/সেকেণ্ড^2 সমত্বরণে উল্লম্বভাবে উপরে উঠিতেছিল। 16 সেকেণ্ড পরে একটি ক্ষুদ্র ভারী বস্তু বেলুন হইতে পড়িয়া গেল। ইহার কত সময় পরে বস্তুটি ভূ-পৃষ্ঠে পৌঁছিয়াছিল ? [W. B. H. S. 1968]

18. ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে গতিশীল একটি বেলুন হইতে একটি বস্তু ছাড়িয়া দেওয়া হইল। ইহার 5 সেকেণ্ড পরে বস্তুটি মাটিতে পৌঁছিলে, কত উচ্চতায় স্থিত বেলুন হইতে বস্তুটি ছাড়িয়া দেওয়া হইয়াছিল ?

[W. B. H. S. 1969]

19. ভূ-পৃষ্ঠ হইতে সমবেগে ঊর্দ্ধাভিমুখে গতিশীল একটি বিমান হইতে 9 সেকেণ্ডের মুহূর্ত্তে একটি বিস্ফোরক বস্তু ছাড়িয়া দেওয়া হইল এবং ইহার 7 সেকেণ্ড পরে বস্তুটি মাটিতে পৌঁছিল। বিমানের বেগ কত ছিল এবং কত উচ্চতা হইতে বস্তুটি ছাড়িয়া দেওয়া হইয়াছিল ? কত বেগে বস্তুটি মাটিতে পড়িয়াছিল ?

20. একটি স্তম্ভের শীর্ষ হইতে একটি বস্তুকে ফেলিয়া দেওয়া হইল, এবং ঐ একই মুহূর্তে অপর একটি বস্তুকে স্তম্ভের পাদদেশ হইতে একই উল্লম্বরেখা বরাবর এমন বেগে উৎক্ষেপ করা হইল যে, উহা যেন ঠিক স্তম্ভটির শীর্ষদেশে পৌঁছায়। স্তম্ভটির উচ্চতা 122·5 মিটার হইলে, বস্তুদ্বয় কোথায় এবং কখন মিলিত হইয়াছিল?

21. 144 ফুট উচ্চ একটি গম্বুজের শীর্ষ হইতে একটি বস্তু ফেলিয়া দেওয়া হইল, এবং ঠিক ঐ একই মুহূর্তে অপর একটি বস্তু উহার পাদদেশ হইতে একই উল্লম্বরেখা বরাবর এমন বেগে উৎক্ষিপ্ত হইল যে, উহা ঠিক 256 ফুট উপরে উঠিতে পারে। কখন এবং কোথায় তাহারা মিলিত হইয়াছিল?

22. সেকেণ্ডে 100 ফুট বেগে একটি বস্তুকে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষেপ করা হইল। ইহার 1 সেকেণ্ড পরে সেকেণ্ডে 89 ফুট বেগে অপর একটি বস্তুকে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে উৎক্ষেপ করা হইল। কত সময় পরে উভয় বস্তু মাটি হইতে সমান উচ্চতায় থাকিবে এবং ঐ উচ্চতা কত? [W. B. H. S. 1963]

23. এক ব্যক্তি একটি স্তম্ভের শীর্ষদেশ হইতে সেকেণ্ডে 128·8 ফুট বেগে একটি বস্তু উল্লম্বভাবে উপরের দিকে উৎক্ষেপ করিল। 5 সেকেণ্ড পরে ঐ ব্যক্তি একই স্থান হইতে অপর একটি বস্তু ফেলিয়া দিয়া দেখিল যে, বস্তু দুইটি একই সময়ে মাটিতে পৌঁছিল। স্তম্ভের উচ্চতা এবং দ্বিতীয় বস্তুটির মাটিতে পড়িতে কত সময় লাগিয়াছিল তাহা নির্ণয় কর। ($g=32·2$ ফু./সে.^{2}) [W. B. H. S. 1972]

24. সেকেণ্ডে 5 ফুট বেগে একটি লিফ্‌ট্ উপরে উঠিতেছে। উহা হইতে একটি স্ক্রু হঠাৎ বাহিরে পড়িয়া গেল। $1\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড পরে ঐ স্ক্রুর বেগ কত হইবে এবং ঐ মুহূর্তে লিফ্‌ট্ ও স্ক্রুটির মধ্যে কত ব্যবধান হইবে?

25. একটি লিফ্‌ট্ 3 ফু./সে. বেগে উপরে উঠিতেছিল। ইহার ছাদ হইতে একটি প্রস্তরখণ্ড ফেলিয়া দিলে, তাহা $\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডে উহার মেঝেতে পড়ে। যখন লিফ্‌ট্‌টি (i) 5 ফু./সে. সমবেগে নামে, (ii) 4 ফু./সে.^{2} সমত্বরণে উপরে উঠে, এবং (iii) 8 ফু./সে.^{2} সমত্বরণে নীচে নামে, তখন উপরোক্ত তিনটি ক্ষেত্রে প্রস্তরখণ্ডটির পড়িবার সময় কত লাগিবে? [C. U. P. 1976]

26. h_1, h_2, h_3, উচ্চতা হইতে তিনটি বস্তু একই সঙ্গে যথাক্রমে u_1, u_2, u_3 বেগে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষিপ্ত হইল। যদি তাহারা একই সঙ্গে ভূ-পৃষ্ঠে পৌঁছায়, তবে প্রমাণ কর :

(i) $\dfrac{u_1-u_2}{h_1-h_2}=\dfrac{u_2-u_3}{h_2-h_3}=\dfrac{u_3-u_1}{h_3-h_1}$;

(ii) $u_1(h_2-h_3)+u_2(h_3-h_1)+u_3(h_1-h_2)=0.$

27. A, B, C তিনটি বিন্দু একই উল্লম্বরেখায় পরপর অবস্থিত, যেখানে $\overline{AB}=\overline{BC}$. অবাধে পতনশীল একটি বস্তুর B হইতে C তে যাইতে যে সময় লাগে, A হইতে B তে যাইতে তাহার দ্বিগুণ সময় লাগে। প্রমাণ কর যে, A, B, C তে বস্তুটির বেগের অনুপাত 1 : 5 : 7.

28. A এবং B ভূপৃষ্ঠস্থ দুইটি ষ্টেশন্, যেখানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান যথাক্রমে g_1 এবং g_2. ঐ দুইটি স্থানে, একই উচ্চতা হইতে দুইটি কণাকে অবাধে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। যদি A ষ্টেশনে অবতরণ সময় t সেকেণ্ড কম লাগে, কিন্তু ভূপৃষ্ঠস্থ বেগ u ফু./সে. বেশী হয়, তবে দেখাও যে, $\sqrt{g_1 g_2}=u/t$.

কোন্‌টি বড়, g_1 না g_2 ?

29. একটি কণা উল্লম্বভাবে উর্ধ্বদিকে উৎক্ষিপ্ত হইল, এবং t সেকেণ্ড পরে অপর একটি কণা একই প্রাথমিক বেগে উল্লম্বভাবে উর্ধ্বদিকে উৎক্ষিপ্ত হইল। প্রমাণ কর, যে উভয়ে মিলিত হইবার সময়ে প্রত্যেকের বেগ $\frac{1}{2}gt$ হইবে।

[W. B. H. S. 1962, C. U. P. 1976]

30. উল্লম্বভাবে উর্ধ্বদিকে উৎক্ষিপ্ত একটি কণার h উচ্চতায় পৌছিতে t সেকেণ্ড সময় লাগে। পরবর্তী t' সেকেণ্ডে কণাটি মাটিতে পৌছিল। প্রমাণ কর যে, $h=\frac{1}{2}gtt'$.

31. একটি কণাকে উল্লম্বভাবে উর্ধ্বাভিমুখে u ফু./সে. বেগে উৎক্ষেপ করা হইল। ইহার t সেকেণ্ড পরে একই স্থান হইতে একই বেগে অপর একটি কণা উর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষেপ করা হইল। প্রমাণ কর যে, প্রথম কণাটি উৎক্ষিপ্ত হইবার $\left(\frac{t}{2}+\frac{u}{g}\right)$ সেকেণ্ড পরে কণা দুইটি পরস্পর মিলিত হইবে।

[W. B. H. S. 1960]

32. একটি অট্টালিকার শীর্ষ হইতে অবাধে পতিত একটি বস্তু উহার একটি জানালা হইতে মাটিতে পৌছিতে t সেকেণ্ড সময় নেয়। যদি ঐ জানালাটি মাটি হইতে h ফুট উর্ধ্বে অবস্থিত হয়, তবে দেখাও যে, যে-বেগে বস্তুটি মাটিতে পৌছিবে তাহা

$$\left(\frac{h}{t}+\frac{gt}{2}\right) \text{ ফু./সে.।}$$

33. একটি গম্বুজের শীর্ষদেশ হইতে অবাধে পতনশীল একখণ্ড প্রস্তর যখন x ফুট নীচে নামিয়াছে, ঠিক তখন গম্বুজের শীর্ষ হইতে y ফুট নীচের এক স্থান হইতে অপর একটি প্রস্তরখণ্ড অবাধে ফেলিয়া দেওয়া হইল। যদি উহারা একই সময়ে মাটিতে পৌঁছায়, তবে দেখাও যে, গম্বুজটির উচ্চতা $(x+y)^2/(4x)$ ফুট।

34. একটি লিফ্‌ট্ f ফু./সে.^{2} সমত্বরণে উপরে উঠিতেছিল। লিফ্‌টে অবস্থিত এক ব্যক্তি লিফ্‌টের সাপেক্ষে u ফু./সে. বেগে একটি বল উর্ধ্বদিকে ছুঁড়িয়া দিয়া উহাকে t সেকেণ্ড পরে ধরিয়া ফেলিল। দেখাও যে, $f+g=2u/t$.

35. এক ভোজবাজিকর (Juggler) একই আকারের তিনটি বল পর্যায়ক্রমে একটির পর একটি উপরের দিকে ঠিক 16 ফুট পর্যন্ত ছুঁড়িয়া গতিতে রাখিতে পারে। মিনিটে কতবার তাহাকে তাহার হাত উপর নীচ করিতে হইবে?

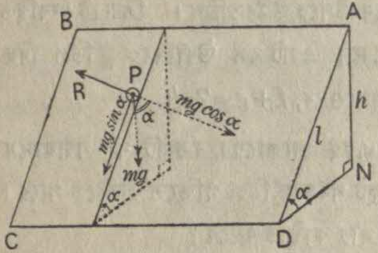
Answers (প্রশ্নমালা 8)

1. 144 ফুট ; 6 সেকেণ্ড ; $48\sqrt{2}$ ফু./সে.। 2. 48 ফুট, ; 2 সেকেণ্ড। 3. 8 সেকেণ্ড ; 256 ফুট ; 1 সে. পরে ; 7 সে. পরে ; 96 ফু./সে.। 4. $8\frac{4}{7}$ সে. ; 90 মিটার ; $1\frac{3}{7}$ সে. (উধ্বর্মুখে) ; $7\frac{1}{7}$ সে. (নিম্নমুখে)। 5. 2 সে. পরে ; $2\frac{1}{2}$ সে. পরে ; $\frac{1}{4}$ সে. পরে ; $4\frac{1}{4}$ সে. পরে। 6. 96 ফু./সে. ; 64 ফু./সে. ; 0 ফু./সে. ; পারিবে না। 7. 196 ফুট ; 112 ফু./সে. 4 ফুট নীচে। 8. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ সে. পরে ; $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ সে. পরে। 9. 900 ফুট ; 7·5 সেকেণ্ড। 10. 100 ফুট ; 80 ফু./সে.। 11. 289 ফুট। 12. প্রদত্ত বিন্দু হইতে 176 ফুট উপরে ; 304 ফুট নীচে। 13. 184 ফুট। 14. 6 সেকেণ্ড পরে ; 128 ফু./সে.। 15. 1120 ফু./সে.। 16. 100 ফুট ; 80 ফু./সে.। 17. 8 সেকেণ্ড পরে। 18. 290 ফুট। 19. 49 ফু./সে. ; 441 ফুট ; 175 ফু./সে.। 20. 2·5 সে. পরে ; শীর্ষ হইতে 30·625 মিটার নীচে, বা, পাদদেশ হইতে 91·875 মিটার উপরে। 21. $1\frac{1}{3}$ সে. পরে, শীর্ষদেশ হইতে $20\frac{1}{4}$ ফুট নীচে। 22. প্রথম হইতে 5 সে. পরে ; 100 ফুট। 23. $905\frac{5}{8}$ ফুট ; $7\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড। 24. 43 ফু./সে. (নিম্নদিকে) ; 36 ফুট। 25. (i) $\frac{1}{2}$ সে. ; (ii) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ সে. ; (iii) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ সে.। 28. $g_1>g_2$. 35. 90 বার।

অভিকর্ষের অধীন নততলে গতি

7·6. একটি নির্দিষ্ট নততলে সর্বদা স্থিত কোন বস্তুর গতি নির্ণয় :

মনে করি, ABCD একটি মসৃণ নততল যাহা অনুভূমিকতলের সহিত α কোণে নত এবং যাহার উচ্চতা h ও দৈর্ঘ্য l, তাহা হইলে, $\sin\alpha = h/l$.



(a) মনে করা যাক, এই নততলে m ভরের একটি বস্তু উহার উপর বরাবর নীচের দিকে পড়িতে লাগিল।

মনে করি, t মুহূর্তে উহা P অবস্থানে অবস্থিত এবং তখন নততলের শীর্ষ হইতে সর্বাধিক নতিবিশিষ্ট রেখা বরাবর উহার দূরত্ব x. নততলের সর্বাধিক নতিবিশিষ্ট রেখা বরাবর নীচের দিকে বস্তুটির ত্বরণ সর্বদা $g\sin\alpha$. সুতরাং, বস্তুটির গতি-সমীকরণ :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha. \quad \cdots \quad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g\sin\alpha.$$

ইহাকে সমাধান করিয়া পাই :

$$x = \tfrac{1}{2}g\sin\alpha . t^2 + C_1 t + C_2. \quad \cdots \quad (2)$$

(i) ঐ নততলের শীর্ষ হইতে বস্তুটি অবাধে পড়িতে থাকিলে, $x=0$ এবং $\frac{dx}{dt}=0$, যখন $t=0$. তাহা হইলে, $C_1=0$; $C_2=0$.

$$\therefore \quad x = \tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha. \quad \cdots \quad (3)$$

$$\text{কিন্তু } \sin\alpha = h/l. \quad \therefore \quad x = \frac{gh}{2l}t^2. \quad \cdots \quad (4)$$

(ii) বস্তুটিকে নততলের শীর্ষ হইতে u বেগে উহার সর্বাধিক নতিবিশিষ্ট রেখা বরাবর নীচের দিকে নিক্ষেপ করিলে, $x=0$ এবং $\frac{dx}{dt}=u$ যখন $t=0$. তখন (2) হইতে, $C_1=u$ এবং $C_2=0$.

$$\therefore \quad x = \tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha + ut$$

$$= \frac{gh}{2l}t^2 + ut. \quad \cdots \quad (5)$$

(b) মনে করা যাক্, এই নততলের সর্বাধিক নতিবিশিষ্ট রেখা বরাবর উপরের দিকে u বেগে বস্তুটি উৎক্ষিপ্ত হইল। t মুহূর্তে বস্তুটি নততলের পাদদেশ হইতে x দূরত্বে থাকিলে, উহার গতি-সমীকরণ :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg\sin\alpha \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$\therefore\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-g\sin\alpha.$$

ইহাকে সমাধান করিয়া পাই,

$$x=-\tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha+C't+C''. \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

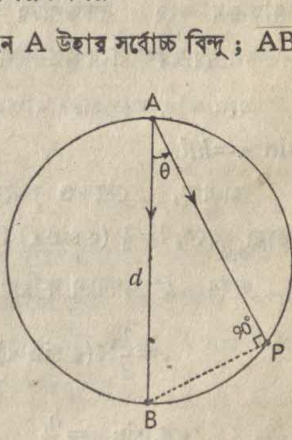
যদি $x=0$ এবং $\frac{dx}{dt}=u$ হয়, যখন $t=0$, তাহা হইলে, $C'=u$; $C''=0$.

$$\therefore\quad x=-\tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha+ut$$

$$=-\frac{gh}{2l}t^2+ut. \qquad \cdots \quad \text{(iii)}$$

7-7. উল্লম্বভাবে স্থিত বৃত্তের সর্বোচ্চ স্থান হইতে অবাধে পতনশীল বস্তুর যে কোন জ্যা দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রমের সময় নির্ণয়।

মনে করা যাক্, ABP একটি উল্লম্ব বৃত্ত যেখানে A উহার সর্বোচ্চ বিন্দু ; $\overline{AB}$ উহার উল্লম্ব ব্যাস এবং $\overline{AP}$ যে কোন জ্যা, $\angle BAP=\theta$, এবং বৃত্তের ব্যাস $=d$. তাহা হইলে, $\overline{AP}=d\cos\theta$. মনে করি, m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু A বিন্দুতে স্থিরাবস্থা হইতে $\overline{AP}$ মসৃণ জ্যা বরাবর নীচের দিকে গতিশীল হইল। A হইতে P এতে পৌঁছিতে T সময় লাগিলে, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র-সাহায্যে,



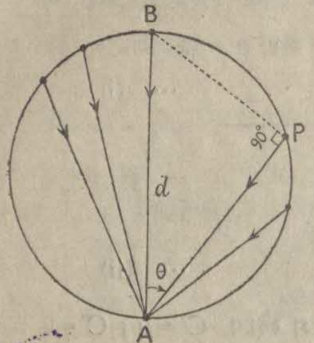
$$\overline{AP}=\tfrac{1}{2}g\cos\theta.T^2,$$

$$(\because\ u=0:\ f=g\cos\theta);$$

বা, $d\cos\theta=\frac{1}{2}g\cos\theta.\ T^2$.

$$\therefore\quad T=\sqrt{\frac{2d}{g}}.$$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, θ এর যে কোন মানের জন্য, ($0° \le \theta < 90°$) যে কোন জ্যা দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রমের সময় একই।



দ্রষ্টব্য : উল্লম্বভাবে স্থিত বৃত্তের উপরিস্থিত বিভিন্ন বিন্দু হইতে অবাধে বিভিন্ন বস্তু সর্ব্বনিম্ন বিন্দু সংযোজক অনুরূপ জ্যা বরাবর নীচের দিকে একই সময়ে পড়িতে থাকিলে, তাহারা একই সঙ্গে সর্ব্বনিম্ন বিন্দুতে পৌছিবে ; এবং মোট সময় লাগিবে $\sqrt{(2d/g)}$, যেথানে d = বৃত্তটির ব্যাস।

7-8. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ।

উদাহরণ 1. একটি মসৃণ নততলের সর্ব্বোচ্চ স্থান হইতে অবাধে পতনশীল একটি ভারী বস্তু ঐ তল বরাবর উহার পাদদেশে যে সময়ে পৌছায়, সেই স্থান হইতে নীচের দিকে উল্লম্বভাবে অবাধে পড়িতে থাকিলে, নততলের উচ্চতা তাহার অর্দ্ধেক সময়ে অতিক্রম করে। নততলটির নতি কত ? উহার উচ্চতা 64 ফুট হইলে, শীর্ষ হইতে নততল বরাবর অবাধে পতনশীল বস্তুটি পাদদেশে কত সময়ে আসিবে ?

মনে করি, নততলটির নতি $=\alpha$; উচ্চতা $=h$ ফুট ; দৈর্ঘ্য $=l$ ফুট। তাহা হইলে, $\sin\alpha = h/l$.

ধরা যাক্, t সেকেণ্ড সময়ে বস্তুটি পাদদেশে পৌছায়।

তাহা হইলে, $l=\frac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2$; এবং $h=\frac{1}{2}g(t/2)^2$.

এখন, t^2 অপনয়ন করিয়া পাই,

$$l=\frac{1}{2}\times(g\sin\alpha)\times\frac{8h}{g}\ ;\ \text{বা, } \sin\alpha=\frac{l}{4h}.$$

$$\text{কিন্তু, } \sin\alpha=\frac{h}{l}.$$

সুতরাং, h/l অপনয়ন করিয়া পাই, $\sin^2\alpha=\frac{1}{4}$; বা, $\sin\alpha=\pm\frac{1}{2}$.

সুতরাং, নির্ণেয় নতি : $\alpha=30°$.

এখন, $\alpha = 30°$; $h = 64$ হইলে, $l = 4h \sin \alpha = 4 \times 64 \times \frac{1}{2} = 128.$

তাহা হইলে, নততলের দৈর্ঘ্য $= 128$ ফুট।

এখন, $l = \frac{1}{2} \times g \sin \alpha \times t^2$ হইতে পাই, $128 = \frac{1}{2} \times 32 \times \frac{1}{2} \times t^2$;

বা, $t^2 = 16. \quad \therefore \quad t = 4.$

সুতরাং, নির্ণেয় সময় $= 4$ সেকেণ্ড।

উদাহরণ 2. $30°$ নতি এবং $12\frac{1}{2}$ ফুট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি মসৃণ নততলে একটি ভারী বস্তু কত বেগে সর্ব্বাধিক নতিবিশিষ্ট রেখা বরাবর পাদদেশ হইতে উপরের দিকে উৎক্ষেপ করিলে, উহার শীর্ষে আসিয়া মুহূর্ত্তের জন্যস্থিরাবস্থায় থাকিবে ? কত সময় পরে উহা পুনরায় পাদদেশে ফিরিয়া আসিবে ?

[W. B. H. S. 1971]

মনে করি, উৎক্ষেপ বেগ $= u$ ফু./সে.

তাহা হইলে,

$$l = ut - \frac{1}{2} g \sin \alpha \times t^2 ;$$

এবং $0 = u - g \sin \alpha \times t$ হইতে পাই :

$$12\tfrac{1}{2} = \frac{u^2}{2 \times 32 \times \sin 30°};$$

বা, $25 \times 16 = u^2. \quad \therefore \quad u = 20.$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎক্ষেপ বেগ $= 20$ ফু./সে.।

উৎক্ষেপ স্থানে পুনরায় ফিরিয়া আসিতে t সেকেণ্ড সময় লাগিলে,

$$0 = 20 \times t - \frac{1}{2} \times 32 \times \frac{1}{2} \times t^2 ;$$

বা, $(5 - 2t)\, t = 0.$

$\therefore \quad t = 2\frac{1}{2}, \quad (t = 0$ উৎক্ষেপ সময়)।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $= 2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড।

উদাহরণ 3. একটি উল্লম্ব বৃত্তের $\overline{AB}$ উল্লম্ব ব্যাস এবং $\overline{PQ}$ অপর একটি ব্যাস যাহা $\overline{AB}$ এর সহিত θ কোণে নত। স্থিরাবস্থা হইতে কোন বস্তু পড়িতে থাকিলে $\overline{AB}$ বরাবর ঐ দূরত্ব অতিক্রম করিতে যে সময় লাগে $\overline{PQ}$ বরাবর ঐ দূরত্ব অতিক্রম করিতে তাহার $\sqrt{2}$ গুণ সময় লাগে। θ এর মান বাহির কর।

মনে করি, বৃত্তের ব্যাস $= d$.

তাহা হইলে বস্তুটি স্থিরাবস্থা হইতে $\overline{AB}$ দূরত্ব, অর্থাৎ, d দূরত্ব অতিক্রম করিবে $\sqrt{\left(\frac{2d}{g}\right)}$ সময়ে।

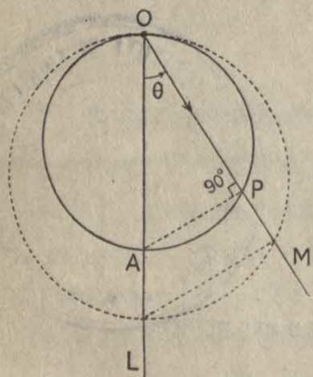
সুতরাং, বস্তুটি স্থিরাবস্থা হইতে $\overline{PQ}$ দূরত্ব, অর্থাৎ, d দূরত্ব অতিক্রম করিবে $\sqrt{2}.\sqrt{\left(\frac{2d}{g}\right)}$ সময়ে।

$$\therefore\ \ d=\tfrac{1}{2}\,g\cos\theta\times\left(\sqrt{2}.\sqrt{\frac{2d}{g}}\right)^2;$$

বা, $\cos\theta=\frac{1}{2}=\cos 60°.$

$\therefore\ \ \theta=60°.$

উদাহরণ 4. একটি মসৃণ উল্লম্ব তলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে যুগপৎ কতিপয় কণা একই সঙ্গে ঐ তলের বিভিন্ন সরলরেখা বরাবর অবাধে পড়িতে থাকিলে, দেখাও যে, t সময় পরে, তাহারা $\frac{1}{4}gt^2$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের উপর থাকিবে।



মনে করি, নির্দিষ্ট বিন্দু O ; $\overrightarrow{OL}$ এবং $\overrightarrow{OM}$ দুইটি রেখা ঐ উল্লম্ব তলে অবস্থিত যেখানে $\overrightarrow{OL}$ উল্লম্ব রেখা, এবং $\angle LOM=\theta$.

মনে করি, $\overrightarrow{OM}$ বরাবর গতিশীল কণাটি t সময়ে P এতে অবস্থিত। $\angle OPA=90°$ অঙ্কন করি।

তাহা হইলে, $\overline{OA}=\overline{OP}.\sec\theta$.

আবার, $\overrightarrow{OM}$ বরাবর কণাটির গতির জন্য

$$\overline{OP}=\tfrac{1}{2}g\cos\theta.\,t^2.$$

$\therefore\ \ \overline{OA}=\frac{1}{2}gt^2$, যাহা θ-নিরপেক্ষ।

সুতরাং, t সময় পরে, সকল কণা OAP বৃত্তের উপর থাকিবে, যেখানে ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ$=\frac{1}{4}gt^2$.

প্রশ্নমালা 9.

1. একটি 30° নতিবিশিষ্ট মসৃণ তলের উপর দিয়া স্থিরাবস্থা হইতে পিছলাইয়া পড়িবার সময় 3 সেকেণ্ডেতে একটি কণা কত বেগ লাভ করিবে, এবং সেই মোট সময়ে কত দূরত্ব উহা অতিক্রম করিবে ?

2. কোন এক মসৃণ নততলের শীর্ষ হইতে স্থিরাবস্থায় স্থিত একটি ভারী বস্তু তল বরাবর হড়কাইয়া পড়িবার কালে গতির তৃতীয় সেকেণ্ডেতে 40 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। উহার নতিকোণ কত ?

3. (i). 6 ফুট উচ্চ এবং 32 ফুট দীর্ঘ একটি মসৃণ নততল বরাবর স্থিরাবস্থা থেকে শীর্ষ হইতে পাদদেশ পর্যন্ত হড়্‌কাইয়া পড়িতে একটি বস্তুর কত সময় লাগিবে ?

[W. B. H. S. 1969]

(ii). উচ্চতা 9 ফুট হইলে, কি হইবে ?

4. (i). 60° নতিবিশিষ্ট একটি মসৃণ নততল বরাবর উপর দিকে সেকেণ্ডে 60 ফুট বেগে উৎক্ষিপ্ত একটি বস্তু সর্বাধিক কত দূরত্ব পর্য্যন্ত যাইবে এবং ইহাতে কত সময় লাগিবে ?

(ii). নতি 30° হইলে, কি হইবে ?

5. স্থিরাবস্থা হইতে একটি মসৃণ নততলের শীর্ষ হইতে ভূমি পর্য্যন্ত হড়্‌কাইয়া পড়িতে একটি কণার যে সময় লাগে, উল্লম্বভাবে ঐ নততলের উচ্চতার দ্বিগুণ পরিমাণ দূরত্ব অতিক্রম করিতে সেই একই সময় লাগে। নততলটির নতিকোণ বাহির কর।

6. একটি মসৃণ নততলের উচ্চতা ও দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 5. উহার পাদদেশ হইতে তল বরাবর সেকেণ্ডে 60 ফুট বেগে একটি বস্তু উৎক্ষিপ্ত হইলে যদি উহা শীর্ষ পর্য্যন্ত উঠিয়া পুনরায় উৎক্ষেপ বিন্দুতে ফিরিয়া আসে, তবে ঐ যাওয়া আসায় কত সময় লাগিল ? নততলের দৈর্ঘ্যই বা কত ?

7. একটি মসৃণ নততলের শীর্ষ হইতে পাদদেশ পর্য্যন্ত স্থিরাবস্থা হইতে হড়্‌কাইয়া পড়িতে কোন একটি বস্তুর যে সময় লাগে এবং শীর্ষ হইতে উল্লম্বভাবে ভূমিতে পড়িতে যে সময় লাগে তাহাদের অনুপাত $\sqrt{2} : 1$ হইলে, তলটির নতিকোণ বাহির কর।

8. প্রমাণ কর যে, একটি মসৃণ নততল বরাবর কোন বস্তু স্থিরাবস্থা থেকে শীর্ষ হইতে পাদদেশে হড়্‌কাইয়া আসিতে সর্বাপেক্ষা কম সময়ে সম্ভব হইবে, যখন উহার নতি 45° হইবে ; (দেওয়া আছে : নততলের ভূমির দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট)।

9. কোন এক মসৃণ নততলের পাদদেশ হইতে সর্বাধিক নতিবিশিষ্ট রেখা বরাবর একটি বস্তু এমন বেগে উৎক্ষিপ্ত হইল যে, উহা ঠিক শীর্ষ পর্য্যন্ত পৌঁছিতে পারে। সেই একই মুহূর্তে অপর একটি বস্তু শীর্ষ হইতে তল বরাবর স্থিতাবস্থা থেকে পিছলাইয়া পড়িতে থাকিল। যখন তাহারা মিলিত হইবে, তখন তাহাদের অতিক্রান্ত দূরত্বের অনুপাত বাহির কর।

10. 20 এতে 1 নতিবিশিষ্ট একটি মসৃণ নততলের পাদদেশ হইতে স্থিরাবস্থা থেকে একটি ইঞ্জিন 2 ফু./সে.² ত্বরণে তল বরাবর উপরে উঠিতে থাকে। কিছুক্ষণ পরে উহার বাষ্প বন্ধ করিয়া দেওয়ায় অর্জিত বেগে উহা নততলের ঠিক শীর্ষ পর্যন্ত

উঠিতে পারে। যদি ঐ তলের দৈর্ঘ্য $4\frac{1}{2}$ মাইল হয়, তবে পাদদেশ হইতে তল বরাবর কতদূরে বাষ্প বন্ধ করা হইয়াছিল? [W. B. H. S. 1964]

11. একটি মসৃণ নততলের দৈর্ঘ্য 96 গজ এবং উচ্চতা 64 ফুট। উহার দৈর্ঘ্য কিরূপ তিন অংশে বিভক্ত করিলে স্থিরাবস্থা থেকে শীর্ষ হইতে তল বরাবর পতনশীল একটি বস্তু ঐ তিন অংশ সমান সমান সময়ে অতিক্রম করিবে?

12. ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$ বাহু উল্লম্বভাবে অবস্থিত। $\overline{BA}$ এবং $\overline{AC}$ বাহু বরাবর পিছলাইয়া পড়িতে কোন একটি বস্তুর একই সময় লাগিলে, প্রমাণ কর যে, ABC ত্রিভুজটি হয় সমকোণী, নয়ত সমদ্বিবাহু।

13. একটি মসৃণ উল্লম্ব তলে কোন একটি বৃত্তের সর্ব্বোচ্চ বিন্দু হইতে উহার একটি জ্যা (ব্যাস নহে) বরাবর একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে পড়িতে থাকিলে, ঐ জ্যা এর অপর প্রান্তে $490\sqrt{2}$ সে. মি./সে. বেগ লাভ করে। বৃত্তটির ব্যাস 490 সে.মি. হইলে ঐ জ্যা উল্লম্ব রেখার সহিত কত কোণে নত থাকিবে? [$g=980$ সে. মি./সে.^{2}.]

14. একটি মসৃণ উল্লম্ব তলেস্থিত কোন বৃত্তের উল্লম্ব ব্যাস $\overline{AB}$। যদি স্থিরাবস্থা থেকে A হইতে $\overline{AP}$ জ্যা বরাবর পিছলাইয়া পড়িবার কালে P-এতে অর্জিত বেগ $\overline{AB}$ বরাবর পতনজনিত B-তে অর্জিত বেগের অর্ধেক হয়, তবে $\overline{AB}$-এর সহিত $\overline{AP}$ যে কোণে নত, তাহা নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1963]

15. কোন এক উল্লম্ব বৃত্তের $\overline{AB}$ একটি অনুভূমিক ব্যাস। দেখাও যে, যে কোন $\overline{AC}$ জ্যা বরাবর হড়কাইয়া পড়িতে একটি কণার যে সময় লাগিবে, তাহা $\overline{BC}$ জ্যা বরাবর হড়কাইয়া পড়িবার সময়ের ব্যস্তানুপাতিক হইবে।

16. কোন এক উল্লম্ব বৃত্তের $\overline{AB}$ একটি উল্লম্ব ব্যাস। একই সঙ্গে যুগপৎ দুইটি কণা স্থিতাবস্থা থেকে A এবং P হইতে যথাক্রমে $\overline{AP}$ জ্যা ও $\overline{PB}$ জ্যা বরাবর পড়িতে থাকিলে, দেখাও যে, তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হইবে P হইতে $\overline{AB}$ এর লম্ব দূরত্বের সমান।

ANSWERS (প্রশ্নমালা 9)

1. 48 ফু./সে.; 72 ফুট। 2. 30°. 3. (i) $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ সে.; (ii) $2\frac{2}{3}$ সে.। 4. (i) $\frac{75}{2}\sqrt{3}$ ফুট; $\frac{5}{4}\sqrt{3}$ সে.। (ii) 112·5 ফুট; 3·75 সে.। 5. 45°. 6. 6·25 সে.; 93·75 ফুট। 7. 45°. 9. 3 : 1. 10. 2 মাইল। 11. শীর্ষদেশ হইতে প্রথম অংশ 32 ফুট; দ্বিতীয় 96 ফুট; তৃতীয় 160 ফুট। 13. 45°. 14. 60°.

অষ্টম অধ্যায়

প্রাসের গতি

(Motion of a Projectile)

8-1. উপস্থাপন :

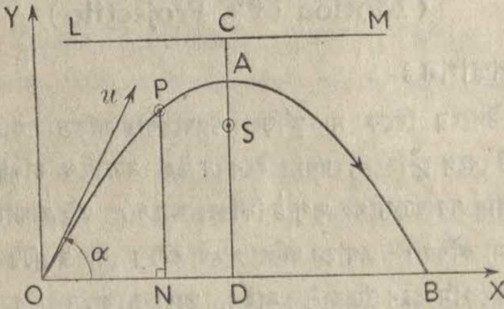
উল্লম্বভাবে উপরের দিকে না ছুঁড়িয়া উল্লম্বরেখার সহিত কোন কোণে একটি প্রস্তরখণ্ড নির্দ্দিষ্ট বেগে ছুঁড়িলে, দেখা যাইবে যে উহা বক্রপথে চলিয়া কোন সর্বোচ্চ বিন্দুতে পৌছিবার পর বক্রপথেই ভূপৃষ্ঠে ফিরিয়া আসে। এই অধ্যায়ে আমরা এইরূপ গতির আলোচনা করিব। এখানে ধরিয়া লওয়া হইবে যে, বস্তুটির উপর অভিকর্ষজ ত্বরণ ভিন্ন অপর কোন ত্বরণ ক্রিয়াশীল নাই। তাহা ছাড়া, বস্তুটির উপর বায়ুর বাধা বা অপর যে কোন বাধা উপেক্ষা করা হইবে, অর্থাৎ, এখানে **নিবাত শূন্যে (in absolute vacuo)** উল্লম্বরেখার সহিত নির্দ্দিষ্ট কোণে নির্দ্দিষ্ট বেগে উৎক্ষিপ্ত, বা, নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি আলোচিত হইবে।

শূন্যে যে কোন দিকে উৎক্ষিপ্ত, বা, নিক্ষিপ্ত বস্তুকে **প্রাস (projectile)** বলে।

যে বিন্দু হইতে একটি বস্তু ক্ষেপন করা হয়, তাহাকে উহার **ক্ষেপণ বিন্দু (point of projection)** বলে। যে বেগে প্রাসটি ক্ষেপণ করা হয়, তাহাকে **ক্ষেপণ বেগ (velocity of projection)** বলা হয়। অনুভূমিক তলের সহিত ক্ষেপণ বেগ যে কোণ করে, তাহাকে **ক্ষেপণ কোণ (angle of projection)** বলে। প্রাস যে পথে পরিক্রমণ করে, অর্থাৎ, প্রাসের গতিপথকে **প্রাস-পথ, বা, ক্ষেপণ-পথ (trajectory)** বলে। ক্ষেপণ-বিন্দুগামী অনুভূমিক তল হইতে যে উচ্চতা পর্যন্ত প্রাসটি উঠিতে পারে, তাহাকে উহার **সর্বাধিক উচ্চতা (greatest height)** বলা হয়। ক্ষেপণ-বিন্দুগামী অনুভূমিক তলের যে বিন্দুতে বস্তুটি পতিত হইবে, ক্ষেপণ বিন্দু হইতে তাহার দূরত্বকে **ক্ষেপণ সীমা, বা, পাল্লা (Horizontal Range)** বলা হয়। ক্ষেপণ-বিন্দু হইতে যাত্রা আরম্ভ করিয়া ক্ষেপণ বিন্দুগামী অনুভূমিকতলে পুনরায় ফিরিয়া আসিতে একটি প্রাসের যে সময় লাগে, তাহাকে উহার **উত্থিত কাল, বা, উড্ডয়ন কাল (time of flight)** বলা হয়।

8-2. নিবাত শূন্যে একটি প্রাসের গতি আলোচনা :

মনে করি, O বিন্দু হইতে u বেগে অনুভূমিক দিকের সহিত α ($\neq 90^\circ$) কোণে ঊর্ধ্বদিকে m ভরের একটি বস্তু উৎক্ষিপ্ত হইল। মনে করি, t সময় পরে প্রাসের



অবস্থান P. এখন O বিন্দুগামী অনুভূমিক দিক্ বরাবর $\overrightarrow{OX}$ কে X-অক্ষ এবং উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্ব দিকে $\overrightarrow{OY}$ কে Y-অক্ষ ধরা যাক, যেখানে P এবং ঐ অক্ষদ্বয় একই উল্লম্বতলে অবস্থিত। এইরূপ ক্ষেত্রে, বস্তুটির উপর উল্লম্বভাবে নিম্নদিকে অভিকর্ষজ ত্বরণ ব্যতীত অপর কোন ত্বরণ নাই। সুতরাং, বস্তুটির গতি-সমীকরণ :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0\;;\quad \text{এবং}\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg.$$

$$\therefore\ \frac{d^2x}{dt^2}=0\;;\qquad \text{এবং,}\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g.\qquad \cdots \qquad (1)$$

এই উভয় সমীকরণকে সমাকলন করিয়া পাই :

$$\frac{dx}{dt}=A_1\;;\quad \text{এবং,}\ \frac{dy}{dt}=A_2-gt.$$

যেহেতু, $t=0$ এতে, $\dfrac{dx}{dt}=u\cos\alpha$ এবং $\dfrac{dy}{dt}=u\sin\alpha$,

$$\therefore\ A_1=u\cos\alpha\;;\ \text{এবং,}\ A_2=u\sin\alpha.$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=u\cos\alpha\;;\qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

$$\text{এবং}\ \frac{dy}{dt}=u\sin\alpha-gt.\qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (3)$$

এখন, t এর সাপেক্ষ (2) এবং (3) কে সমাকলন করিয়া পাই,

$$x=(u\cos\alpha)\,t+B_1\ ;$$
$$y=(u\sin\alpha)\,t-\tfrac{1}{2}gt^2+B_2.$$

যেহেতু, $t=0$ এতে, $x=0$ এবং $y=0$,

$$\therefore\ B_1=0\ ;\ \ B_2=0.$$

$$\therefore\ \mathbf{x=(u\cos\alpha)t}\ ; \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (4)$$
$$\mathbf{y=(u\sin\alpha)t-\tfrac{1}{2}gt^2}. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (5)$$

(4) এবং (5) হইতে t অপনয়ন করিয়া পাই :

$$y=(u\sin\alpha)\times\frac{x}{u\cos\alpha}-\frac{1}{2}\,g\times\left(\frac{x}{u\cos\alpha}\right)^2;$$

বা, $$y=(\tan\alpha)x-\left(\frac{g\sec^2\alpha}{2u^2}\right)x^2, \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (6)$$

যাহা $y=ax+bx^2$ আকারের। সুতরাং, **প্রাসের পথ একটি অধিবৃত্ত।**

দ্রষ্টব্য : (2) হইতে দেখা যায়, প্রাসের যে কোন অবস্থানে, অনুভূমিক দিক্ বরাবর উহার বেগের উপাংশ ধ্রুবক এবং তাহা $u\cos\alpha$; কিন্তু, উল্লম্ব দিক্ বরাবর উহার উপাংশ প্রাসের অবস্থানের উপর নির্ভরশীল।

মনে করি, $\dfrac{dy}{dt}=0$ যখন $t=T_1$.

তাহা হইলে, (3) হইতে পাই :

$$0=u\sin\alpha-gT_1\ ;$$

বা, $$T_1=\frac{u\sin\alpha}{g}. \qquad \cdots \qquad (i)$$

তাহা হইলে, ক্ষেপণ বিন্দুগামী অনুভূমিক তল হইতে সর্বাধিক উচ্চতায় (A বিন্দুতে) পৌছিতে প্রাসের T_1 সময় লাগে ; এবং, সর্বাধিক উচ্চতা H ($=\overline{DA}$; D, $\overline{OB}$ ক্ষেপণ সীমার মধ্যবিন্দু) হইলে, (5) হইতে,

$$H=(u\sin\alpha)\,T_1-\tfrac{1}{2}gT_1^2$$
$$=(u\sin\alpha)\times\frac{u\sin\alpha}{g}-\tfrac{1}{2}g\times\left(\frac{u\sin\alpha}{g}\right)^2.$$

$$\therefore\ \mathbf{H=\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}}. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (ii)$$

(5) এতে $y=0$ বসাইয়া পাই :

$$0=(u \sin \alpha)\, t-\tfrac{1}{2}\, gt^2$$

অর্থাৎ, $t=0$, এবং, $t=\dfrac{2u \sin \alpha}{g}$.

এখন, $t=0$ এতে প্রাসের অবস্থান O (0, 0) এতে ;

এবং, $t=\dfrac{2\, u \sin \alpha}{g}$ তে প্রাসের অবস্থান B এতে। সুতরাং, প্রাসের উত্থিত কাল T হইলে,

$$T=\frac{2u \sin \alpha}{g}; \quad \ldots \quad \ldots \qquad (iii)$$

এবং ক্ষেপণ সীমা R হইলে, $R=\overline{OB}=(u \cos \alpha) \times T$,

অর্থাৎ,

$$R=\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad \ldots \quad \ldots\ldots \qquad (iv)$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(6) হইতে পাই,

$$y=x \tan \alpha-\frac{gx^2 \tan \alpha}{u^2 \sin 2\alpha}$$

$$=x \tan \alpha \times \left\{1-\frac{g}{u^2 \sin 2\alpha}\, x\right\}$$

$$=x \tan \alpha \times \left\{1-\frac{x}{R}\right\}$$

$$\therefore \quad y=\tan \alpha \times \left\{x \frac{(R-x)}{R}\right\}.$$

$$\therefore \quad \alpha=\tan^{-1}\left\{\frac{y}{x} \cdot \frac{R}{R-x}\right\}.$$

মন্তব্য :

(6) হইতে পাই,

$$\left(x-\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2=-\frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g}\left(y-\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right).$$

এই অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g}$; শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$\equiv A\left(\dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right)$;

$$\overline{4AS} = \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g} = 4 \cdot \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g};$$

$$\therefore \overline{AS} = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}.$$

এখন, $\overline{AC} = \overline{AS}$ হইলে, (C, বর্ধিত $\overline{DA}$ এর উপরিস্থ),

$$\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AS} + H$$

$$= \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g} + \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{u^2}{2g}.$$

$\therefore$ নিয়ামক $\overleftrightarrow{LM}$ এর সমীকরণ : $y = \dfrac{u^2}{2g}$.

আবার, $\overline{SD} = \overline{AD} - \overline{AS} = H - \overline{AS}$

$$= \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g} = -\frac{u^2 \cos 2\alpha}{2g}.$$

$\therefore$ **নাভির স্থানাঙ্ক** $= S\left(\dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, -\dfrac{u^2 \cos 2\alpha}{2g}\right)$.

এখন, $\dfrac{-u^2 \cos 2\alpha}{2g} > 0$, বা $= 0$, বা < 0

হইলে, অর্থাৎ $\alpha > \pi/4$, বা $\alpha = \pi/4$, বা $\alpha < \pi/4$ হইলে, ক্ষেপণ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলের উপরদিকে, অথবা অনুভূমিক তলে, অথবা অনুভূমিক তলের নীচে নাভি থাকিবে।

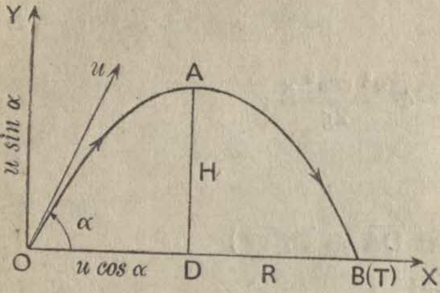
মন্তব্য : $\overline{OS} = \dfrac{u^2}{2g}$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

সর্বাধিক উচ্চতা H, সমগ্র উত্থিতকাল T এবং ক্ষেপণসীমা R নির্ণয়ে বিকল্প-পদ্ধতি :

O বিন্দু হইতে u বেগে α ক্ষেপণ-কোণে একটি বস্তু নিক্ষিপ্ত হইল। চিত্রে, $\overline{AD} = H$, $\overline{OB} = R$ এবং O হইতে OAB বরাবর B তে পৌঁছিতে বস্তুটির T সময় লাগে।

অনুভূমিক দিক্ বরাবর ক্ষেপণ-বেগের উপাংশ $u \cos \alpha$; এবং উল্লম্ব দিক্ বরাবর ঊর্ধ্বদিকে ইহার প্রাথমিক উপাংশ $u \sin \alpha$. বস্তুটির উপর উল্লম্বভাবে নীচের দিকে অভিকর্ষজ ত্বরণ g সর্ব্বদা ক্রিয়াশীল ; কিন্তু অনুভূমিক দিক্ বরাবর বস্তুটির উপর কোন বল না থাকায় ঐ দিকে বস্তুটির বেগের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। তাহা হইলে,



$$0=(u \sin \alpha)^2-2gH \; ; \; 0=(u \sin \alpha)T-\tfrac{1}{2}gT^2 \; ;$$
$$R=\overline{OB}=(u \cos\alpha)\, T.$$

$$\therefore \quad H=\frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} \; ; \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

$$T=\frac{2u \sin \alpha}{g} \; ; \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

$$R=\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

মন্তব্য : (i) নির্দ্দিষ্ট u এর জন্য R এর মান সর্বাধিক হইবে, যখন $\sin 2\alpha=1$; অর্থাৎ, $\alpha=45°$; এবং তখন, $R=\dfrac{u^2}{g}$.

(ii) মনে করা যাক্, একটি বস্তুকে ক্ষেপণ-বেগ u দ্বারা অনুভূমিক দিকে R দূরত্বে পাঠাইতে হইবে। তাহা হইলে,

$$R=\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}, \text{ (যেখানে ; R এবং } u \text{ প্রদত্ত)।}$$

$$\therefore \quad \sin 2\alpha=\frac{Rg}{u^2}=\sin 2\theta, \text{ (ধরি) ; যেখানে, } R \leq u^2/g.$$

$$\therefore \quad 2\alpha=2\theta, \text{ বা, } 2\alpha=180°-2\theta \; ; \text{ অর্থাৎ, } \alpha=\theta, \text{ অথবা, } \alpha=90°-\theta.$$

সুতরাং, প্রদত্ত ক্ষেপণ-বেগ ও প্রদত্ত ক্ষেপণ সীমার জন্য প্রাসের দুইটি সম্ভাব্য ক্ষেপণ কোণ থাকিবে। কিন্তু, $R>u^2/g$ হইলে, কোন সম্ভবপর ক্ষেপণ কোণ থাকিবে না, অর্থাৎ $u<\sqrt{gR}$ হইলে, প্রাসটি R অনুভূমিক দূরত্ব পর্য্যন্ত যাইবে না।

8-3. নির্দিষ্ট সময়ে অথবা উচ্চতায় প্রাসের বেগ নির্ণয় :

মনে করি, একটি কণাকে u বেগে ক্ষেপণ-কোণ α এতে উৎক্ষপ করা হইল। কণাটির উপর উল্লম্বভাবে নীচের দিকে অভিকর্ষজ ত্বরণ g সর্বদা ক্রিয়াশীল থাকিবে ; কিন্তু অনুভূমিক দিক্ বরাবর উহার উপর কোন বহিরাগত বল না থাকায়, ঐ দিকে কোনও ত্বরণ থাকিবে না ; অর্থাৎ, ঐ দিকে উহার বেগের কোনও পরিবর্তন হইবে না।

(a). ধরা যাক্, নির্দিষ্ট t সময় পরে, কণাটির বেগ v এবং ইহা অনুভূমিকতলের সহিত θ কোণে উপর দিকে সক্রিয়। তাহা হইলে,

$$v \cos \theta = u \cos \alpha ; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$v \sin \theta = u \sin \alpha - gt. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

(1) এবং (2) হইতে পাই :

$$v^2 = (u \cos \alpha)^2 + (u \sin \alpha - gt)^2$$

$$= u^2 - 2ugt \sin\alpha + g^2 t^2 ; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

এবং, $$\tan \theta = \frac{u \sin \alpha - gt}{u \cos \alpha}. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

u, α এবং t এর প্রদত্ত মানের জন্য (3) এবং (4) হইতে, v এবং θ নির্ণয় করা যাইবে।

(b). মনে করা যাক্, নির্দিষ্ট উচ্চতা h এতে কণাটির বেগ v এবং ইহা অনুভূমিক-তলের সহিত θ কোণে ক্রিয়াশীল। তাহা হইলে,

$$v \cos \theta = u \cos \alpha ; \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

$$(v \sin \theta)^2 = (u \sin \alpha)^2 - 2gh. \quad \ldots\ldots \quad (ii)$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$v^2 = (u \cos \alpha)^2 + (u \sin \alpha)^2 - 2gh$$

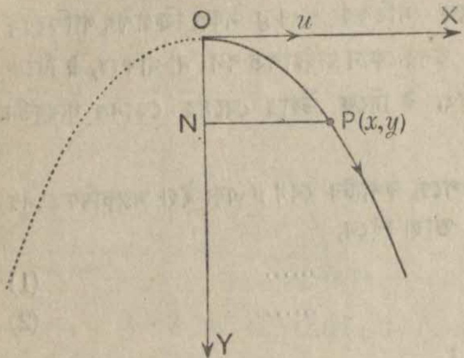
$$= u^2 - 2gh ; \quad \ldots\ldots \quad (ii\ )$$

এবং, $$\tan \theta = \pm \frac{\sqrt{u^2 \sin^2\alpha - 2gh}}{u \cos \alpha}. \quad \ldots\ldots \quad (iv)$$

u, α এবং h প্রদত্ত হইলে, (iii) এবং (iv) হইতে v এবং θ নির্ণয় করা যাইবে।

মন্তব্য : (a) এবং (b) উভয় ক্ষেত্রে, $\tan \theta$ এর মান ধনাত্মক হইলে, কণাটি উপরের দিকে উঠিতে থাকিবে ; কিন্তু, $\tan \theta$ এর মান ঋণাত্মক হইলে, কণাটি সর্বাধিক উচ্চতা পার হইবার পর নীচের দিকে নামিতে থাকিবে।

8·4. ভূ-পৃষ্ঠ থেকে নির্দিষ্ট উচ্চতা হইতে অনুভূমিক দিক্ বরাবর প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতি নির্ণয় :



মনে করি, ভূ-পৃষ্ঠ থেকে নির্দিষ্ট উচ্চতার O বিন্দু হইতে একটি বস্তুকে অনুভূমিক দিকে u বেগে ক্ষেপণ করা হইল। O কে মূলবিন্দু, u বেগের দিক্ বরাবর x-অক্ষ এবং উল্লম্বভাবে নীচের দিকে y-অক্ষ ধরা যাক্।

মনে করি, t সময় পরে বস্তুটি $P(x, y)$ এতে অবস্থিত।

তাহা হইলে,

$$x=\overline{NP}=ut \; ; \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$y=\overline{ON}=\tfrac{1}{2}gt^2. \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

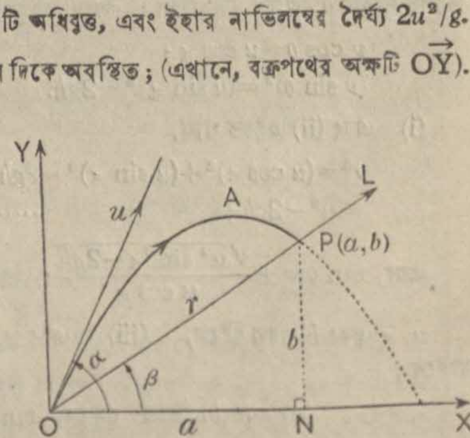
(1) এবং (2) হইতে t অপনয়ন করিয়া পাই,

$$x^2=\frac{2u^2}{g}\cdot y, \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

যাহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

সুতরাং, প্রাসটির গতিপথ একটি অধিবৃত্ত, এবং ইহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $2u^2/g$. এই অধিবৃত্তের অক্ষ উল্লম্বভাবে নীচের দিকে অবস্থিত ; (এখানে, বক্রপথের অক্ষটি $\overrightarrow{OY}$).

8·5. নততলের পাদদেশ হইতে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর নততল বরাবর ক্ষেপণ-সীমা নির্ণয়।



মনে করি, OL একটি নততল, যাহার নতি$=\beta$. উহার পাদদেশ O হইতে একটি বস্তু u বেগে α ক্ষেপণ কোণে উৎক্ষেপ করা হইল।

মনে করি, t সময় পরে বস্তুটি OL নততলের P এতে পৌছায় ; অনুভূমিক তলের

উপর $\overline{PN}$ লম্ব, যেখানে O বিন্দুগামী অনুভূমিকতলে N অবস্থিত। ধরা যাক্, $\overline{ON}=a$; $\overline{NP}=b$; $\overline{OP}=r$. তাহা হইলে,

$$a=(u \cos \alpha)t \; ; \quad \cdots \quad (1)$$

$$b=(u \sin \alpha)t-\tfrac{1}{2}gt^2 \; ; \quad \cdots \quad (2)$$

$$\tan \beta = b/a. \quad \cdots \quad (3)$$

$$\therefore \quad \tan \beta = \frac{u \sin \alpha - gt/2}{u \cos \alpha} \; ;$$

বা, $\frac{1}{2}gt = u \sin \alpha - u \cos \alpha . \tan \beta$

$$= u \sec \beta . \sin (\alpha - \beta).$$

$$\therefore \quad t=\frac{2u}{g}\sec \beta \sin (\alpha-\beta). \quad \cdots \quad (4)$$

এখন, (1) এবং (4) হইতে পাই,

$$a=\frac{2u^2}{g}\sec \beta \cos \alpha \sin (\alpha-\beta) \quad \cdots \quad (5)$$

$$\therefore \quad r=a \sec \beta=\frac{2u^2}{g}\sec^2\beta \cos \alpha \sin (\alpha-\beta)$$

$$=\frac{u^2}{g}\sec^2\beta . \{\sin(2\alpha-\beta)-\sin \beta\} \quad \cdots \quad (6)$$

বিকল্প পদ্ধতি :

$$y=x \tan \alpha-\frac{1}{2}\frac{g}{u^2 \cos^2\alpha}x^2 \quad \text{সূত্র-সাহায্যে,}$$

$$(r \sin \beta)=(r \cos \beta) \tan \alpha-\frac{1}{2}\frac{g}{u^2 \cos^2\alpha}(r \cos \beta)^2$$

বা, $r=\dfrac{2u^2}{g}\sec^2\beta \cdot (\cos \beta \tan \alpha-\sin \beta)\cos^2\alpha$

$$=\frac{2u^2}{g}\sec^2\beta \cos \alpha \sin (\alpha-\beta)$$

$$=\frac{u^2}{g}\sec^2\beta\{\sin(2\alpha-\beta)-\sin \beta\} \; ;$$

এবং $r \cos \beta=(u \cos \alpha).t$;

বা, $t=\dfrac{2u}{g}\sec \beta \sin(\alpha-\beta).$

মন্তব্য :

u এবং β এর নির্দ্দিষ্ট মানের জন্য r এর মান বৃহত্তম হইবে, যখন $\sin(2\alpha-\beta)=1$, অর্থাৎ, $2\alpha-\beta=90°$, বা, $\alpha=\pi/4+\beta/2$; এবং তখন r এর বৃহত্তম মান

$$=\frac{u^2}{g}\sec^2\beta(1-\sin\beta)=\frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}.$$

এইক্ষেত্রে, t এর অনুরূপ মান$=\frac{2u}{g}\sec\beta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$

$$=\frac{u\sqrt{2}}{g(\cos\frac{1}{2}\beta+\sin\frac{1}{2}\beta)}.$$

8-6. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. একটি কণা অনুভূমিকতলের সহিত 60° কোণে উপরদিকে সেকেণ্ডে 32 গজ বেগে উৎক্ষিপ্ত হইল। ইহার (i) । ক্ষেপণ-সীমা, (ii) উড্ডয়ন কাল এবং (iii) সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর।

এখানে, ক্ষেপণ-বেগ : $u=96$ ফুট/সেকেণ্ড ;

এবং, ক্ষেপণ কোণ : $\alpha=60°$.

$\therefore$ (i) ক্ষেপণ-সীমা : $R=\frac{u^2}{g}\sin 2\alpha$

$$=\frac{96\times96}{32}\sin 120° \text{ ফুট}$$

$$=48\sqrt{3} \text{ গজ।}$$

(ii) উড্ডয়ন-কাল : $T=\frac{2u\sin\alpha}{g}$

$$=\frac{2\times96\times\sin 60°}{32} \text{ সেকেণ্ড}$$

$$=3\sqrt{3} \text{ সেকেণ্ড।}$$

(iii) সর্ব্বাধিক উচ্চতা : $H=\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

$$=\frac{96\times96\times\sin^2 60°}{2\times32} \text{ ফুট}$$

$$=36 \text{ গজ।}$$

উদাহরণ 2. নির্দিষ্ট বেগে নির্দিষ্ট ক্ষেপণ-কোণে একটি কণা উৎক্ষিপ্ত হওয়ায় ইহা ক্ষেপণ-বিন্দু হইতে 64 গজ দূরে ঐ তলে 4 সেকেণ্ডে ফিরিয়া আসে। ক্ষেপণ-বেগ ও ক্ষেপণ-কোণ নির্ণয় কর। [$g=32$ ফু./সে.^{2}]।

মনে করি, কণাটির ক্ষেপণ-বেগ $= u$ ফু./সে. এবং ক্ষেপণ-কোণ $=\alpha$. এখানে,

ক্ষেপণ-সীমা : $R=64\times 3$ ফুট ;

উড্ডয়ন-কাল : $T=4$ সেকেণ্ড।

$$\therefore \quad \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}=64\times 3 ; \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\text{এবং} \quad \frac{2u \sin \alpha}{g}=4. \qquad \cdots \quad (2)$$

(2) হইতে, $u \sin \alpha=64.$ $\cdots$ (3)

(1) এবং (3) হইতে,

$$u \cos \alpha=48. \qquad \cdots \quad (4)$$

(3) এবং (4) হইতে,

$$u^2=(64)^2+(48)^2$$
$$=16^2\times(4^2+3^2)$$
$$=16^2\times 5^2.$$

$$\therefore \quad u=16\times 5=80 ; \qquad \cdots \quad (5)$$

এবং, $\tan \alpha=4/3.$ $\cdots$ (6)

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেপণ-বেগ $=80$ ফুট/সেকেণ্ড ;

এবং, নির্ণেয় ক্ষেপণ-কোণ $=\tan^{-1}\frac{4}{3}$.

উদাহরণ 3. ভূপৃষ্ঠ হইতে সর্বদা 490 মিটার উচ্চতায় অনুভূমিক দিক বরাবর সেকেণ্ডে 98 মিটার বেগে উড্ডয়নশীল কোন এক বিমান হইতে একটি বোমা ফেলিয়া দেওয়া হইল। কত সময় পরে এবং অনুভূমিক তল বরাবর কতদূরে বোমাটি ভূপৃষ্ঠে পড়িবে? তখন উহার বেগ কি হইবে? [$g=980$ সে. মি./সে.^{2}]।

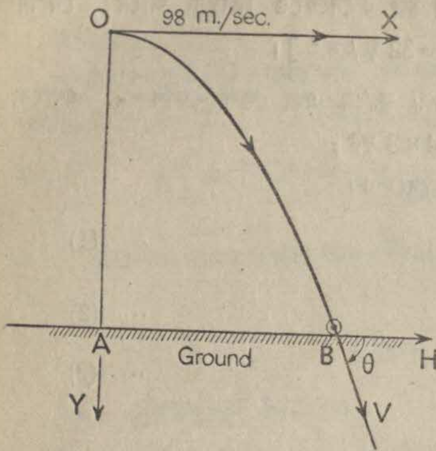
চিত্রে, AB ভূপৃষ্ঠ ; $\overline{OA}=490$ মি.।

মনে করি, t সেকেণ্ড পরে বোমাটি ভূপৃষ্ঠের B তে পড়িল। তাহা হইলে,

$$490\times 100=\tfrac{1}{2}\times 980\times t^2 ;$$

বা, $t^2=100.$ $\quad \therefore \quad t=10.$

সুতরাং, 10 সেকেণ্ড পরে বোমাটি ভূপৃষ্ঠে পড়িবে। তখন, $\overline{AB} = u \times t =$ 98×10 মি. = 980 মি; অর্থাৎ, অনুভূমিক তল বরাবর বোমাটি ভূপৃষ্ঠে 980 মি. দূরত্বে পড়িবে।



মনে করি, ভূপৃষ্ঠে পড়িবার কালে উহার বেগ অনুভূমিকের সহিত θ কোণে V মি./সে.। তাহা হইলে,

$V \cos \theta = 98$; এবং, $V \sin \theta = 9{\cdot}80 \times 10 = 98.$

$\therefore \; V^2 = 98^2 + 98^2$
$= 98^2 \times 2$;

বা, $V = 98\sqrt{2}$ এবং $\tan \theta = 1$, বা, $\theta = 45°$.

সুতরাং, বোমাটি অনুভূমিকের সহিত 45° কোণে সেকেণ্ডে $98\sqrt{2}$ মি. বেগে ভূপৃষ্ঠে পড়িবে।

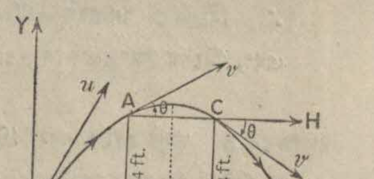
উদাহরণ 4. একটি কণা 48 ফু./সে. বেগে 60° উন্নতি কোণে উৎক্ষিপ্ত হইল। 24 ফুট উচ্চতায় উহার বেগ কত হইবে? কত সময় পরে কণাটি ঐ উচ্চতায় পৌঁছিবে?

এখানে, ক্ষেপণ-বেগ :

$u = 48$ ফু./সে. ;

ক্ষেপণ-কোণ : $\alpha = 60°$;

$h = 24$ ফুট।



সর্বাধিক উচ্চতা : $H = \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

$= \dfrac{48 \times 48 \times \sin^2 60}{2 \times 32}$ ফুট $= 27$ ফুট।

সুতরাং, কণাটি 24 ফুট উচ্চতায় যাইতে পারে। মনে করা যাক, 24 ফুট উচ্চতায় কণাটির বেগ v ফুট/সে. এবং তখন ইহা অনুভূমিকের সহিত সূক্ষ্মকোণ θ-তে ক্রিয়াশীল।

তাহা হইলে,

$$v \cos \theta = u \cos \alpha = 48 \times \cos 60^\circ = 24 \quad \cdots \quad (1)$$

$$(v \sin \theta)^2 = (u \sin \alpha)^2 - 2gh$$

$$= (48 \times \sin 60^\circ)^2 - 2 \times 32 \times 24$$

$$= 192 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$\therefore \quad v^2 = 24 \times 24 + 192 = 16 \times 16 \times 3 \; ;$$

বা, $v = 16\sqrt{3}$. ... ... (3)

আবার, $\tan^2 \theta = \dfrac{192}{24 \times 24} = \dfrac{1}{3}$;

বা, $\tan \theta = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan(\pm 30^\circ)$;

বা, $\theta = \pm 30^\circ$. ... ... (4)

এই 24 ফুট উচ্চতায় প্রথমবার উপরে উঠিবার সময় এবং দ্বিতীয়বার নীচের দিকে নামিবার সময় কণাটির বেগ সেকেণ্ডে $16\sqrt{3}$ ফুট হইবে এবং তাহা অনুভূমিকের সহিত 30° কোণে ক্রিয়াশীল হইবে।

মনে করা যাক, t সেকেণ্ড সময়েতে কণাটি 24 ফুট উচ্চতায় থাকে। তাহা হইলে, $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সূত্র-সাহায্যে,

$$24 = (u \sin \alpha)\, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \; ;$$

বা, $24 = (48 \times \sin 60^\circ)\, t - \frac{1}{2} \times 32 \times t^2$;

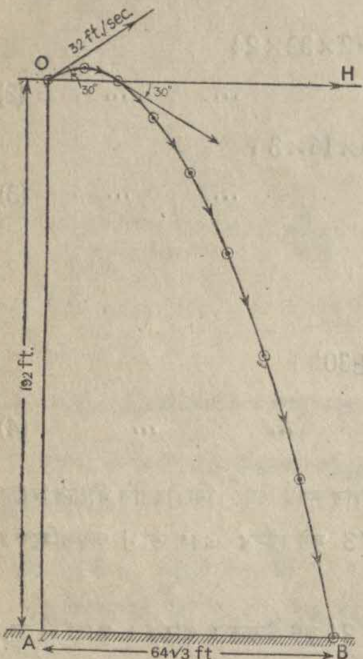
বা, $2t^2 - 3\sqrt{3}t + 3 = 0$.

$$\therefore \quad t = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{27 - 24}}{4} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{4} \; ;$$

বা, $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{3}$.

সুতরাং, 24 ফুট উচ্চতায় কণাটি উপরে উঠিবার কালে $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ সেকেণ্ড সময়ে এবং নীচে নামিবার কালে $\sqrt{3}$ সেকেণ্ড সময়েতে পৌছিবে।

উদাহরণ 5. 64 গজ উচ্চ একটি স্তম্ভের শীর্ষ হইতে একটি বস্তু অনুভূমিকের সহিত 30° কোণে সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে ক্ষেপণ করা হইল। কখন এবং স্তম্ভের পাদদেশ হইতে কতদূরে অনুভূমিকতলে ইহা পড়িবে?



এখানে, ক্ষেপণ বেগ : $u=32$ ফু./সে. ; ক্ষেপণ কোণ : $\alpha=30°$

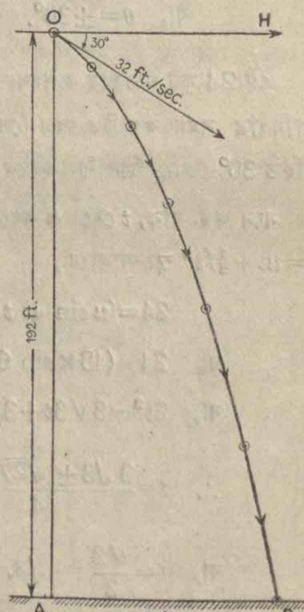
মনে করি, t সেকেণ্ডে বস্তুটি অনুভূমিক তলে স্তম্ভের পাদদেশ হইতে $\overline{AB}$ দূরত্বে B তে পৌঁছায়।

(a) বস্তুটি অনুভূমিকের সহিত 30° কোণে উর্ধ্ব দিকে উৎক্ষিপ্ত হইলে,

$$192=(-32 \sin 30°)t+\tfrac{1}{2}gt^2 ;$$

বা, $t^2-t-12=0$;

বা, $(t-4)(t+3)=0.$



যেহেতু, সময় ঋণাত্মক হইতে পারে না,

$\therefore \quad t=4.$

সুতরাং, বস্তুটি 4 সেকেণ্ডে অনুভূমিক তলে আসিবে। তখন, স্তম্ভের পাদদেশ হইতে অনুভূমিকতলে ইহার দূরত্ব$=\overline{AB}$ $=(32 \cos 30°)\times 4$ ফুট$=64\sqrt{3}$ ফুট।

(b) বস্তুটি অনুভূমিকের সহিত 30° কোণে নীচের দিকে নিক্ষিপ্ত হইলে,

$$192=(32 \sin 30°)+\tfrac{1}{2}gt^2 ;$$

বা, $t^2+t-12=0$;

বা, $(t-3)(t+4)=0.$

যেহেতু, t এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না, ∴ নির্ণেয় সময়=3 সেকেণ্ড। তখন, স্তম্ভের পাদদেশ হইতে অনুভূমিক তলে ইহার দূরত্ব

$$=\overline{AB}=(32\cos 30^\circ)\times 3 \text{ ফুট}=48\sqrt{3} \text{ ফুট।}$$

উদাহরণ 6. একটি রাইফেল বুলেটের সর্বাধিক পাল্লা 1200 গজ। যদি লক্ষ্য বস্তুর দিকে ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে গতিশীল একটি ট্রাক হইতে একই উন্নতি কোণে রাইফেল হইতে বুলেটটি ছোঁড়া হয়, তবে দেখাও যে, বুলেটের পাল্লা 110 গজ বৃদ্ধি পাইবে।

মনে করি, বুলেটের উৎক্ষেপ বেগ u ফুট/সেকেণ্ড এবং ইহার উৎক্ষেপ কোণ α.

তাহা হইলে, ক্ষেপণ-সীমা : $R=\dfrac{u^2}{g}\sin 2\alpha.$

প্রদত্ত শর্তানুসারে, R এর সর্বাধিক মান 1200 × 3 ফুট।

$$\therefore \quad 1200\times 3=\frac{u^2}{g};$$

$$\text{বা,} \quad u^2=1200\times 3\times 32; \qquad \text{বা,} \quad u=240\sqrt{2};$$

এবং তখন $\sin 2\alpha=1$, অর্থাৎ, $\alpha=45^\circ$.

এখন, ঘণ্টায় 15 মাইল=22 ফুট/সেকেণ্ড।

অনুভূমিকতলে 22 ফু./সে. বেগে গতিশীল ট্রাক্ হইতে উহার গতির দিকে 45° উন্নতি কোণে সেকেণ্ডে $240\sqrt{2}$ ফুট বেগে বুলেট উৎক্ষিপ্ত হইলে, উর্ধ্বভাবে উল্লম্বদিকে ইহার বেগের উপাংশ=সেকেণ্ডে $240\sqrt{2}\sin 45^\circ$ ফুট=সেকেণ্ডে 240 ফুট; এবং অনুভূমিক দিক বরাবর ইহার বেগের উপাংশ=সেকেণ্ডে $(240\sqrt{2}\cos 45^\circ+22)$ ফুট=সেকেণ্ডে 262 ফুট।

এইরূপক্ষেত্রে, বুলেটের উড্ডয়নকাল T সেকেণ্ড হইলে,

$$0=240\times T-\tfrac{1}{2}\times 32\times T^2$$

$$\text{বা,} \quad T=\frac{2\times 240}{32}=15;$$

অর্থাৎ, উড্ডয়নকাল=15 সেকেণ্ড।

এইরূপ ক্ষেত্রে, বুলেটের পাল্লা R′ হইলে,

$$R'=262\times 15 \text{ ফুট}=1310 \text{ গজ।}$$

∴ বুলেটের পাল্লার বৃদ্ধির পরিমাণ

$$=(1310-1200) \text{ গজ}=110 \text{ গজ।}$$

উদাহরণ 7. গতিপথের P তে আসিতে একটি প্রাসের t সময় এবং P হইতে উৎক্ষেপ-বিন্দুগামী অনুভূমিকতলে আসিতে t' সময় লাগিলে, দেখাও যে, অনুভূমিক তল হইতে P এর উচ্চতা $\frac{1}{2}gtt'$. **[C. U. P. 1973]**

মনে করি, উৎক্ষেপ-বেগ$=u$ এবং উৎক্ষেপ-কোণ$=\alpha$. তাহা হইলে,

$$t+t'=\text{উড্ডয়ন-কাল}=\frac{2u\sin\alpha}{g},$$

$$\therefore\ h=(u\sin\alpha)t-\tfrac{1}{2}gt^2.$$

$$=\tfrac{1}{2}g(t+t')t-\tfrac{1}{2}gt^2$$

$$=\tfrac{1}{2}gtt'.$$

উদাহরণ 8. একটি বস্তু দুইটি বিভিন্ন ক্ষেপণ-কোণে একই বেগে উৎক্ষিপ্ত হইলে, উভয়ক্ষেত্রে একই অনুভূমিক ক্ষেপণ-সীমা R হয়। যদি দুইটি সম্ভাব্য পথে সর্বাধিক উচ্চতা H_1 এবং H_2 এবং উত্থিতকাল যথাক্রমে T_1 এবং T_2 হয়, তবে দেখাও যে, $R=4\sqrt{H_1H_2}=\frac{1}{2}gT_1T_2$.

মনে করি, একটি বস্তুর উৎক্ষেপ বেগ$=u$ এবং ক্ষেপণ কোণ$=\alpha$. তাহা হইলে,

$$R=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}\ ;\ \text{বা,}\quad \sin 2\alpha=\frac{Rg}{u^2};\quad (u>\sqrt{Rg}).\quad \ldots\ldots \qquad (1)$$

যেহেতু, u এবং R প্রদত্ত, সুতরাং (1) হইতে α জানা যাইবে।

তাহা হইলে, প্রদত্ত u এবং R এর জন্য ক্ষেপণ-কোণ α এবং $90°-\alpha$ হইবে।

$$\therefore\ H_1=\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\ ;\ H_2=\frac{u^2\sin^2(90°-\alpha)}{2g}\ ;$$

$$T_1=\frac{2u\sin\alpha}{g}\ ;\ T_2=\frac{2u\sin(90°-\alpha)}{g}.$$

$$\therefore\ R^2=\frac{4u^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2}=16\,H_1H_2.$$

$$\therefore\ R=4\sqrt{H_1H_2}.$$

আবার, $$T_1T_2=\frac{4u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g^2}=\frac{2R}{g}.$$

$$\therefore\ R=4\sqrt{H_1H_2}=\tfrac{1}{2}gT_1T_2.$$

উদাহরণ 9. বিভিন্ন কণাকে একই ক্ষেপণ-বিন্দু হইতে সমান সমান বেগে একই উল্লম্ব সমতলে ক্ষেপণ করিলে, দেখাও যে, তাহাদের গতিপথের নাভিগুলি একটি বৃত্তের উপর থাকিবে।

এইরূপ ক্ষেত্রে, কণাগুলিকে বিভিন্ন উল্লম্ব সমতলে ক্ষেপণ করিলে, নাভিগুলি কোথায় থাকিবে ?

মনে করি, একটি কণার ক্ষেপণ-বেগ $=u$ এবং ক্ষেপণ-কোণ $=\alpha$. ক্ষেপণ বিন্দু O কে মূলবিন্দু ; অনুভূমিক দিকে x-অক্ষ ও ঊর্ধ্বদিকে উলম্বভাবে y-অক্ষ ধরা যাক্ ; যেখানে, অক্ষদ্বয় ও কণাটির গতিপথ একই উল্লম্বতলে অবস্থিত। কণাটির গতিপথ একটি অধিবৃত্ত হইবে এবং ইহার নাভির স্থানাঙ্ক (h, k) হইলে,

$$h=\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g} \text{ ; এবং } k=-\frac{u^2 \cos 2\alpha}{2g}.$$

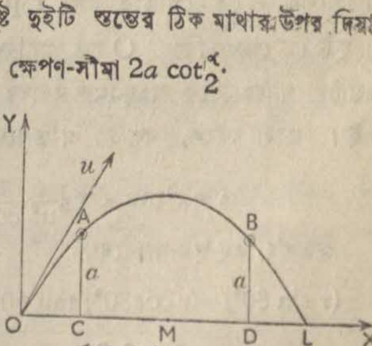
ইহাদের মধ্য হইতে α কে অপনয়ন করিয়া পাই,

$$h^2+k^2=\frac{u^4}{4g^2}, \text{ যাহা } \alpha \text{ নিরপেক্ষ।}$$

সুতরাং, নাভিগুলি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের উপর থাকিবে, যেখানে, $a=\dfrac{u^2}{2g}$.

কণাগুলিকে একই বিন্দু হইতে সমান বেগে বিভিন্ন উল্লম্বতলে ক্ষেপণ করিলে, তাহাদের গতিপথের নাভিগুলি একটি নির্দিষ্ট গোলকের উপর থাকিবে, যাহার কেন্দ্র ক্ষেপণ বিন্দু O, এবং ব্যাসার্ধ $\dfrac{u^2}{2g}$ হইবে, যেখানে, যে কোন কণার ক্ষেপণ বেগ u.

উদাহরণ 10. উন্নতি কোণ α তে একটি বল এইরূপ বেগে উৎক্ষিপ্ত হইল যে, উহা $2a$ ব্যবধানে অবস্থিত a উচ্চতা বিশিষ্ট দুইটি স্তম্ভের ঠিক মাথার উপর দিয়া চলিয়া গেল। দেখাও যে, বলটির অনুভূমিক ক্ষেপণ-সীমা $2a \cot\frac{\alpha}{2}$.



মনে করি, ক্ষেপণ-বেগ $=u$;
ক্ষেপণ-সীমা $=$ R.

ক্ষেপণ-বিন্দু O কে মূলবিন্দু, অনুভূমিক বরাবর গতির দিকে x-অক্ষ এবং ঊর্ধ্বভাবে উল্লম্বদিকে y-অক্ষ লই। তাহা হইলে, প্রাসের গতিপথের সমীকরণ হইবে :

$$y=x\tan\alpha\times\left(1-\frac{x}{R}\right). \qquad \cdots \quad (1)$$

মনে করি, প্রথম স্তম্ভটি নিক্ষেপ বিন্দু হইতে b দূরত্বে অবস্থিত। তাহা হইলে,

$$R=b+2a+b\,;$$

বা, $$b=\frac{R}{2}-a.$$

তাহা হইলে, (1) হইতে পাই,

$$a=\left(\frac{R}{2}-a\right)\tan\alpha\times\left(1-\tfrac{1}{2}+\frac{a}{R}\right)$$

$$=\tan\alpha\times\frac{(R-2a)(R+2a)}{4R}\,;$$

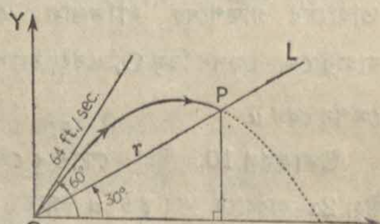
বা, $$R^2-4aR\cot\alpha=4a^2\,;$$

বা, $$(R-2a\cot\alpha)^2=4a^2(1+\cot^2\alpha)=4a^2\operatorname{cosec}^2\alpha.$$

$$\therefore\quad R=2a(\cot\alpha+\operatorname{cosec}\alpha)=2a\cot\frac{\alpha}{2}.$$

উদাহরণ 11. অনুভূমিক তলের সহিত 30° নতিবিশিষ্ট নততলের পাদদেশ হইতে 60° উন্নতি কোণে সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে একটি বস্তু উৎক্ষিপ্ত হইল। নততলে ইহার ক্ষেপণ-সীমা কত হইবে এবং কত সময়ে বস্তুটি নততলে আসিবে ?

এখানে বস্তুটির ক্ষেপণ-বেগ : $u=64$ ফু./সে. ; ক্ষেপণ-কোণ : $\alpha=60°$. নততল $\equiv$ OL ; উহার নতি $\beta=30°$.



মনে করি, t সেকেণ্ড পরে বস্তুটি নততলের P তে পৌঁছায় এবং $\overline{OP}=r$ ফুট। ক্ষেপণ-বিন্দু O কে মূলবিন্দু, বস্তুটির গতির দিকে অনুভূমিক বরাবর x-অক্ষ, এবং ঊর্ধ্বভাবে উল্লম্বদিকে y-অক্ষ লই। তাহা হইলে, বস্তুটির গতিপথের সমীকরণ হইবে,

$$y=x\tan\alpha-\frac{1}{2}\frac{g}{u^2\cos^2\alpha}x^2.$$

সুতরাং, এই সূত্র-সাহায্যে,

$$(r\sin 30°)=(r\cos 30°)\tan 60°-\tfrac{1}{2}\times\frac{32}{64^2\times\cos^2 60°}\times(r\cos 30°)^2\,;$$

বা, $$\frac{r}{2}=\frac{3r}{2}-\frac{3r^2}{256}\,;$$

বা, $$(3r-256)r=0.$$

$r=0$, O বিন্দুকে নির্দেশ করে ;

এবং $r=256/3$, P বিন্দুকে নির্দেশ করে ;

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেপণ-সীমা $=256/3$ ফুট $=85\frac{1}{3}$ ফুট।

তখন, $r\cos\beta=(u\cos\alpha)t$;

বা, $t=\dfrac{r\cos\beta}{u\cos\alpha}=\dfrac{256/3\times\cos 30^\circ}{64\times\cos 60^\circ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ সেকেণ্ড।

প্রশ্নমালা 10.

1. একটি কণা অনুভূমিকের সহিত 30° উন্নতিকোণে সেকেণ্ডে 735 সে. মি. বেগে উৎক্ষিপ্ত হইল। ইহার (i) উত্থিতকাল (ii) ক্ষেপণ-সীমা ও (iii) সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর।

2. একটি বস্তুকে সেকেণ্ডে 88 ফুট বেগে অনুভূমিকতলের সহিত 60° কোণে উৎক্ষেপ করা হইল। ইহার উত্থিতির সর্বাধিক উচ্চতা এবং ঐ উচ্চতায় পৌছিবার সময় বাহির কর। [W. B. H. S. Comp. 1976]

3. একটি কণা 960 ফুট/সে. বেগে এবং 30° উন্নতিকোণে উৎক্ষিপ্ত হইল। কণাটির (a) সর্বাধিক উচ্চতা, (b) উড্ডয়নকাল, (c) পাল্লা ও (d) 528 ফুট উচ্চতায় বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর। [C. U. P. 1974]

4. অনুভূমিকের সহিত $\sin^{-1}\frac{4}{5}$ উন্নতি কোণে সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে একটি কণা উৎক্ষিপ্ত হইল। ইহার (i) উড্ডয়নকাল, (ii) সর্বাধিক উচ্চতা এবং (iii) পাল্লা নির্ণয় কর।

5. একটি প্রাসের পাল্লা 400 গজ এবং সর্বাধিক উচ্চতা 225 ফুট। উহার ক্ষেপণ-বেগ ও ক্ষেপণ-কোণ বাহির কর। উহার সমগ্র উড্ডয়ন কাল বাহির কর।

6. ভূপৃষ্ঠের এক স্থান হইতে উৎক্ষিপ্ত একটি বুলেট ঐ স্থান হইতে 196 ফুট দূরে অনুভূমিকতলে অবস্থিত 98 ফুট উচ্চ একটি প্রাচীরের ঠিক উপর দিয়া যাইবার সময় উহার গতি অনুভূমিক দিক্ বরাবর ছিল। বুলেটের ক্ষেপণ-বেগ ও ক্ষেপণ-কোণ বাহির কর। [W. B. H. S. 1964]

7. একটি কণা অনুভূমিকের সহিত $\sin^{-1} \frac{3}{5}$ উন্নতি কোণে সেকেণ্ডে 160 ফুট বেগে উৎক্ষিপ্ত হইল। 3 সেকেণ্ড পরে উহার বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

8. একটি কণা অনুভূমিকের সহিত 60° উন্নতি কোণে সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে উৎক্ষিপ্ত হইল। অনুভূমিকতল হইতে 8 ফুট উচ্চতায় উহার বেগ কত হইবে এবং তখন উহা অনুভূমিকের সহিত কোন্ দিকে ক্রিয়া করিবে?

9. একটি পাহাড়ের চূড়া হইতে সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে অনুভূমিক দিকে একটি পাথর ক্ষেপণ করা হইল। ইহা পাহাড়ের পাদদেশ হইতে 320 ফুট দূরে ভূমিতে পড়িলে, পাহাড়ের উচ্চতা ও ভূমিতে পড়িবার সময় পাথরটির বেগ নির্ণয় কর।

[W. B. H. S. 1965]

10. ভূমি হইতে 19·6 মিটার উচ্চতায় একটি প্রাস অনুভূমিক দিকে সুক্ষিপ্ত হওয়ায় 100 মিটার দূরে উহা ভূমি স্পর্শ করে। ইহার ক্ষেপণ-বেগ নির্ণয় কর। [$g=980$ সে. মি./সে.^{2}]

[C. U. P. 1967]

11. একজন বৈমানিক অনুভূমিক দিকে ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে যাইবার কালে 2000 ফুট উচ্চতা হইতে একটি বোমা ফেলিয়া দেয়। লক্ষ্য বস্তু হইতে অনুভূমিক দিক্ বরাবর কত দূরত্বে থাকিতে বোমাটি ফেলিলে, ইহা লক্ষ্য বস্তুকে আঘাত করিবে?

[W. B. H. S. 1966]

12. একটি টেনিস্ বল 6·25 ফুট উচ্চতা হইতে অনুভূমিক দিকে প্রতিক্ষিপ্ত হওয়ায় প্রতিক্ষেপকারী হইতে অনুভূমিক তলে 60 ফুট দূরে মাটি স্পর্শ করে। যদি ইহা প্রতিক্ষেপকারী হইতে 40 ফুট দূরে জাল স্পর্শ করে, তবে জালের উচ্চতা নির্ণয় কর।

[W. B. H. S. 1971]

13. 200 ফুট উচ্চ একটি দুর্গের শীর্ষ হইতে সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে এবং 30° উন্নতি কোণে একটি বল উৎক্ষিপ্ত হইল। উহা দুর্গের পাদদেশগামী অনুভূমিক তলকে পাদদেশ হইতে কতদূরে আঘাত করিবে তাহা নির্ণয় কর। সময়ের ব্যবধান কত হইবে? [$g=32$ ফু./সে.^{2}]।

[C. U. P. 1975]

14. 96 ফুট উচ্চ একটি স্তম্ভের শীর্ষ হইতে 30° উন্নতি কোণে সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে একটি প্রস্তরখণ্ড উৎক্ষেপ করা হইল। কখন এবং কি বেগে ইহা স্তম্ভের পাদদেশগামী অনুভূমিক তলে পড়িবে?

15. 6 ফুট উচ্চতা হইতে অনুভূমিক তলের সহিত 30° উন্নতি কোণে সেকেণ্ডে 60 ফুট বেগে একজন খেলোয়াড় একটি ক্রিকেট বল উৎক্ষেপ করে এবং অপর একজন খেলোয়াড় ভূমি হইতে 2 ফুট উচ্চতায় উহা ধরিয়া ফেলে। খেলোয়াড় দুইজন কত দূরত্বে ছিল? সময়ের ব্যবধান কত ছিল? **[C. U. P. 1977]**

16. একটি কণা সেকেণ্ডে 48 ফুট বেগে উৎক্ষিপ্ত হইল। উৎক্ষেপ-বিন্দুগামী অনুভূমিক তলে উহার সর্বাধিক ক্ষেপণ-সীমা এবং যে দুইটি ক্ষেপণ-কোণের জন্য অনুভূমিক ক্ষেপণ-সীমা 36 ফুট হইবে তাহা নির্ণয় কর। শেষোক্ত ক্ষেত্রে, উড্ডয়নকাল দুইটির পার্থক্য কত? **[W. B. H. S. 1962]**

17. একটি কণা এমনভাবে উৎক্ষিপ্ত হইল যে, ইহার অনুভূমিক ক্ষেপণ-সীমা 100 ফুট এবং উহা ক্ষেপণ-বিন্দু হইতে 25 ফুট দূরে অবস্থিত 15 ফুট উচ্চ একটি বাধা ঠিক অতিক্রম করিয়া যাইতে পারে। দেখাও যে, কণাটির ক্ষেপণ-কোণ $\tan^{-1}(4/5)$. কণাটির ক্ষেপণ বেগ কত ছিল? **[W. B. H. S. 1969]**

18. ভূমি হইতে একটি বল উৎক্ষেপ করায় অনুভূমিক তলে 96 ফুট দূরত্বে অবস্থিত 36 ফুট এবং 64 ফুট উচ্চ দুইটি খুঁটির ঠিক মাথার উপর দিয়া উহা চলিয়া যায়। যদি একটি খুঁটি হইতে অপর খুঁটিতে পৌঁছিতে 5 সেকেণ্ড সময় লাগে তবে কণাটির ক্ষেপণ-বেগ বাহির কর।

19. একটি প্রাসের ক্ষেপণ বেগ u; সর্বাধিক উচ্চতা H এবং ক্ষেপণ-সীমা R হইলে, প্রমাণ কর,

$$R = 4\sqrt{\left\{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)\right\}}.$$

20. একটি কণা u বেগে এবং α উন্নতিকোণে উৎক্ষিপ্ত হইল। যদি কণাটির ক্ষেপণ-সীমা R, সর্বাধিক উচ্চতা H এবং উত্থিতকাল T হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $4R^2 - 4T^2u^2 + g^2T^4 = 0$;

(ii) $16\,gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$.

21. একই ক্ষেপণ-সীমার জন্য দুইটি সম্ভাব্য ক্ষেপণ-কোণ α_1 ও α_2, এবং অনুরূপ উড্ডয়নকাল t_1 ও t_2 হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

22. অনুভূমিকতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কণাসমূহ যুগপৎ একই ক্ষেপণ-বেগ u তে একই উল্লম্বতলে বিভিন্ন ক্ষেপণ-কোণে সুক্ষিপ্ত হইলে, দেখাও যে, প্রদত্ত t সময়ে তাহারা একটি বৃত্তের উপর থাকিবে।

23. একটি প্রাসের ক্ষেপণ-কোণ α এবং ক্ষেপণ-সীমা R হইলে, দেখাও যে, উহার গতিপথের সমীকরণ নিম্নরূপে লেখা যাইবে :

$$y = x\left(1 - \frac{x}{R}\right)\tan \alpha.$$

24. অনুভূমিকতলের একটি স্থান O হইতে α উন্নতিকোণে ও v বেগে একটি কণা উৎক্ষিপ্ত হইল ; এবং ঠিক একই মুহূর্তে উহার গতিপথের নিয়ামক হইতে দ্বিতীয় একটি কণা অবাধে ফেলিয়া দেওয়া হইল। উহারা উভয়ে P বিন্দুতে মিলিত হইলে, দেখাও যে, O হইতে P এর অনুভূমিক দূরত্ব $\frac{v^2 \cot \alpha}{2g}$.

25. অনুভূমিকতলে একটি নির্দিষ্ট স্থান হইতে একটি বল উৎক্ষিপ্ত হওয়ায়, ঐ অনুভূমিকতলে ক্ষেপণ-বিন্দু হইতে a ও b দূরত্বে যথাক্রমে b ও a উচ্চতাবিশিষ্ট দুইটি খুঁটির ঠিক মাথার উপর দিয়া উহা চলিয়া যায়। দেখাও যে, অনুভূমিকতলে বলটির ক্ষেপণ-সীমা $(a^2+ab+b^2)/(a+b)$, এবং ক্ষেপণ কোণ $\tan^{-1}(a/b+b/a+1)$.

26. দেখাও যে, অনুভূমিকতলে কোন এক স্থান হইতে a দূরত্বে b উচ্চতায় স্থিত একটি লক্ষ্য বস্তুকে আঘাত করিতে হইলে, একটি রাইফেল বুলেটের সর্বনিম্ন বেগ $\sqrt{g(b+\sqrt{a^2+b^2})}$ হইতে হইবে।

27. একটি পাহাড়ের চূড়ার উচ্চতা সমুদ্র জলতল হইতে h. কোন জাহাজের কামান হইতে চূড়ায় অবস্থিত একটি দুর্গকে গোলা দ্বারা আঘাত করিতে হইবে। যদি কামানের মুখ হইতে গোলাটি $\sqrt{2gk}$ বেগে বাহির হয়, তবে দেখাও যে, দুর্গ হইতে জাহাজের বৃহত্তম অনুভূমিক দূরত্ব $2\sqrt{k(k-h)}$.

[C. U. P. 1972]

28. O হইতে একটি কণাকে u বেগে অনুভূমিতলের সহিত α উন্নতিকোণে উৎক্ষেপ করা হইল। O বিন্দুগামী কোন এক নততলের নতি β হইলে, ঐ নততলের উপর কণাটির ক্ষেপণ-সীমা বাহির কর। [C. U. P. 1972]

29. অনুভূমিকতলের সহিত 30° নতিবিশিষ্ট নততলের পাদদেশ হইতে সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে 60° উন্নতিকোণে নততলের উর্ধ্বাভিমুখে একটি কণা উৎক্ষিপ্ত হইলে নততলে কণাটির পাল্লা এবং উড্ডয়নকাল বাহির কর।

30. অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে নতিবিশিষ্ট নততল হইতে সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে 30° উন্নতিকোণে নততলের নিম্নাভিমুখে একটি বল নিক্ষিপ্ত হইলে, নততলে উহার পাল্লা এবং উড্ডয়নকাল বাহির কর।

31. অনুভূমিক তল হইতে h ফুট উচ্চতায় অবস্থিত শত্রু ঘাঁটির উন্নতি কোণ ঐ অনুভূমিক তলের কোন একস্থানে β. দেখাও যে, ঐ স্থান হইতে শত্রুর ঘাঁটিতে গোলা বর্ষণ করিতে হইলে, গোলার সর্বনিম্ন বেগ হইতে হইবে $\sqrt{gh(1+\text{cosec}\,\beta)}$.

32. অনুভূমিক তল হইতে সর্বদা h উচ্চতায় একটি বিমান v সমবেগে একইদিকে গতিশীল ছিল। ঐ অনুভূমিকতলে অবস্থিত কোন একস্থানে উহার উন্নতি কোণ যখন α, ঠিক সেই মুহূর্তে সেইস্থান হইতে ঐ বিমানটি লক্ষ্য করিয়া V বেগে একটি গোলা উৎক্ষেপ করা হইল। ঐ গোলাটি বিমানকে আঘাত করিলে দেখাও যে,

$$V = v \sec\alpha + \tfrac{1}{2}\frac{gh}{v}\cot\alpha \,\text{cosec}\,\alpha.$$

ANSWERS. (প্রশ্নমালা 10)

1. (i) 3/4 সে. ; (ii) 477·4 সে. মি. (প্রায়) ; (iii) 68·90625 সে. মি.। 2. (i) 90·75 ফুট ; (ii) $\frac{11}{8}\sqrt{3}$ সেকেণ্ড। 3. (a) 3600 ফুট ; (b) 30 সেকেণ্ড ; (c) 14400 $\sqrt{3}$ ফুট ; (d) 544 $\sqrt{3}$ ফু./সে. ; অনুভূমিকের সহিত $\pm\tan^{-1}(8/15)$ কোণে। 4. (i) 3·2 সে. ; (ii) 40·96 ফুট ; (iii) 122·88 ফুট। 5. 200 ফু./সে. ; $\tan^{-1}(3/4)$; 7·5 সেকেণ্ড। 6. 112 ফু./সে. ; 45°. 7. 128 ফু./সে. ; অনুভূমিক দিকে। 8. 16 $\sqrt{2}$ ফু./সে. ; ±45°। 9. 32 ফু. $\sqrt{29}$ ফু./সে. ; অনুভূমিক হইতে নীচের দিকে $\tan^{-1}(5/2)$ কোণে। 10. 50 মি./সে.। 11. 440 $\sqrt{5}$ ফুট। 12. 3 ফু. $5\frac{3}{8}$ ইঞ্চি। 13. 200 $\sqrt{3}$ ফুট ; 5 সেকেণ্ড। 14. 3 সেকেণ্ড পরে ; 32 $\sqrt{7}$ ফু./সে. বেগে ; অনুভূমিকের নীচের দিকে $\tan^{-1}(\frac{5}{8}\sqrt{3})$ কোণে। 15. 60 $\sqrt{3}$ ফুট ; 2 সেকেণ্ড। 16. 72 ফুট ; 15° ; 75° ; $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ সেকেণ্ড। 17. 4 $\sqrt{205}$ ফু./সে.। 18. 100 ফু./সে ; $\cos^{-1}(\frac{24}{125})$ উন্নতিকোণে। 28. $\{2u^2 \cos\alpha \sin(\alpha-\beta)\}/(g\cos^2\beta)$. 29. $21\frac{1}{3}$ ফুট ; $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ সেকেণ্ড। 30. 256 ফুট ; 4 সেকেণ্ড।

নবম অধ্যায়

সরল সমঞ্জস গতি

(Simple Harmonic Motion)

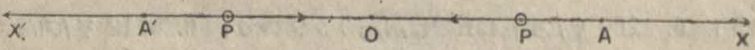
9-1. উপস্থাপন :

সরল সমঞ্জস গতি এক প্রকার দোলন গতি। বিভিন্ন প্রকারের যান্ত্রিক পরিস্থিতিতে ও প্রাকৃতিক অবস্থায় এই জাতীয় গতি সচরাচর পরিলক্ষিত হয়। যেমন, সেতারের তারের গতি এবং ঘড়ির দোলকের গতি সরল সমঞ্জস গতির দৃষ্টান্ত। একটি স্থিতিস্থাপক (elastic) তারের এক প্রান্ত কোথাও যুক্ত করিয়া অপর প্রান্তে একটি বস্তু বাঁধিয়া নীচের দিকে একটুকু টানিয়া ছাড়িয়া দিলে বস্তুটি সরল সমঞ্জস গতি সম্পাদন করিবে।

যদি একটি বস্তু (বা কণা, বা বিন্দু) একটি সরলরেখায় এমনভাবে গতিশীল হয় যে, উহার ত্বরণ সর্ব্বদাই ঐ সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখী এবং যে কোন মুহূর্তে উহার ত্বরণের মান ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার দূরত্বের সমানুপাতিক, তাহা হইলে, উহার গতিকে **সরল সমঞ্জস গতি** বলা হইবে।

9-2. সরল সমঞ্জস গতি নির্ণয় :

মনে করি, m ভরের একটি বস্তু $\overleftrightarrow{X'X}$ সরলরেখায় এমনভাবে গতিশীল যে, উহার ত্বরণ সর্ব্বদাই ঐ সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O অভিমুখী এবং O বিন্দু হইতে বস্তুটির দূরত্বের সমানুপাতিক।



এখন, O কে মূলবিন্দু এবং $\overrightarrow{OX}$ কে x-অক্ষ ধরা যাক্। মনে করি, গতি আরম্ভের t সময় পরে বস্তুটির অবস্থান P এবং $\overline{OP} = |x|$. এই মুহূর্তে বস্তুটির ত্বরণের মান $\mu|x|$, $(\mu > 0)$ এবং তাহা O অভিমুখী।

এখন, O বিন্দুর ডানদিকে P হইলে $\overline{OP} = |x| = x$, $(\because \; x > 0)$, এবং তখন, বস্তুটির ত্বরণ $= \mu x$, এবং তাহা O অভিমুখে ক্রিয়াশীল,

$= \mu x$, এবং তাহা $\overrightarrow{XO}$ বরাবর ক্রিয়াশীল,

$= -\mu x$, এবং তাহা $\overrightarrow{OX}$ বরাবর ক্রিয়াশীল।

কিন্তু, O বিন্দুর বামদিকে P হইলে, $\overline{OP}=|x|=-x$, ($\because$ $x<0$) এবং তখন বস্তুটির ত্বরণ $=-\mu x$, এবং তাহা O অভিমুখে ক্রিয়াশীল,

$=-\mu x$, এবং তাহা $\overrightarrow{X'O}$ বরাবর ক্রিয়াশীল,

$=-\mu x$ এবং তাহা $\overrightarrow{OX}$ বরাবর ক্রিয়াশীল।

সুতরাং, বস্তুটির যে কোন অবস্থান P এর জন্য, যেখানে $OP=|x|$, $\overrightarrow{OX}$ বরাবর বস্তুটির ত্বরণ $=-\mu x$. কিন্তু ত্বরণের সংজ্ঞা থেকে P অবস্থানে $\overrightarrow{OX}$ বরাবর বস্তুটির ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2}$. তাহা হইলে, $P=mf$ সূত্র সাহায্যে, বস্তুটির গতি সমীকরণ :—

$$m(-\mu x)=m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{\mathbf{d^2x}}{\mathbf{dt^2}}=-\mu\mathbf{x}\ ; \qquad \ldots\ldots \qquad (1)$$

$$\text{বা,} \quad v\frac{dv}{dx}=-\mu x, \qquad \ldots\ldots \qquad (2)$$

$$\text{যেখানে, } v=\frac{dx}{dt}.$$

সমাকলন করিয়া (2) হইতে পাই :

$$v^2=C-\mu x^2, \qquad \ldots\ldots \qquad (3)$$

যেখানে, C একটি অস্থায়ী ধ্রুবক।

মনে করা যাক, O বিন্দু হইতে a একক দূরত্বে A অবস্থান হইতে বস্তুটি স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা আরম্ভ করে। তাহা হইলে, $\frac{dx}{dt}=0$, অর্থাৎ $v=0$, এবং $x=a$, যখন $t=0$. সুতরাং (3) হইতে পাই : $0=C-\mu a^2$, বা, $C=\mu a^2$.

$$\therefore \quad \mathbf{v^2}=\mu(\mathbf{a^2-x^2})\ ; \qquad \ldots\ldots \qquad (4)$$

$$\text{বা,} \quad \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}=\pm\sqrt{\mu}\cdot\sqrt{\mathbf{a^2-x^2}}. \qquad \ldots\ldots \qquad (5)$$

(5) হইতে পাই,

$$\mp\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{\mu}dt.$$

ইহাকে সমাকলন করিয়া পাই,

$$\pm \cos^{-1}\frac{x}{a} = \sqrt{\mu}.t + \epsilon. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

(6) হইতে পাই,

$$\frac{x}{a} = \cos\{\pm(\sqrt{\mu}.t + \epsilon)\};$$

$$\text{বা,} \quad x = a\cos(\sqrt{\mu}.t + \epsilon). \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

আবার, যেহেতু, প্রারম্ভিক অবস্থায়, অর্থাৎ $t=0$ তে, $x=a$, অতএব, (7) হইতে পাই : $\cos\epsilon = 1$;

বা, $\epsilon = 2r\pi$, ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots$).

$$\therefore \; \mathbf{x = a} \cos(\sqrt{\mu}.t). \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

(5) হইতে, বস্তুটি যখন A তে, অর্থাৎ. যখন $x=a$, তখন উহার বেগ শূন্য ; কিন্তু (1) হইতে তখন উহার ত্বরণ μa (মানে), এবং ইহাই সর্ব্বোচ্চ ত্বরণ ; এবং ইহা O বিন্দু অভিমুখে ক্রিয়াশীল। সুতরাং, তখন বস্তুটি O বিন্দুর দিকে যাইতে থাকিবে, এবং ফলে উহার বেগ সাংখ্যমানে ক্রমশঃ বাড়িবে। O বিন্দুতে ইহার ত্বরণ শূন্য ; কিন্তু, ইহার বেগ $\sqrt{\mu}.a$ (মানে), যাহা বেগের সর্ব্বোচ্চ মান ; এবং তখন ইহা $\overrightarrow{XO}$ বরাবর ক্রিয়াশীল। ফলে, ইহার ত্বরণ (মানে) বাড়িতে থাকিবে ; কিন্তু, বেগ (মানে) ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে। অবশেষে, বস্তুটি যখন O বিন্দুর বামদিকে A′ এতে পৌছিবে, যেখানে $OA'=a$, তখন উহার বেগ শূন্য হইবে , কিন্তু, তখন ত্বরণ হইবে μa (মানে), যাহা $\overrightarrow{OX}$ বরাবর ক্রিয়াশীল। সুতরাং, বস্তুটি আবার O বিন্দুর দিকে যাত্রা করিবে, এবং ইহার বেগ ক্রমশঃ বাড়িবে, কিন্তু ত্বরণ কমিবে। অতঃপর, বস্তুটি O বিন্দু অতিক্রম করিয়া, $\overrightarrow{OX}$ বরাবর যাইতে থাকিবে, যতক্ষণ না ইহার বেগ শূন্য হয়, অর্থাৎ ইহা Aতে পৌছায়। A তে পৌছিবার পর পূর্বের ন্যায় বস্তুটি O বিন্দুর দিকে যাত্রা আরম্ভ করিবে। এইরূপে, বস্তুটি O বিন্দুর উভয় দিকে $x=a$ এবং $x=-a$ এর মধ্যে দোলনগতি সম্পাদন করিতে থাকিবে।

O বিন্দুর সাপেক্ষে উহার উভয়দিকে a একক দূরত্ব পর্যন্ত বস্তুটির গতি **দোলায়মান (oscillatory).** এইরূপক্ষেত্রে, O বিন্দুকে **গতি-কেন্দ্র** বা **দোলন-কেন্দ্র (centre of oscillation)** বলা হয়।

সরল সমঞ্জস গতিতে দোলায়মান বস্তুটি দোলন-কেন্দ্র হইতে উভয়দিকে যে বৃহত্তম দূরত্ব পর্যন্ত যাইতে পারে, তাহাকে গতির **বিস্তার (Amplitude)** বলা হয়। উপরোক্ত সরল সমঞ্জস গতি : $v^2=\mu(a^2-x^2)$ এতে বিস্তার $=a$ একক। এইরূপ সরল সমঞ্জস গতিতে, বস্তুটির **সর্বাধিক বেগ** $=\sqrt{\mu}a$ (মানে); এবং **সর্বাধিক ত্বরণ** $=\mu a$ (মানে)।

সরল সমঞ্জস গতিতে গতিশীল একটি বস্তু কোন এক অবস্থান হইতে একটি নির্দ্দিষ্ট অভিমুখে যাত্রা আরম্ভ করিয়া সেই অবস্থানে সেই পূর্ব্ব অভিমুখে পুনরায় ফিরিয়া আসিতে যে সময় লাগিবে, তাহাকে গতির **দোলনকাল**, বা, **পর্য্যায়কাল** **(Periodic time, বা, Period of oscillation)** বলা হয়।

(8) হইতে পাই :

$$x=a\cos(\sqrt{\mu}t+2p\pi),\ (p=0, 1, 2, 3,\cdots\cdots)$$

$$=a\cos\sqrt{\mu}\left(\frac{2p\pi}{\sqrt{\mu}}+t\right);\quad\cdots\quad\cdots\quad(9)$$

এবং, $$\frac{dx}{dt}=-a\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}t)$$

$$=-a\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}t+2p\pi),\quad(p=0, 1, 2, 3,\cdots\cdots)$$

$$=-a\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\left(\frac{2p\pi}{\sqrt{\mu}}+t\right).\quad\cdots\quad(10)$$

(9) এবং (10) হইতে দেখা যাইতেছে,

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}},\quad\frac{4\pi}{\sqrt{\mu}},\quad\frac{6\mu}{\sqrt{\mu}},\quad\cdots\quad\cdots$$

সময় অন্তর অন্তর বস্তুটি একই অবস্থানে একই বেগে পূর্বের মত গতিশীল অবস্থায় ফিরিয়া আসে। সুতরাং, বস্তুটির দোলনকাল T হইলে,

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(11)$$

প্রতি একক সময়ে (যেমন এক সেকেণ্ডে) বস্তুটির পূর্ণ দোলনের সংখ্যাকে ঐ দোলনের **কম্পাঙ্ক (Frequency)** বলা হয়। সুতরাং, উপরোক্ত সরল সমঞ্জস গতিতে দোলনের কম্পাঙ্ক n হইলে,

$$\mathbf{nT=1};$$

বা, $$\mathbf{n}=\frac{1}{\mathbf{T}}=\frac{\sqrt{\mu}}{2\pi}.\quad\cdots\quad\cdots\quad(12)$$

9-3. সরল সমঞ্জস গতির সাধারণ আলোচনা :

মনে করি, m ভরের একটি বস্তু $\overleftrightarrow{X'X}$ সরলরেখায় এমনভাবে গতিশীল যে, উহার ত্বরণ সর্ব্বদাই ঐ সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O অভিমুখী এবং O হইতে বস্তুটির দূরত্বের সমানুপাতিক। মনে করি, t সময়ে বস্তুটির অবস্থান P, যেখানে $\overline{OP}=|x|$. তাহা হইলে, বস্তুটির গতি-সমীকরণ :

$$m(-\mu x)=m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad (\mu>0).$$

$$\therefore \quad \frac{\mathbf{d^2x}}{\mathbf{dt^2}}=-\mu\mathbf{x}\,; \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\text{বা,} \quad v\frac{dv}{dx}=-\mu x, \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$\text{যেখানে,} \quad v=\frac{dx}{dt}. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(2) হইতে সমাকলন করিয়া পাই,

$$\mathbf{v^2}=C-\mu x^2=\mu(\mathbf{k^2}-\mathbf{x^2}) \quad \cdots \quad (4)$$

যেখানে, k= অস্থায়ী ধ্রুবক এবং তাহা প্রদত্ত প্রারম্ভিক বেগ হইতে নির্দিষ্ট হইবে।

(4) হইতে পাই,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\mu(k^2-x^2)\,;$$

$$\text{বা,} \quad \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}=\pm\sqrt{\mu}\cdot\sqrt{\mathbf{k^2}-\mathbf{x^2}}\,; \quad \cdots \quad (5)$$

$$\text{বা,} \quad \mp\frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}=\sqrt{\mu}\,dt.$$

ইহাকে সমাকলন করিয়া পাই,

$$\pm\cos^{-1}\frac{x}{k}=\sqrt{\mu}t+\epsilon\,;$$

$$\text{বা,} \quad \frac{x}{k}=\cos\{\pm(\sqrt{\mu}t+\epsilon)\}\,;$$

$$\text{বা,} \quad x=k\cos(\sqrt{\mu}t+\epsilon), \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

যেখানে ϵ= অস্থায়ী ধ্রুবক, এবং যাহার মান প্রারম্ভিক অবস্থান থেকে নির্দিষ্ট হইবে।

(6) হইতে পাই,

$$\mathbf{x}=\mathbf{L}\cos\sqrt{\mu}t+\mathbf{M}\sin\sqrt{\mu}\mathbf{t}, \quad \cdots \quad (7)$$

যেখানে, L এবং M দুইটি ধ্রুবক এবং ইহাদের মান প্রদত্ত প্রারম্ভিক শর্ত হইতে নির্ণয় করা যাইবে। এইরূপ ক্ষেত্রে, O দোলন-কেন্দ্র ; বিস্তার $=k$ একক ; সর্বোচ্চ বেগ $=\sqrt{\mu}k$, (মানে), যখন $x=0$; সর্ব্বোচ্চ ত্বরণ $=\mu k$, (মানে), যখন $x=k$, এবং $x=-k$.

দোলন-কাল : $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ এবং কম্পাঙ্ক $n=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\sqrt{\mu}}{2\pi}$.

দ্রষ্টব্য : $L=k\cos\epsilon$; $M=-k\sin\epsilon$; $k=\sqrt{L^2+M^2}$;

$$\cos\epsilon=L/\sqrt{L^2+M^2}\,;\ \sin\epsilon=-M/\sqrt{L^2+M^2}.$$

9·4. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. সরল সমঞ্জস গতিতে গতিশীল একটি কণার দোলন কেন্দ্র হইতে 3 ফুট দূরত্বে বেগ 8ফু./সে. এবং 4 ফুট দূরত্বে বেগ 6ফু./সে.। কণাটির **সর্বাধিক বেগ, বিস্তার ও দোলন কাল** নির্ণয় কর।

মনে করি, কণাটির গতি-সমীকরণ :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu x,\ (\mu>0)\ ;$$

$$\text{বা,}\quad v\frac{dv}{dx}=-\mu x, \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

যেখানে, $v=\dfrac{dx}{dt}$.

(1) হইতে সমাকলন দ্বারা :

$$v^2=C-\mu x^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

কণাটির গতির বিস্তার a ফুট হইলে,

$$\frac{dx}{dt}=0,\ \text{যখন } x=a.$$

তাহা হইলে, (2) হইতে পাই,

$$0=C-\mu a^2\ ;\ \text{বা, } C=\mu a^2.$$

$$\therefore\quad v^2=\mu(a^2-x^2). \quad \cdots \quad (3)$$

এখন, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$8^2=\mu(a^2-3^2) \text{ এবং } 6^2=\mu(a^2-4^2).$$

$$\therefore \frac{64}{36}=\frac{a^2-9}{a^2-16}$$

বা, $a^2=25$. $\therefore$ $a=5$.

তখন, $8^2=\mu(a^2-3^2)$ হইতে পাই, $\mu=4$.

$\therefore$ সর্বাধিক বেগ $=a\sqrt{\mu}$ ফু./সে.

$=\sqrt{4}\times5$ ফু./সে. $=10$ ফু./সে. ;

বিস্তার $=5$ ফুট ;

দোলন-কাল $=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ সেকেণ্ড $=\pi$ সেকেণ্ড।

উদাহরণ 2. সরল সমঞ্জস গতির অধীন একটি কণার জন্য, দোলন-কেন্দ্র হইতে 5 সে. মি. দূরে উহার বেগ সেকেণ্ডে 1 সে. মি. এবং ইহার পর্য্যায়কাল 11 সেকেণ্ড। কণাটির সর্বাধিক বেগ এবং সর্বাধিক ত্বরণ বাহির কর। [$\pi=22/7$].

মনে করি, কণাটির গতি-সমীকরণ :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu x, (\mu>0) ;$$

$$\text{বা, } v\frac{dv}{dx}=-\mu x. \qquad \cdots \qquad (1)$$

ইহাকে সমাকলন করিয়া পাই,

$$v^2=\mu(a^2-x^2), \qquad \cdots \qquad (2)$$

যেখানে, বিস্তার $=a$ সে. মি.।

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$1^2=\mu(a^2-5^2) ; \text{ বা, } \mu(a^2-25)=1 ;$$

$$\text{এবং } 11=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} ; \text{ বা, } 11\sqrt{\mu}=2\pi.$$

$$\therefore \sqrt{\mu}=4/7 ; a^2=\frac{449}{16} ; \text{ বা, } a\simeq5{\cdot}297$$

$\therefore$ সর্বাধিক বেগ $=\sqrt{\mu}\,a$ সে. মি./সে.

$\simeq3{\cdot}027$ সে. মি./সে. ;

সর্বাধিক ত্বরণ $=\mu a$ সে. মি./সে.^{2}

$\simeq1{\cdot}73$ সে. মি./সে.^{2}।

উদাহরণ 3. সরল সমঞ্জস গতির অধীন একটি কণার গতি-কেন্দ্র হইতে x_1 এবং x_2 দূরত্বে উহার বেগ যথাক্রমে v_1 এবং v_2 হইলে, দেখাও যে উহার পর্যায়কাল

$$2\pi\sqrt{\frac{x_1^2-x_2^2}{v_2^2-v_1^2}}.$$

মনে করি, কণাটির গতি-সমীকরণ—

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu x,\ (\mu>0)$$

$$\text{বা,}\quad v\frac{dv}{dx}=-\mu x. \qquad \cdots \qquad (1)$$

ইহাকে সমাকলন করিয়া পাই,

$$v^2=\mu(a^2-x^2), \qquad \cdots \qquad (2)$$

যেখানে গতির বিস্তার $=a$ একক।

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$v_1^2=\mu(a^2-x_1^2)\ ;\ \text{এবং}\ v_2^2=\mu(a^2-x_2^2).$$

$$\therefore\ v_2^2-v_1^2=\mu(x_1^2-x_2^2).$$

$\therefore$ নির্ণেয় পর্যায়কাল

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}=2\pi\sqrt{\frac{x_1^2-x_2^2}{v_2^2-v_1^2}}.$$

উদাহরণ 4. সরল সমঞ্জস গতিতে চলমান একটি বস্তুর সর্বাধিক বেগ সেকেণ্ডে 10 সেন্টিমিটার। (i) উহার গতি-কেন্দ্র ও সর্বাধিক দূরবর্তী অবস্থানের মধ্যবর্তী স্থানে বেগ এবং (ii) গতি-কেন্দ্র হইতে সর্বাধিক দূরত্বে পৌছিবার মধ্যবর্তী সময়ে বেগ নির্ণয় কর।

বস্তুটির ভর m গ্রাম হইলে উহার গতি সমীকরণ লেখা যাইতে পারে,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-m\mu x,\ (\mu>0)\ ;$$

$$\text{বা,}\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-\mu x \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

সমীকরণ (1) এর সাধারণ সমাধান :

$$x=\text{C}\cos(\sqrt{\mu}t)+\text{D}\sin(\sqrt{\mu}t) \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

যেখানে, C এবং D ধ্রুবক।

মনে করা যাক, বস্তুটি যখন গতি-কেন্দ্রে অবস্থিত তখন $t=0$; সুতরাং, $x=0$ যখন $t=0$. তাহা হইলে, (2) হইতে পাই, $C=0$.

$$\therefore \quad x = D \sin(\sqrt{\mu}t). \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (3)$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = D\sqrt{\mu}\cos(\sqrt{\mu}t). \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (4)$$

প্রদত্ত শর্তাসারে, $\frac{dx}{dt}=10$ যখন $t=0$

$\therefore \quad 10 = D\sqrt{\mu} = a\sqrt{\mu}$ (ধরি)।

তাহা হইলে, $a\sqrt{\mu}=10$; $\qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (5)$

এবং $\qquad x = a\sin(\sqrt{\mu}t). \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (6)$

বস্তুটি দোলন-কেন্দ্র হইতে ডানদিকে যখন সর্বাধিক দূরত্বে যাইবে, তখন $x=a$ হইবে। এখন, $t=t_1$ সময়েতে $x=a$ হইলে, (4) হইতে,

$$a = a\sin(\sqrt{\mu}t_1).$$

$$\therefore \quad \sqrt{\mu}t_1 = \pi/2 \text{ ; বা, } t_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}.$$

তাহা হইলে, $t_1/2$ সময়ে দোলন-কেন্দ্র হইতে বস্তুটির দূরত্ব

$$= a\sin\left(\sqrt{\mu}\times\frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}\right) = a/\sqrt{2} \text{ সে. মি.}$$

বস্তুটির সর্বাধিক বেগ $\sqrt{\mu}a$ সে. মি./সে. বলিয়া প্রদত্ত শর্ত হইতে $\sqrt{\mu}a=10$

$\therefore$ (i) $x=a/2$ তে বেগ v_1 হইলে,

$$v_1 = \sqrt{\mu}\cdot\sqrt{a^2-a^2/4} = \sqrt{\mu}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 5\sqrt{3} \text{ সে. মি./সে.।}$$

(ii) $x=a/\sqrt{2}$ তে বেগ v_2 হইলে,

$$v_2 = \sqrt{\mu}\cdot\sqrt{a^2-a^2/2} = \sqrt{\mu}a/\sqrt{2}$$
$$= 5\sqrt{2} \text{ সে. মি./সে.।}$$

উদাহরণ 5. সরলরেখায় সরল সমঞ্জস গতিতে দোলায়মান একটি কণার পর্যায়কাল 8 সেকেণ্ড এবং বিস্তার 5 সে. মি.। দোলন-কেন্দ্রে আসিবার 1, 4, 13 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ নির্ণয় কর। দোলন-কেন্দ্র হইতে 5/2 সেন্টিমিটার দূরত্বে উহার বেগ কত ?

কণাটির গতি-সমীকরণ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x, \ (\mu>0). \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

ইহার সাধারণ সমাধান,

$$x = \text{L} \cos\sqrt{\mu}t + \text{M} \sin\sqrt{\mu}t, \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

যেখানে, L এবং M ধ্রুবক।

মনে করা যাক্, কণাটি যখন গতি-কেন্দ্রে, তখন $t=0$.

সুতরাং, $x=0$, যখন $t=0$.

তাহা হইলে, (2) হইতে, $\text{L}=0$.

$$\therefore \quad x = \text{M} \sin\sqrt{\mu}t. \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \text{M}\sqrt{\mu} \cos\sqrt{\mu}t \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

কণাটির পর্য্যায়কাল 8 সেকেণ্ড বলিয়া,

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 8 \text{ ; বা, } \sqrt{\mu} = \pi/4. \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

তাহা হইলে, $t=2$ সেকেণ্ডের সময়ে,

$x=5$ সে. মি. ; $\frac{dx}{dt}=0$. তখন, (3) ও (4) হইতে,

$5 = \text{M} \sin 2\sqrt{\mu}$; এবং $0 = \text{M} \cos 2\sqrt{\mu}$.

$\therefore \quad 5^2 = \text{M}^2$; বা, $\text{M}=5$.

$\therefore \quad x = 5 \sin\sqrt{\mu}t$;

$$\text{বা, } x = 5 \sin\frac{\pi}{4}t \text{ ;} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

$$\text{এবং } \frac{dx}{dt} = \frac{5\pi}{4} \cos\frac{\pi}{4}t. \quad \ldots \quad (7)$$

$t=1$ সেকেণ্ড হইলে, $\frac{dx}{dt} = \frac{5\pi}{8}\sqrt{2}$;

$t=4$ সেকেণ্ড হইলে, $\frac{dx}{dt} = -\frac{5\pi}{4}$;

$t=13$ সেকেণ্ড হইলে, $\frac{dx}{dt} = -\frac{5\pi}{8}\sqrt{2}$.

সুতরাং, 1 সেকেণ্ড, 4 সেকেণ্ড, 13 সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ যথাক্রমে $5\pi\sqrt{2}/8$ সে. মি./সে. ; $5\pi/4$ সে. মি./সে. ; $5\pi\sqrt{2}/8$ সে. মি./সে.।

মনে করি, $t=t_1$ সেকেণ্ড সময়ে, $x=5/2$ সে. মি.।

$\therefore\ 5/2=5\sin\frac{\pi t_1}{4}$ $\quad\therefore\ t_1=2/3$ সেকেণ্ড।

$t_1=2/3$ সেকেণ্ড সময়ে, $\frac{dx}{dt}=\frac{5\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi\sqrt{3}}{8}$ সে. মি./সে.

উদাহরণ 6. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার বেগ মূলবিন্দু হইতে x সেন্টিমিটার দূরত্বে v সে. মি./সে., যেখানে, $v^2=45-9x^2+36x$.

দেখাও যে, কণাটির গতি সরল সমঞ্জস। এইরূপ ক্ষেত্রে, গতির বিস্তার ও পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

$$v^2=45-9x^2+36x. \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\therefore\ 2v\frac{dv}{dx}=-18x+36\ ;$$

$$\text{বা,}\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-9(x-2) \qquad \cdots \quad (2)$$

$(x-2)=z$ ধরিলে,

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-9z. \qquad \cdots \quad (3)$$

(3) হইতে দেখা যাইতেছে, কণাটি সরল সমঞ্জস গতিতে গতিশীল, যাহার গতি-কেন্দ্র মূলবিন্দু হইতে ধনাত্মক দিকে 2 সেন্টিমিটার দূরত্বে অবস্থিত; এবং ইহার পর্যায়কাল$=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ সেকেণ্ড$=\frac{2\pi}{\sqrt{9}}$ সেকেণ্ড$=2\pi/3$ সেকেণ্ড।

এখন, (1) হইতে,

$$v^2=-9(x+1)(x-5) \qquad \cdots \quad (4)$$

$\therefore\ v=0$, যখন $x=-1$ এবং $x=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তার$=\frac{1}{2}(1+5)$ সে. মি.$=3$ সে. মি.।

প্রশ্নমালা 11

1. সরল সমঞ্জস গতিশীল একটি কণার বেগ গতি-কেন্দ্রে 10 সে. মি./সে. এবং গতি-কেন্দ্র হইতে 3 সেন্টিমিটার দূরত্বে 8 সে. মি./সে.। কণাটির গতির বিস্তার, দোলনকাল ও সর্বাধিক বেগ নির্ণয় কর এবং কম্পাঙ্ক বাহির কর।

2. সরল সমঞ্জস গতিশীল একটি কণার পর্য্যায়কাল π সেকেণ্ড এবং বিস্তার 10 সে. মি.। ইহার সর্বাধিক বেগ; এবং, গতি-কেন্দ্র হইতে 5 সে. মি. দূরত্বে বেগ নির্ণয় কর।

3. সরল সমঞ্জস গতিশীল একটি বিন্দুর দোলন-কেন্দ্র হইতে সর্বাধিক দূরত্বে ত্বরণ 3 সে. মি./সে.^{2} এবং সর্বাধিক বেগ 6 সে. মি./সে.। ইহার গতির বিস্তার, এবং দোলন-কেন্দ্র হইতে 5 সে. মি. দূরত্বে বেগ নির্ণয় কর।

4. সরল সমঞ্জস দোলনে গতিশীল একটি কণার দোলনকাল 4 সেকেণ্ড। যদি ইহা দোলন-কেন্দ্র হইতে 4 ফুট দূরত্ব থেকে স্থিরাবস্থায় যাত্রা আরম্ভ করে, তবে 2 ফুট যাইতে কত সময় লাগিবে, এবং তখন ইহা কত বেগ অর্জন করিবে?

[W. B. H. S. 1963]

5. কোন এক সরলরেখার উপস্থিত O বিন্দুর উভয় পার্শ্বে একটি বিন্দু সরল সমঞ্জস দোলনগতি সম্পাদনশীল। O বিন্দু হইতে 6 ফুট ও 8 ফুট দূরত্বে উহার বেগ যথাক্রমে সেকেণ্ডে 10 ফুট ও সেকেণ্ডে 8 ফুট হইলে, ঐ সরল দোলনের বিস্তার ও পর্যায়কাল নির্ণয় কর। [W. B. H. S. Comp. 1967]

6. সরলরেখায় সমঞ্জস দোলনগতি সম্পাদনশীল একটি কণার দোলন-কেন্দ্রে বেগ সেকেণ্ডে 4 ফুট এবং দোলনকাল π সেকেণ্ড। যেখানে উহার বেগ শূন্য হইবে, সেখান হইতে 1 ফুট দূরত্বে কণাটির বেগ ও ত্বরণ কত হইবে?

7. সরলরেখায় সমঞ্জস দোলনগতি সম্পাদনশীল একটি বস্তুকণা দোলন-কেন্দ্র হইতে 14 ফুট দূরত্ব থেকে স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করে। ইহার সর্বাধিক বেগ সেকেণ্ডে 22 ফুট হইলে, দোলনকাল, কম্পাঙ্ক এবং কেন্দ্র হইতে 7 ফুট দূরত্বে বেগ বাহির কর।

8. সরলরেখায় সমঞ্জস দোলনগতি সম্পাদনশীল একটি কণার দোলন-কেন্দ্র হইতে x_1, x_2, x_3 দূরত্বে বেগ যথাক্রমে, v_1, v_2, v_3. দেখাও যে,

$$x_1^2(v_2^2-v_3^2)+x_2^2(v_3^2-v_1^2)+x_3^2(v_1^2-v_2^2)=0.$$

[C. U. P. 1975, '72]

9. সরলরেখায় সমঞ্জস দোলনগতি সম্পাদনশীল একটি বস্তুকণার দোলন-কেন্দ্র হইতে x_1, x_2 দূরত্বে বেগ যথাক্রমে, v_1 এবং v_2 ও ত্বরণ যথাক্রমে, f_1 এবং f_2. দেখাও যে,

$$x_2-x_1=\frac{v_1^2-v_2^2}{f_1+f_2}.$$

10. সরলরেখায় সমঞ্জস দোলন-গতি সম্পাদনশীল একটি কণার দোলন-কেন্দ্র হইতে x_1 এবং x_2 দূরত্বে বেগ যথাক্রমে, v_1 এবং v_2. দেখাও যে, ইহার বিস্তার

$$=\sqrt{\frac{v_1^2x_2^2-v_2^2x_1^2}{v_1^2-v_2^2}}.$$

11. কোন একটি সরলরেখার উপরিস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু O থেকে 3 ফুট দূরত্ব হইতে সেকেণ্ডে 8 ফুট বেগে একটি কণা O অভিমুখে প্রক্ষিপ্ত হওয়ায়, উহা O বিন্দুর উভয় পার্শ্বে সরল সমঞ্জস গতিতে চলিতে লাগিল। দোলন-কেন্দ্র হইতে 2 ফুট দূরত্বে ইহার ত্বরণ 8 ফু./সে.^{2} হইলে, দোলনের বিস্তার ও দোলনকাল নির্ণয় কর।

12. সরল সমঞ্জস গতিতে চলমান একটি বস্তুকণার পর্যায়কাল 4 সেকেণ্ড। দোলন-কেন্দ্র হইতে 5 সে. মি. দূরত্বে উহার বেগ শূন্য। **দোলন-কেন্দ্র হইতে** যাত্রার 1, 2, 3, 5 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ কত কত হইবে, এবং কত সময় পরে প্রথমে ইহার বেগ $5\pi/4$ সে. মি./সে. হইবে ?

13. সরলরেখায় গতিশীল একটি বস্তুকণার t সময়ে, ঐ সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে অতিক্রান্ত দূরত্ব $x=a\cos kt+b\sin kt$ দ্বারা প্রদত্ত হইলে, দেখাও যে, কণাটি সরল সমঞ্জস দোলনগতি সম্পাদন করে।

$a=5, b=12, k=4$ হইলে, কণাটির পর্যায়কাল, বিস্তার, সর্বাধিক বেগ ও সর্বাধিক ত্বরণ নির্ণয় কর। [C. U. P. 1971]

14. সরলরেখায় সরল সমঞ্জস দোলনগতি সম্পাদনশীল একটি বস্তুকণাকে দোলন-কেন্দ্র হইতে যাত্রা করার পর n-তম, $(n+1)$-তম ও $(n+2)$-তম সেকেণ্ডে যথাক্রমে a, b, c ফুট দূরত্বে দেখা গেল। প্রমাণ কর যে, ইহার গতির পর্যায়কাল

$$=2\pi/\cos^{-1}\left(\frac{a+c}{2b}\right) \text{ সেকেণ্ড।}$$

[C. U. P. 1973]

15. সরলরেখায় গতিশীল একটি বস্তুকণার বেগ মূলবিন্দু হইতে x সেন্টিমিটার দূরত্বে v সে. মি./সে, যেখানে $v^2=27+18x-9x^2$। দেখাও যে, কণাটির গতি সরল সমঞ্জস। এইরূপ ক্ষেত্রে, গতির বিস্তার, সর্বাধিক বেগ ও কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

16. একটি অনুভূমিক তাক উল্লম্বদিকে সরল সমঞ্জস দোলন-গতিতে চলমান, যেখানে উহার দোলন-কাল t সেকেণ্ড। প্রমাণ কর যে, ঐ তাকের উপর রাখা একটি বস্তু সর্বদা তাকের সংস্পর্শে থাকিবে, যদি ইহার গতির সর্বাধিক বিস্তার $gt^2/(4\pi^2)$ ফুট অপেক্ষা কম হয়। **[C. U. P. 1976]**

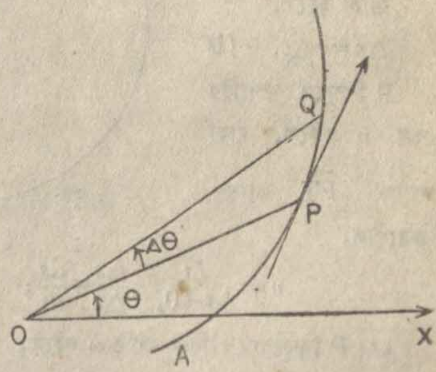
ANSWERS (প্রশ্নমালা 11)

1. 5 সে. মি. ; π সেকেণ্ড ; 10 সে. মি./সে. ; $1/\pi$. 2. 20 সে. মি./সে. ; $10\sqrt{3}$ সে. মি./সে.। 3. 12 সে. মি. ; $5\frac{5}{11}$ সে. মি./সে. (প্রায়)। 4. 2/3 সে. ; $\pi\sqrt{3}$ ফু./সে.। 5. $10\frac{2}{3}$ ফুট ; $\frac{2\pi}{3}\sqrt{7}$ সেকেণ্ড। 6. $2\sqrt{3}$ ফু./সে. ; 4 ফু./সে.^{2}। 7. 4 সেকেণ্ড ; 1/4 ; $11\sqrt{3}$ ফু./সে.। 11. 5 ফুট ; π সেকেণ্ড। 12. বেগ-গুলি : 0 ; $5\pi/2$; 0 ; 0 সে. মি./সে ; 2/3 সেকেণ্ড পরে। 13. $\pi/2$ সেকেণ্ড ; 13 একক ; 52 একক ; 208 একক। 15. 2 সে. মি. ; 6 সে. মি./সে. ; $\frac{3}{2\pi}$.

পরিশিষ্ট 1

A-1. কৌণিক দ্রুতি (Angular Speed) :

মনে করি, একটি কণা (বা, বিন্দু) কোন এক সমতলে গতিশীল এবং ঐ সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও $\overrightarrow{OX}$ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।



মনে করি, t সময়ে কণাটি P বিন্দুতে অবস্থিত, যেখানে, $\angle XOP = \theta$ রেডিয়ান্। তখন, t-এর সাপেক্ষে θ-এর পরিবর্তন হারকে কণাটির কৌণিক দ্রুতি বলা হয় এবং ইহাকে ω দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\therefore \quad \omega = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta}.$$

কোন নির্দিষ্ট অবকাশে, সমান সমান সময়ে (তাহা যতই ক্ষুদ্র হইক না কেন) t-এর সাপেক্ষে θ-এর পরিবর্তন হার সমান সমান হইলে, তখন ঐ অবকাশে O বিন্দুর সাপেক্ষে কণাটির কৌণিক দ্রুতিকে **কৌণিক সমদ্রুতি (Uniform angular speed)** বলা হইবে।

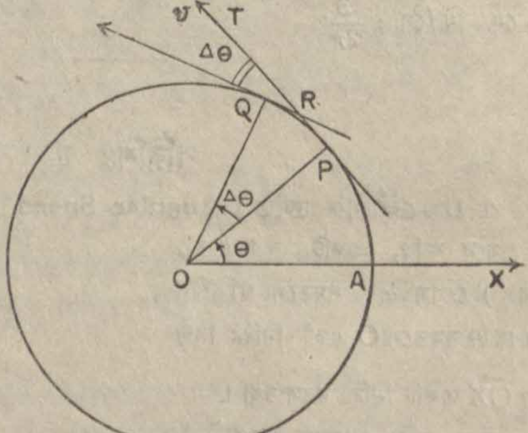
মন্তব্য: কৌণিক দ্রুতির একক: সেকেণ্ডে এক রেডিয়ান্।

দ্রষ্টব্য: t-এর সাপেক্ষে $\omega\left(=\frac{d\theta}{dt}\right)$-এর পরিবর্তন হারকে কৌণিক ত্বরণ বলা হয়।

$$\therefore \text{ কৌণিক ত্বরণ}=\underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}\equiv\ddot{\theta}.$$

A-2. বৃত্তপথে একটি কণার গতি নির্ণয়:

মনে করি, একটি কণা r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তপথে গতিশীল। ঐ বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\overrightarrow{OX}$ বৃত্তকে A বিন্দুতে ছেদ করে। t সময়ে কণাটি P বিন্দুতে এবং $t+\Delta t$ সময়ে উহা Q বিন্দুতে অবস্থিত, যেখানে, চাপ $\widehat{AP}=s$; চাপ $\widehat{PQ}=\Delta s$; $\angle AOP=\theta$ রেডিয়ান্; $\angle POQ=\Delta\theta$ রেডিয়ান্।



তাহা হইলে,

$\Delta s=r\Delta\theta.$ ...(1)

P বিন্দুতে কণাটির বেগ v হইলে, যাহা স্পর্শক $\overrightarrow{PT}$ বরাবর ক্রিয়াশীল,

$$v=\underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}; \qquad \cdots \quad (2)$$

এবং P বিন্দুতে কৌণিক দ্রুতি ω হইলে,

$$\omega=\underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\underset{\Delta t\to 0}{Lt}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)=\frac{v}{r};$$

অর্থাৎ, $\omega=\frac{v}{r}.$ ... (3)

কণাটি বৃত্তপথে সমদ্রুতি v-এতে গতিশীল হইলে, ω ধ্রুবক থাকিবে।

মনে করি, P এতে কণাটির ত্বরণের উপাংশ স্পর্শক $\overrightarrow{PT}$ বরাবর f_T (মানে) এবং অভিলম্ব $\overrightarrow{PO}$ বরাবর f_N (মানে)।

কণাটি সমদ্রুতি v এতে ঐ বৃত্তপথে গতিশীল হইলে, P এতে দ্রুতির পরিমাণ v এবং তাহা $\overrightarrow{PT}$ স্পর্শক বরাবর ক্রিয়াশীল ; আবার, Q এতে দ্রুতির পরিমাণ v এবং তাহা Q এতে স্পর্শক $\overrightarrow{RQ}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইবে।

কণাটি বৃত্তপথে সমদ্রুতিতে গতিশীল হইলে,

$$r\Delta\theta = \Delta s = v\Delta t. \qquad \cdots \qquad (3)$$

তখন, $f_T = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \dfrac{v\cos\Delta\theta - v}{\Delta t}$

$$= \frac{v^2}{r} \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\cos\Delta\theta - 1}{\Delta\theta}, \text{ [(3) হইতে]}$$

$$= -\frac{v^2}{r} \underset{\alpha \to 0}{Lt} \frac{1-\cos 2\alpha}{2\alpha}, \text{ [} \Delta\theta = 2\alpha \text{]}$$

$$= -\frac{v^2}{r} \underset{\alpha \to 0}{Lt} \frac{2\sin^2\alpha}{2\alpha},$$

$$= -\frac{v^2}{r} \times \underset{\alpha \to 0}{Lt} \left\{ \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \alpha \right\}$$

$$= -\frac{v^2}{r} \times \{1 \times 1 \times 0\} = 0.$$

$$\therefore \quad f_T = 0. \qquad \cdots \qquad (4)$$

আবার, $f_N = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \dfrac{v\sin\Delta\theta}{\Delta t}$

$$= \frac{v^2}{r} \underset{\Delta\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}, \text{ [(3) হইতে]}$$

$$= \frac{v^2}{r} \times 1.$$

$$\therefore \quad f_N = \frac{v^2}{r}. \qquad \cdots \qquad (5)$$

সুতরাং, বৃত্তপথে সমদ্রুতিতে গতিশীল কণার ত্বরণের মান v^2/r (মানে) যাহা ধ্রুবক এবং যাহা অভিলম্ব বরাবর বৃত্তের কেন্দ্রাভিমুখে সর্বদা ক্রিয়াশীল।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

মনে করা যাক, r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তপথে কণাটি **অসমদ্রুতিতে** গতিশীল। এইরূপ ক্ষেত্রে, t সময়ে P এতে কণাটির বেগ v হইলে, যাহা স্পর্শক $\overrightarrow{PT}$ বরাবর ক্রিয়াশীল,

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}; \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$\omega = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{v}{r}. \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

কণাটি বৃত্তপথে অসমদ্রুতিতে গতিশীল হইলে, ω ধ্রুবক থাকিবে না।

মনে করা যাক, কণাটির বেগ Pএতে v, যাহা $\overrightarrow{PT}$ স্পর্শক বরাবর ক্রিয়াশীল এবং উহা Q এতে $v + \Delta v$, যাহা Q এতে স্পর্শক $\overrightarrow{RQ}$ বরাবর ক্রিয়াশীল। তখন,

$$f_T = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{(v+\Delta v)\cos\Delta\theta - v}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \left\{\frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \cos\Delta\theta + \frac{(\cos\Delta\theta - 1)v}{\Delta t}\right\}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta v}{\Delta t} \times \underset{\Delta \theta \to 0,}{\text{Lt}} \cos\Delta\theta$$

$$- \frac{v}{2} \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \left\{\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\theta}{\frac{1}{2}\Delta\theta}\right)^2 \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot \Delta\theta\right\}$$

$$= \frac{dv}{dt} \times 1 - \frac{v}{2} \times 1^2 \times \omega \times 0 = \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \quad \mathbf{f}_T = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d^2 s}}{\mathbf{dt^2}} \equiv \ddot{s}. \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

আবার, $f_N = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \dfrac{(v+\Delta v)\sin\Delta\theta}{\Delta t}$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \left\{(v+\Delta v) \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right\}$$

$$= v \times 1 \times \omega = v^2/r.$$

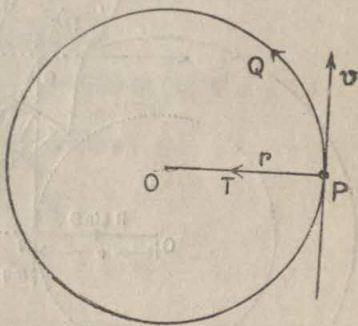
$$\therefore \quad f_N = \frac{v^2}{r}. \quad \ldots \quad \text{(iv)}$$

দ্রষ্টব্য : (i) $v = \omega r$, (ii) $f_N = \omega^2 r$.

A-3. অভিকেন্দ্র বা কেন্দ্রাভিমুখী বল (Centripetal force) :

যখন কোন বস্তু (বা, কণা) একটি নির্দিষ্ট বৃত্তাকার পথে ঘুরিতে থাকে, তখন ঐ বৃত্তের কেন্দ্র অভিমুখে বস্তুর উপর যে বল ক্রিয়া করে তাহাকে **অভিকেন্দ্র** বল বলে।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, m ভরের একটি বস্তু r দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট দড়ির এক প্রান্তে বাঁধিয়া অনুভূমিক প্রতিরোধহীন মসৃণ বৃত্তাকারপথে দড়ির অপর প্রান্ত ধরিয়া ঘুরাইতে থাকিলে, দড়িতে যে টান T হইবে, তাহাই অভিকেন্দ্র বল। সুতরাং, বস্তুর বেগ v হইলে, যাহা বৃত্তের স্পর্শক বরাবর ক্রিয়াশীল, $\mathbf{T=mv^2/r}$.



দ্রষ্টব্য : প্রত্যেক ক্রিয়ার একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া থাকে। বস্তুটি বৃত্তাকার পথে ঘুরিবার সময় হাতে দড়ির টান অনুভব করা যাইবে, যেন বস্তুটি একটি বল দ্বারা হাতকে দড়ি বরাবর কেন্দ্র হইতে বাহিরের দিকে টানিতেছে।

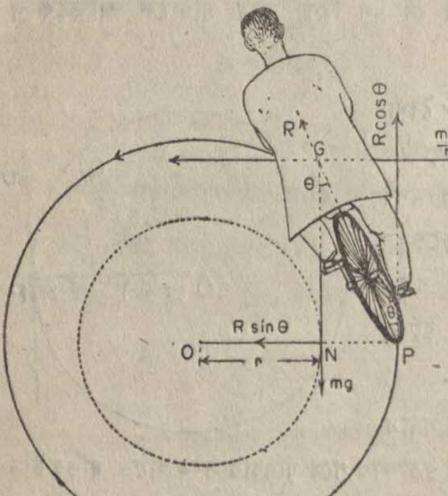
কোন বস্তু (বা, কণা) বৃত্তাকার পথে ঘুরিতে থাকিলে, কেন্দ্রের বহির্মুখে যে বল প্রতীয়মান হয় এবং যাহা বাস্তবিক পক্ষে অভিকেন্দ্র বলের সমান ও বিপরীত, তাহাকে **অপকেন্দ্র, বা, কেন্দ্র-বহির্মুখী বল (Centrifugal force)** বলা হয়। সত্যি সত্যি বস্তুটি কেন্দ্র বহির্মুখে চলিয়া যাইতে চায় না। তাহার প্রমাণ, বৃত্তাকার পথে বস্তুটি ঘুরিবার সময় যদি হঠাৎ দড়িটি ছিঁড়িয়া যায়, তবে সেই মুহূর্তে বস্তুটি বৃত্তের স্পর্শক বরাবর সরলরেখায় ছুটিয়া চলিবে। দড়িটি ছিঁড়িয়া যাওয়ার সঙ্গে সঙ্গে অভিকেন্দ্র বল (ক্রিয়া) থাকে না ; ফলে অপকেন্দ্র বলও (প্রতিক্রিয়া) থাকে না।

মন্তব্য : একটি বস্তু নিয়ত (Steadily) বৃত্তাকার পথে v বেগে ঘুরিতে থাকিলে, এবং সেকেণ্ডে n সংখ্যক আবর্তন করিলে, আর উহার কৌণিক সমবেগ ω হইলে, $\omega\times\frac{1}{n}=2\pi$; বা, $\omega=2\pi n$.

আবার, $\omega=v/r$. $\therefore\ v=\omega r=2\pi nr$.

A-4. বৃত্তপথে সাইকেল-আরোহীর গতি :

মনে করি, একজন সাইকেল-আরোহীর (যন্ত্র এবং আরোহীর) ভরকেন্দ্র r ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তাকার পথে কৌণিক সমবেগে ঘুরিতেছে (চিত্রে $\overline{ON}=r$) এবং আরোহীর নিয়ত বেগ v; সাইকেলসহ আরোহীর ভার mg. উহার উপর পথের লব্ধি প্রতিক্রিয়া R হইলে এবং তাহা উল্লম্ব দিকের সহিত θ কোণ করিলে, যে কোন মুহূর্তে,



$$R \cos \theta = mg ;$$

$$R \sin \theta = \frac{mv^2}{r}.$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{v^2}{rg}.$$

A-5. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. 5 পাউণ্ড-ভরের একটি প্রস্তরখণ্ড 10 ফুট দীর্ঘ একটি হাল্কা অবিস্তার্য দড়ির এক প্রান্তে বাঁধিয়া হাত দিয়া দড়ির অপর প্রান্ত ধরিয়া প্রস্তরখণ্ডটি একটি মসৃণ টেবিলের উপর রাখিয়া বৃত্তকার পথে ঘুরানো হইতে থাকিল। প্রস্তরখণ্ডটি দড়ি বরাবর অনুভূমিকতলে ঘুরিতে থাকিলে এবং দড়িটি সর্বোচ্চ টান 4 পাউণ্ড ভরের বেশী সহ্য করিতে না পারিলে, উহা সর্বোচ্চ কত বেগে ঐ ভাবে ঘুরিতে পারিবে এবং তখন প্রতি মিনিটে উহার পূর্ণ আবর্তন কত হইবে ?

মনে করি, সর্বোচ্চ বেগ $= v$ ফুট/সে.

তখন, উহার অপকেন্দ্র বল $= \frac{5 \times v^2}{10}$ পাউণ্ড্যাল্।

দড়ির সর্বোচ্চ টান $= 4$ পাউণ্ড ভার $= 4 \times 32$ পাউণ্ড্যাল্ এবং ইহা কেন্দ্রাভিমুখে ক্রিয়াশীল। সুতরাং, প্রস্তরখণ্ডটির নিয়ত গতিকালে,

$$4 \times 32 \geqslant \frac{5 \times v^2}{10} \; ; \text{ বা, } v \leq 16.$$

সুতরাং, প্রস্তরখণ্ডের সর্বোচ্চ বেগ = **16 ফুট/সে.**।

সুতরাং, সেকেণ্ডে প্রস্তরখণ্ডের আবর্তন সংখ্যা :

$$n=\frac{v}{2\pi r}=\frac{16}{2\pi\times 10}$$

সুতরাং, মিনিটে প্রস্তরখণ্ডের আবর্তন সংখ্যা $=\frac{16\times 60}{2\pi\times 10}\simeq\frac{48}{3\cdot 1416}=$ **15** (প্রায়)।

উদাহরণ 2. একজন সাইকেল-আরোহী 100 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তাকার পথে কত বেগে নিয়ত ঘুরিতে থাকিলে, উল্লম্ব দিকের সহিত তাহাকে 30° কোণে আনত থাকিতে হইবে? [$g=980$ সে.মি./সে.^{2}]।

$\tan\theta=\frac{v^2}{gr}$ সূত্রে, $\theta=30^\circ$; $g=980$ সে মি./সে^{2} ;

$r=100$ মিটার $=10^4$ সেন্টিমিটার।

$$\therefore\ v^2=gr\tan\theta=980\times 10^4\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=98\times 10^5\times\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\simeq 98\times 10^5\times\frac{1\cdot 73205}{3}$$

$$=98\times 10^5\times 0\cdot 57735$$

$$=10^4\times 98\times 5\cdot 7735$$

$$\therefore\ v=10^2\times\sqrt{98\times 5\cdot 7735}$$

$$=10^2\times 23\cdot 7866$$

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ $=23\cdot 7866$ মিটার/সেকেণ্ড।

প্রশ্নমালা 12 (A).

1. 1225 গ্রাম ভরের একটি বস্তু 10 মিটার দীর্ঘ একটি দড়ির একপ্রান্তে থাকিয়া অনুভূমিক বৃত্তপথে নিয়ত 20 সে. মি./সে. বেগে ঘুরিতেছে। দড়িটির অপর প্রান্ত স্থির থাকিলে, দড়ির টান এবং প্রতি মিনিটে বস্তুটি কতবার পূর্ণ আবর্তন করিবে, তাহা নির্ণয় কর। ($\pi=3\cdot 1416$).

2. 4 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু 10 ফুট দীর্ঘ একটি হাল্কা অবিস্তার্য দড়ির সাহায্যে দড়ি বরাবর অনুভূমিক তলে বৃত্তাকার পথে আবর্তন করিতে থাকিলে, উহার সর্বোচ্চ বেগ কি হইতে পারে এবং তখন প্রতি মিনিটে উহা কতবার পূর্ণ আবর্তন করিবে, যদি দড়ির সর্বাধিক সহশক্তি 5 পাউণ্ড-ভার হয়?

3. কোন একজন সাইকেল-আরোহী 100 গজ ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে $40(3-\sqrt{3})$ ফুট/সে. বেগে ঘুরিতে থাকিলে, উল্লম্বদিকের সহিত সে কত কোণে আনত আছে ?

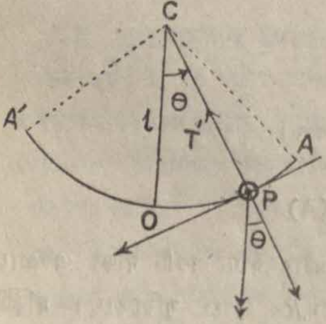
4. একজন সাইকেল আরোহী একটি বৃত্তাকার পথে সেকেণ্ডে 12 মিটার বেগে উল্লম্বদিকের সহিত 15° কোণে ঘুরিতে থাকিলে, ঐ বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ কত ? [$g=980$ সে. মি./সে.^{2}] ।

ANSWERS. [প্রশ্নমালা 12(A)].

1. 0·5 গ্রাম-ভার ; 0·19 বার (প্রায়)। 2. 20 ফু./সে. ; 19 বার (প্রায়)। 3. 15°. 4. 54·86 মিটার (প্রায়)।

A-6. সরল দোলক (Simple pendulum)-এর গতি নির্ণয় :

মনে করি, এক-খণ্ড হাল্কা অবিস্তার্য দড়ির এক প্রান্ত একটি স্থির বিন্দুতে নিবদ্ধ এবং অপর প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু বাঁধিয়া মুক্তভাবে উল্লম্ব অবস্থায় ঝুলানো আছে। এইরূপ ক্ষেত্রে, একটি উল্লম্বতলে বস্তুটি দোলায়মান হইলে, ইহাকে **সরল দোলক** বলা হইবে।



মনে করি, স্থিরবিন্দু C ; দড়ির দৈর্ঘ্য $=l$; বস্তুর ভর $=m$: যেখানে, $\overline{CO}=l$, $\overline{CO}$ উল্লম্বভাবে অবস্থিত এবং বস্তুটি দড়ির O বিন্দুতে বাঁধা আছে।

মনে করি, দোলকটি CA′A উল্লম্বতলে দোলায়মান এবং t সময়ে উহা P বিন্দুতে অবস্থিত, যেখানে $\angle OCP=\theta$ রেডিয়ান এবং θ অতীব ক্ষুদ্র। এক্ষণে, বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বলগুলি হইল : (*i*) দড়ির টান T', $\overrightarrow{PC}$ বরাবর ; এবং (*ii*) উল্লম্বভাবে নিম্নদিকে বস্তুটির ভার mg.

θ অতিশয় ক্ষুদ্র বলিয়া, বস্তুটির গতি সর্বদাই A′OA বৃত্তচাপের P এতে স্পর্শক বরাবর। সুতরাং, চাপ $\overset{\frown}{OP}=s$ হইলে, বস্তুটির স্পর্শক বরাবর গতি সমীকরণ :—

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\sin\theta\,; \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (A)$$

এবং $\overrightarrow{PC}$ বরাবর গতি-সমীকরণ : $m\frac{v^2}{l}=T'-mg\cos\theta$; ··· (B)

যেখানে, $v=\frac{ds}{dt}=l\frac{d\theta}{dt}$. এখন, (A) হইতে পাই :

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g\sin\theta. \quad \cdots \quad (1)$$

কিন্তু, $s=l\theta$ বলিয়া, $\frac{d^2s}{dt^2}=l\frac{d^2\theta}{dt^2}$,

এবং θ এর মান অতীব ক্ষুদ্র ও রেডিয়ানে প্রকাশিত বলিয়া, $\sin\theta \simeq \theta$.

সুতরাং, এইরূপ ক্ষেত্রে, (1) হইতে পাই,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$\text{বা,} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}=-\mu\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

যেখানে, $\mu=g/l>0$.

সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে, সরল দোলকের গতি সরল সমঞ্জস গতি। এখন, সরল দোলকের দোলন-কাল T হইলে,

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}=2\pi\sqrt{l/g}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

মন্তব্য : (i). সরল দোলকের দোলনকাল উহার দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সহিত সরলভেদে এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ g এর বর্গমূলের সহিত ব্যস্তভেদে থাকে।

g এর মান একই থাকিলে, অর্থাৎ একটি নির্দিষ্ট স্থানে একটি ঘড়ি দ্রুত যাইবে যদি উহার দোলকের দৈর্ঘ্য কমানো হয়, এবং মন্দ যাইবে যদি দোলকের দৈর্ঘ্য বাড়ানো হয়।

আবার, দোলকের দৈর্ঘ্য একই থাকিলে, বিভিন্ন অবস্থানে অর্থাৎ g এর মান বৃদ্ধি বা হ্রাস পাইলে, ঘড়িটি যথাক্রমে দ্রুত বা মন্দ যাইবে।

(ii) l দৈর্ঘ্যযুক্ত দোলকের দোলনকাল কোন একস্থানে জানা থাকিলে, সেই স্থানের g এর মান জানা যাইবে, অর্থাৎ, l এবং T নির্দিষ্ট হইলে,

$T=2\pi\sqrt{l/g}$ হইতে, $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$ জানা যাইবে।

(iii) যে দোলকের দোলনকাল 2 সেকেণ্ড, অর্থাৎ, স্থিরাবস্থা হইতে স্থিরাবস্থায় যাইতে 1 সেকেণ্ড সময় লাগে, তাহাকে সেকেণ্ড-দোলক বলা হইবে। একটি সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য l হইলে, $2=2\pi\sqrt{l/g}$, বা, $g=l\pi^2$.

সুতরাং, যে স্থানে $g=980$ সে. মি./সে.^{2}, সেই স্থানে সেকেণ্ড দোলকের দৈর্ঘ্য $l=99{\cdot}295$ সে. মি. (প্রায়)।

A-7. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. একটি ঘড়ির দোলকের দৈর্ঘ্য 0·814 ফুট এবং উহা দিনে 30 সেকেণ্ড দ্রুত যায়। উহার দোলকের দৈর্ঘ্যের কিরূপ পরিবর্তন করিলে, উহা সঠিক সময় দিবে?

যে ঘড়ি সঠিক সময় দেয়, তাহা গড় সৌর দিনমানে $24\times60\times60$, অর্থাৎ, 86400 সেকেণ্ড নির্দেশ করে।

ঐ ঘড়িটি দিনে 30 সেকেণ্ড দ্রুত গেলে, তখন, উহা গড় সৌর দিনমানে $86400+30$, অর্থাৎ, 86430 সেকেণ্ড নির্দেশ করিবে।

তাহা হইলে, ত্রুটিপূর্ণ ঘড়িটির দোলক $\dfrac{86400}{86430}$ সেকেণ্ডে একটি স্পন্দন (beat) নির্দেশ করে।

মনে করি, l_o ফুট $=0{\cdot}814$ ফুট এবং প্রদত্ত ঘড়ির জন্য দোলকের দৈর্ঘ্য l ফুট হইলে, সঠিক সময় নির্দেশ করিবে। তাহা হইলে,

$$\pi\sqrt{\frac{l_o}{g}}=\frac{86400}{86430}\,;\quad \pi\sqrt{\frac{l}{g}}=1,$$

যেখানে, ঐ স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণ $=g$ ফুট/সেকেণ্ড^2।

$$\text{সুতরাং,}\quad \sqrt{\frac{l}{l_o}}=\sqrt{\frac{l}{0{\cdot}814}}=\frac{86430}{86400}=1+\frac{1}{2880}\,;$$

$$\therefore\ \frac{l}{l_o}=\left(1+\frac{1}{2880}\right)^2=1+\frac{1}{1440},\ \text{(প্রায়)।}$$

$$\therefore\ l-l_o\simeq\frac{l_o}{1440}=\frac{0{\cdot}814}{1440}=0{\cdot}0005653\,;$$

$$\text{বা,}\quad l=l_o+0{\cdot}0005653.$$

এখন, $\because$ 0·00056528 ফুট $=$ 0·00678336 ইঞ্চি,

সুতরাং, দোলকের দৈর্ঘ্য 0·006783, বা, 1/147 ইঞ্চি (প্রায়) বাড়াইতে হইবে।

উদাহরণ 2. একটি সেকেণ্ড দোলকের দৈর্ঘ্য উহার দৈর্ঘ্যের 0·01 গুণ বাড়াইলে ঘড়িটি প্রতিদিন কত সেকেণ্ড মন্দ যাইবে ?

মনে করি, দোলকের দৈর্ঘ্য প্রথম ছিল l এবং দোলনকাল T সেকেণ্ড, যেখানে $T=2$ এবং $l_1=l+0\cdot01\times l$ হইলে, দোলনকাল T_1 সেকেণ্ড। তাহা হইলে,

$$T=2\pi\sqrt{l/g}\text{ ; এবং } T_1=2\pi\sqrt{l_1/g}$$

$$\therefore\quad T_1/T=\sqrt{l_1/l}=\sqrt{(1+0\cdot01)}=1\cdot005\text{ (প্রায়)}$$

$$\therefore\quad T_1\simeq1\cdot005\times T=1\cdot005\times2=2\cdot01.$$

সুতরাং, দোলকের দৈর্ঘ্য বাড়ানোর জন্য ঘড়িটি প্রতি দুই সেকেণ্ডে 0·01 সেকেণ্ড মন্দ যাইবে।

সুতরাং, ঘড়িটি 1 দিনে অর্থাৎ 86400 সেকেণ্ডে $\frac{0\cdot01}{2}\times86400$ সেকেণ্ড, অর্থাৎ, প্রায় $7\frac{1}{5}$ মিনিট মন্দ যাইবে।

উদাহরণ 3. একটি ঘড়ি ভূপৃষ্ঠে সঠিক সময় দেয়। উহা একটি উচ্চ পাহাড়ের শীর্ষে দিনে এক মিনিট মন্দ গেলে, পাহাড়ের উচ্চতা কত ? [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ =3960 মাইল]।

মনে করি, পাহাড়ের উচ্চতা $=h$ মাইল এবং একই এককে ভূপৃষ্ঠে ও পাহাড়ের শীর্ষে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান যথাক্রমে g এবং g_1.

তাহা হইলে, $\frac{g}{g_1}=\left(\frac{3960+h}{3960}\right)^2$;

$$2=2\pi\sqrt{l/g}\ ;\quad 2\times\frac{86400}{86340}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}\ ;$$

যেখানে, সেকেণ্ড দোলকের দৈর্ঘ্য $=l$ ফুট।

$$\therefore\quad \frac{8640}{8634}=\sqrt{\frac{g}{g_1}}=\frac{3960+h}{3960}$$

$$\therefore\quad h=3960\times\left(\frac{8640}{8634}-1\right)$$

$$=\frac{3960}{1439}\text{ মাইল}=2\cdot752\text{ মাইল (প্রায়)।}$$

প্রশ্নমালা 12 (B)

1. একটি ঘড়ির দোলকের দৈর্ঘ্য 3·25 ফুট এবং তাহা কোন এক স্থানে দিনে 2 মিনিট দ্রুত যায়। দোলকের দৈর্ঘ্যের কি পরিবর্তন করিলে, ঘড়িটি ঐ স্থানে সঠিক সময় দিবে ?

2. একটি ঘড়ি দিনে 1 মিনিট দ্রুত যায়। উহার দোলকের দৈর্ঘ্যের কি পরিবর্তন করিলে, ঘড়িটি সঠিক সময় দিবে ?

3. একটি সঠিক ঘড়ির দোলকের দৈর্ঘ্য উহার দৈর্ঘ্যের 0·005 অংশ কমাইলে, ঘড়িটি প্রতিদিন কত মিনিট দ্রুত যাইবে ?

4. একটি ঘড়ি দিনে 2 মিনিট মন্দ যায়। উহার দোলকের দৈর্ঘ্যের কি পরিবর্তন করিলে, উহা সঠিক সময় দিবে ?

5. একটি সেকেণ্ড দোলকের দৈর্ঘ্য উহার দৈর্ঘ্যের $\frac{1}{300}$ অংশ বাড়াইলে ঘড়িটি প্রতিদিন কত মিনিট মন্দ যাইবে ?

6. কোন এক স্থানে একটি সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য 100 সে. মি. ; ঐ স্থানে g এর মান কত ?

7. একটি ঘড়ি ভূপৃষ্ঠে প্রতিদিন 1 মিনিট দ্রুত যায়। ভূ-পৃষ্ঠ হইতে কত উচ্চতায় উহা সঠিক সময় দিবে ? [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ=3960 মাইল]।

8. যে ঘড়ি ভূপৃষ্ঠে সঠিক সময় দেয়, একটি পাহাড়ের শীর্ষে তাহা দিনে 30 সেকেণ্ড মন্দ যায়। পাহাড়ের উচ্চতা কত ? [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ=3960 মাইল]।

9. সমুদ্রপৃষ্ঠে একটি ঘড়ি সঠিক সময় দেয়। সমুদ্র-পৃষ্ঠ হইতে 2 মাইল উচ্চতায় ইহাকে নিয়ে যাওয়ার পরে, দোলকের দৈর্ঘ্যের কিরূপ পরিবর্তন করিলে, ইহা সঠিক সময় দিবে ? [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ=3960 মাইল]।

10. l দৈর্ঘ্যের একটি দোলক যে সময়ে n সংখ্যক দোলন দেয়, উহার দৈর্ঘ্য ϵ বৃদ্ধি পাইলে, ঐ সময়ে উহা $n\epsilon/(2l)$ সংখ্যক দোলন কম দেয়—তাহা প্রমাণ কর।

ANSWERS [প্রশ্নমালা 12 (B)]

1. প্রায় 0·108 ইঞ্চি বাড়াইতে হইবে। 2. প্রদত্ত দৈর্ঘ্যের প্রায় 1/720 অংশ বাড়াইতে হইবে। 3. প্রায় 3·6 মিনিট দ্রুত যাইবে। 4. প্রদত্ত দৈর্ঘ্যের প্রায় $\frac{1}{360}$ অংশ কমাইতে হইবে। 5. প্রায় 2·4 মিনিট মন্দ যাইবে। 6. 986·96 সে. মি/সে.^{2} (প্রায়)। 7. 2·75 মাইল। 8. 1·3755 মাইল (প্রায়)। 9. প্রায় $\frac{1}{990}$ অংশ কমাইতে হইবে।

স্থিতিবিদ্যা

স্থিতিবিদ্যা

(STATICS)

উপক্রমণিকা

0-1. আলোচনা :

আমরা গতিবিদ্যায় বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তন দ্বারাই বলের অস্তিত্ব আলোচনা করিয়াছি, এবং যে নিরবচ্ছিন্ন বলের প্রভাবে m ভরের বস্তুতে ত্বরণ f উৎপন্ন হয়, তাহার পরিমাপ যে mf হইবে তাহাও পূর্ব্বে আলোচনা করিয়াছি। যে বস্তুর ত্বরণ আছে কেবলমাত্র তাহাই বলের অধীন, কিন্তু, যে বস্তু সমবেগে গতিশীল, অথবা, স্থির আছে তাহা কোন বলের অধীন নহে, এমন কথা বলা যায়না। যাহা বস্তুর স্থিরাবস্থা বা গতির পরিবর্ত্তন ঘটায়, বা, ঘটাইতে চেষ্টা করে, তাহাকে **বল** বলা হয়। সুতরাং, বলের প্রভাবে একটি বস্তু নির্দ্দিষ্ট ত্বরণ f এতে চলিতে পারে, বা সমবেগে চলিতে পারে, অথবা, উহা স্থিরও থাকিতে পারে। সুতরাং, একটি বস্তু স্থির থাকিলে, তাহা কোনও বলের অধীন নহে, এমন কথা বলা চলে না।

এক শ্রেণীর বল আছে, যাহারা বস্তুতে গতি সঞ্চার করে; তাহাদিগকে **সক্রিয় বল** বলা হয়। পতনশীল বস্তুর ভার, চুম্বকের আকর্ষণ বা বিকর্ষণ ইত্যাদি সক্রিয় বলের দৃষ্টান্ত। ইহারা স্থির বস্তুতে গতি সঞ্চার করে, বা, গতিশীল বস্তুর গতির পরিবর্ত্তন ঘটায়। অপর এক শ্রেণীর বল আছে, যাহারা কখনও এইরূপ প্রত্যক্ষভাবে গতি উৎপাদন করেনা; তাহারা কেবলমাত্র বস্তুর গতি রোধ করিতে সমর্থ। টেবিলের উপর একটি বই রাখিলে, বই এর ভার উহাকে নিম্ন দিকে গতি দিতে চায়; কিন্তু, টেবিলের প্রতিক্রিয়া ঐ গতিকে বাধা দেয়। একটি দড়ির এক প্রান্ত হাতে ধরিয়া অপর প্রান্তে একটি প্রস্তরখণ্ড বাঁধিয়া নীচে ঝুলাইয়া দিলে, উহার ভার নীচের দিকে গতি সঞ্চার করিতে চায়; কিন্তু, দড়ির টান তাহাতে বাধা দেয়। মাটিতে একটি গোলাকার বস্তুকে গড়াইয়া দিলে, মাটির ঘর্ষণ এবং উচুনীচু ভাব উহার গতি কমাইতে কমাইতে উহাকে একেবারে থামাইয়া দেয়। বাধা, টান, ঘর্ষণ, প্রভৃতি এক নূতন জাতীয় বল। ইহাদিগকে **প্রতিক্রিয়া বল** বলা হয়। প্রধানতঃ, এই দ্বিতীয় শ্রেণীর বলের আলোচনাই স্থিতিবিদ্যার বিষয়বস্তু।

বলের প্রভাবে বস্তুর, বা কণার, বা বিন্দুর স্থিতাবস্থার নানাদিক্ বলবিদ্যার যে শাখায় আলোচিত হয়, তাহাকে **স্থিতিবিদ্যা** (Statics) বলা হয়।

0-2. বলের পরিমাপ ও একক :

গতিবিদ্যায়, '$P=mf$' সূত্র-সাহায্যে বলের পরিমাপ করা হইয়াছে। ইহা একশ্রেণীর গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। যেখানে একটি নির্দিষ্ট বল অবিচ্ছিন্নভাবে m-ভরবিশিষ্ট বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল হইয়া f ত্বরণ উৎপন্ন করে, সেইখানে ইহা প্রযোজ্য। কিন্তু, ত্বরণ যেখানে নাই সেখানে এই উপায়ে বলের পরিমাপ করা যাইবে না। তখন, কোনও বস্তুর উপরে বলের পরিমাপ নির্ণয় করিবার প্রধান উপায়, বস্তুটির ভার নির্ণয়। অপিচ, বস্তুটির উপরে প্রযুক্ত বলটির কতটুকু প্রতিক্রিয়া, তাহা হইতে বলটির পরিমাপ পূর্বোক্ত ভারের সাহায্যে নির্ণয় করা যাইবে।

স্থিতিবিদ্যায়, (i) এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক এক **পাউণ্ড-ভার** (1 lb. wt.) এবং (ii) সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক এক **গ্রাম-ভার** (1 gm. wt.)। সুতরাং, 5 পা.-ভার এর একটি বল বলিলে, উহার দ্বারা কেবল বলের পরিমাপকে বুঝাইবে ; সেইরূপ 50 গ্রা.-ভার এর একটি বল বলিলে, উহার দ্বারা কেবল ঐ বলের পরিমাপকে বুঝাইবে।

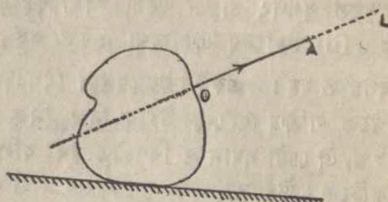
0-3. বলের প্রকৃতি :

বলের প্রকৃতি বিশ্লেষণ করিলে, দেখা যায় যে, ইহার চারিটি বিশেষত্ব আছে। যেমন, উহার (i) **প্রয়োগ বিন্দু (Point of application)**; (ii) **মান (magnitude)**; (iii) **ক্রিয়ারেখা (line of action)**. ও (iv) **দিক্ (direction)**.

কোন বস্তুর উপর একটি বল প্রযুক্ত হইলে, উহা নিশ্চয়ই সমগ্র বস্তু জুড়িয়া ক্রিয়া করিবে না ; উহা বস্তুটির কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে একটি সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করিবে। বস্তুটির যে বিন্দুতে ঐ বল ক্রিয়া করে, তাহাকে বলের প্রয়োগবিন্দু বা, ক্রিয়াবিন্দু এবং যে রেখায় উহা ক্রিয়া করে তাহাকে **বলের ক্রিয়ারেখা (line of action of force)** বলা হয়। বলের ক্রিয়ারেখাকে উহার প্রয়োগরেখা, এবং প্রয়োগ বিন্দু হইতে ক্রিয়ারেখা বরাবর যে নির্দিষ্ট দিকে ঐ বল ক্রিয়া করে, তাহাকে উহার অভিমুখিতা, বা, দিক্ বলে। বলের পরিমাপ সম্বন্ধে পূর্বেই আলোচনা করা হইয়াছে। 25 কিলোগ্রাম-ভার এর একটি বল বলিলে, উহার দ্বারা বলটির কেবল পরিমাপকে বুঝাইবে।

মনে করি, কোন একটি বস্তুর O বিন্দুতে $\overleftrightarrow{OL}$ বরাবর 15 পা.-ভার পরিমাপের একটি বল প্রযুক্ত হইল, এবং ইহা O হইতে L এর দিকে ক্রিয়া করিতে থাকিল।

তাহা হইলে, এখানে বলটির পরিমাপ 15 পা.-ভার ; প্রয়োগবিন্দু O ; ক্রিয়ারেখা $\overleftrightarrow{OL}$ এবং অভিমুখিতা $\overrightarrow{OL}$, অর্থাৎ, O হইতে L এর দিকে। সুতরাং, দেখা যাইতেছে, একটি দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ দ্বারা একটি বলকে সূচিত করা যাইবে, অর্থাৎ, যে কোন পরিমাপের বল একটি ভেক্টর রাশি।



OL এর উপর A বিন্দু লইলে, যেখানে $\overline{OA}$ এর পরিমাপ 3 সে. মি. এবং 5 পাউণ্ড-ভার পরিমাপ বলকে 1 সে.মি. দৈর্ঘ্যের রেখাংশ দ্বারা সূচিত করিলে, 15 পাউণ্ড-ভার পরিমাপের বল $\overrightarrow{OA}$ দ্বারা নির্দেশিত হইবে, যেখানে $\overline{OA}=3$ সে. মি.। এইরূপ ক্ষেত্রে, 15 পা.-ভার পরিমাপের বল মানে, দিকে ও ক্রিয়ারেখায় $\overrightarrow{OA}$ দ্বারা নির্দেশিত, যেখানে O ঐ বলটির প্রয়োগবিন্দু। কিন্তু, এই একক মনোনয়নে, 5 পা.-ভার বলকে 3 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের রেখাংশ দ্বারা সূচিত করিলে, 15 পা -ভার বল $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা নির্দেশিত হইবে, যেখানে $\overline{OB}=9$ ইঞ্চি এবং বলটির প্রয়োগবিন্দু O. সুতরাং, অতি অবশ্যই মনে রাখা দরকার, নির্দ্দিষ্ট পরিমাপের বলকে বিভিন্ন উপায়ে দৈর্ঘ্যের একক মনোনয়নের সাহায্যে, বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের দিক্ নির্দেশিত রেখাংশ দ্বারা সূচিত করা যাইতে পারে।

0-4. বস্তুকণা ও দৃঢ় বস্তু :

কোন বস্তুর আয়তন যদি এত ক্ষুদ্র হয় যে, তাহাকে একটি বিন্দু ভাবা যাইতে পারে, তবে তাহাকে একটি কণা (**Particle**) বলা হইবে। যে কোন বস্তু অসংখ্য কণার সমন্বয়ে গঠিত। কোন বস্তুর উপর যে কোন সংখ্যক ও যে কোন মানের বল প্রয়োগ করিলেও যদি ঐ বস্তুটির যে কোন দুইটি কণার দূরত্ব সকল অবস্থাতেই অপরিবর্তিত থাকে, তবে তাহাকে দৃঢ়বস্তু (**Rigid Body**) বলা হইবে। সুতরাং, কোনও অবস্থাতেই একটি দৃঢ় বস্তুর আকার ও আয়তনের পরিবর্তন হইবে না।

0-5. সমান বল ও বলের সাম্যাবস্থা :

দুই বা ততোধিক বল যুগপৎ কোন একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত হইয়া বস্তুটিকে দ্রুতিহীন অবস্থায় স্থিতিশীল রাখিলে, বা উহাদের সম্মিলিত ক্রিয়াফল শূন্য হইলে, "ঐ বলসমূহ সাম্যাবস্থায় (**in equilibrium**) আছে" বলা হইবে।

একটি বস্তু কণার উপর যুগপৎ দুইটি বল পরস্পর বিপরীত অভিমুখে প্রযুক্ত হইয়া সাম্যাবস্থায় থাকিলে, ঐ বল দুইটির মান সমান হইবে। এইরূপ ক্ষেত্রে, বল দুইটি **সমান (মানে)** বলা হইবে।

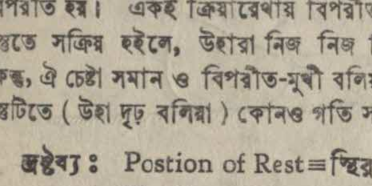
দুইটি বল কোন একটি দৃঢ় বস্তু (**Rigid body**) এর একই বিন্দুতে অথবা বিভিন্ন বিন্দুতে যুগপৎ প্রযুক্ত হইয়া সাম্যাবস্থায় থাকিবে, যদি (i) উহাদের মান সমান হয় ; (ii) উহাদের ক্রিয়ারেখা একই হয় ; এবং (iii) উহাদের অভিমুখিতা পরস্পর বিপরীত হয়। একই ক্রিয়ারেখায় বিপরীতমুখে দুইটি সমান মানের বল একই দৃঢ় বস্তুতে সক্রিয় হইলে, উহারা নিজ নিজ দিকে ত্বরণ উৎপাদন করিতে চেষ্টা করিবে ; কিন্তু, ঐ চেষ্টা সমান ও বিপরীত-মুখী বলিয়া একে অন্যকে রোধ করিবে। সেইজন্য, বস্তুটিতে (উহা দৃঢ় বলিয়া) কোনও গতি সঞ্চারিত হইবে না।

দ্রষ্টব্য : Postion of Rest ≡ **স্থিরাবস্থা**, (যখন velocity = 0) ;
Equilibrium ≡ **সাম্যাবস্থা**, (যখন Resultant Force = 0).

0·6. বলের প্রয়োগবিন্দুর স্থানান্তরণ-তত্ত্ব :

(The principle of transmissibility of forces) :

একটি বল কোনও দৃঢ় বস্তুর একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত হইলে, উহার ক্রিয়ারেখার উপরিস্থ বস্তুটির অপর এক বিন্দুতে যদি উহার প্রয়োগবিন্দুর স্থানান্তরণ করা হয়, তবে বস্তুটির উপর বলটির ক্রিয়াফলের কোন পরিবর্তন হইবে না। ইহাই **বলের প্রয়োগবিন্দুর স্থানান্তরণ-তত্ত্ব।**



মনে করি, একটি দৃঢ় বস্তুর O বিন্দুতে P মানের একটি বল $\overrightarrow{OM}$ বরাবর প্রযুক্ত এবং ইহার ক্রিয়ারেখা $\overleftrightarrow{LM}$. এই ক্রিয়ারেখার উপরিস্থ A বিন্দুতে P মানের একটি বল $\overrightarrow{AM}$ বরাবর এবং P মানের অন্য একটি বল $\overrightarrow{AL}$ বরাবর যুগপৎ প্রয়োগ করা হইল, যেখানে A বিন্দুটি ঐ দৃঢ় বস্তুর উপরে (বা, মধ্যে) অবস্থিত। ইহার ফলে, O বিন্দুতে $\overrightarrow{OM}$ বরাবর P মানের প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ার কোন পরিবর্তন হইবে না।

এখন, O বিন্দুতে $\overrightarrow{OM}$ বরাবর প্রযুক্ত P মানের বল এবং A বিন্দুতে $\overrightarrow{AL}$ বরাবর প্রযুক্ত P মানের বল পরস্পর সমান (মানে) ও বিপরীতমুখী। সুতরাং, এই দুইটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিবে। তাহা হইলে, A বিন্দুতে $\overrightarrow{AM}$ বরাবর প্রযুক্ত P বলের ক্রিয়াফল, O বিন্দুতে $\overrightarrow{OM}$ বরাবর প্রযুক্ত P বলের ক্রিয়াফলের সমান।

প্রথম অধ্যায়

সমবিন্দু দুইটি বলের লব্ধি

(Resultant of two Concurrent forces).

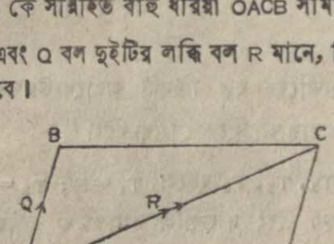
1-1. লব্ধি ও উপাংশ :

কোনও বস্তুর উপর যুগপৎ দুইটি বল প্রযুক্ত হইলে, এবং উহাদের সম্মিলিত ক্রিয়াফল ঐ বস্তুতে প্রযুক্ত তৃতীয় একটি বলের ক্রিয়াফলের সমান হইলে, ঐ তৃতীয় বলটিকে প্রথম দুইটি বলের লব্ধি বল, বা, লব্ধি (**Resultant**) এবং প্রথমোক্ত বলদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে তৃতীয় বলের উপাংশ (**Component**) বলা হইবে।

1-2. বলের সামান্তরিক সূত্র (Parallelogram Law of forces) :

বিবৃতি : কোন বস্তুর একটি বিন্দুতে যুগপৎ প্রযুক্ত দুইটি বল মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে ঐ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা নির্দেশিত হইলে, উহাদের লব্ধি মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে সামান্তরিকটির উক্ত কৌণিক বিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা নির্দেশিত হইবে।

ব্যাখ্যা : মনে করি, কোনও বস্তুর O বিন্দুতে যুগপৎ দুইটি বল P এবং Q মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে যথাক্রমে $\vec{OA}$ এবং $\vec{OB}$ দ্বারা নির্দেশিত। $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ কে সন্নিহিত বাহু ধরিয়া OACB সামান্তরিকটি অঙ্কন করা যাক্। তাহা হইলে, P এবং Q বল দুইটির লব্ধি বল R মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে $\vec{OC}$ দ্বারা নির্দেশিত হইবে।



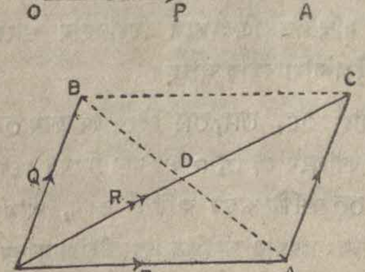
ভেক্টর প্রতীকের সাহায্যে,

$\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{OC}$.

যেহেতু, $\overline{AC}$ এবং $\overline{OB}$ সর্বসম ও সমান্তরাল,

$\therefore\ \vec{AC}=\vec{OB}$.

$\therefore\ \vec{OA}+\vec{AC}=\vec{OC}$.

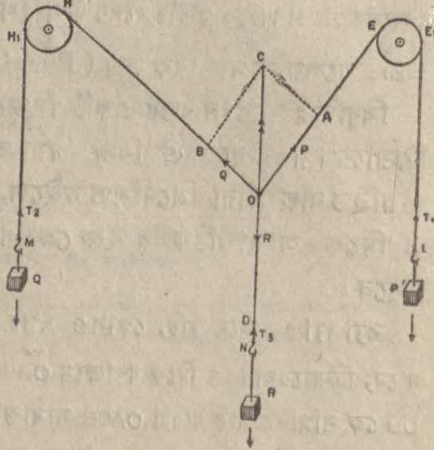


$\overline{OC}$ এবং $\overline{AB}$ কর্ণদ্বয় D বিন্দুতে ছেদ করিলে, $\overline{OC}=2.\overline{OD}$, অর্থাৎ $\vec{OC}=2.\vec{OD}$.

$\therefore\ \vec{OA}+\vec{OB}=2.\vec{OD}$.

দ্রষ্টব্য ঃ 'বলের সামান্তরিক সূত্র' এর জ্যামিতিক প্রমাণ অত্যন্ত জটিল এবং শিক্ষার্থীদের পক্ষে দুর্বোধ্য হইবে বলিয়া, এখানে উহা দেওয়া হইল না। এই সূত্রের সত্যতা নিরূপণের জন্য একটি পরীক্ষামূলক প্রমাণ পরবর্তী আলোচনায় দেওয়া হইল।

1-3. পরীক্ষা দ্বারা 'বলের সামান্তরিক সূত্র' এর সত্যতা নিরূপণ ঃ



মনে করি, P, Q, R ভারের তিনটি বস্তু তিনটি হাল্কা অবিস্তার্য দড়ির তিন প্রান্ত L, M, N এতে বাঁধিয়া দেওয়া হইল, যেখানে উহাদের যে কোন দুইটির ভারের সমষ্টি তৃতীয়টির ভার অপেক্ষা বৃহত্তর। পরে এই তিনটি দড়ির অপর প্রান্তত্রয় O বিন্দুতে গ্রথিত করিয়া দেওয়া হইল। এখন, দেওয়াল অথবা উল্লম্ব কাঠের বোর্ডে সংলগ্ন স্থির ও মসৃণ দুইটি কপিকল E এবং H এর উপর দিয়া P এবং Q এর সহিত সংযুক্ত দড়ি দুইটি পৃথক পৃথক ভাবে লইয়া P, Q, R ভারের বস্তু তিনটি অবাধে উল্লম্বভাবে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল, এবং ইহাদিগকে স্থিরাবস্থায় আসিতে দেওয়া হইল।

P, Q, R সংলগ্ন দড়ির টান যথাক্রমে T_1, T_2, T_3 হইলে, $T_1 = P$; $T_2 = Q$; $T_3 = R$. আবার, যেহেতু, কপিকলদ্বয় মসৃণ এবং দড়িগুলি হাল্কা ও অবিস্তার্য, OEL দড়ির টান সর্বত্র T_1; OHM দড়ির টান সর্বত্র T_2; ON দড়ির টান সর্বত্র T_3. তাহা হইলে, O বিন্দুটি T_1, T_2, T_3 এর সম্মিলিত ক্রিয়াফলে স্থিরাবস্থায় আছে, অর্থাৎ, P, Q, R বলত্রয় O বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে।

এখন সুবিধামত স্কেল মনোনয়নের দ্বারা $\overline{OE}$, $\overline{OH}$, $\overline{ON}$ হইতে যথাক্রমে $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$ লওয়া হইল, যেখানে উহারা যথাক্রমে P, Q, R-এর মান নির্দেশ করে। এক্ষণে, OACB সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করিয়া $\overline{OC}$ কর্ণটি অঙ্কন করি। তখন, আমরা দেখিতে পাইব যে, $\overline{OC}$ এবং $\overline{OD}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং উহারা সমান। সুতরাং, $\overline{OC}$ এর মান R হইবে।

যেহেতু, P, Q, R, বলত্রয় O বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব, P ও Q-এর লব্ধি বল, R-এর সমান (মানে), কিন্তু বিপরীত অভিমুখিতায় একই রেখায় ক্রিয়া করিবে। সুতরাং, P ও Q এর লব্ধি মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে $\vec{OC}$ দ্বারা নির্দেশিত, অর্থাৎ, $\vec{OA}$ ও $\vec{OB}$-এর লব্ধি $\vec{OC}$, যেখানে, OACB সামান্তরিকের O বিন্দুগামী কর্ণ $\overline{OC}$.

1-4. একটি বিন্দুতে যুগপৎ প্রযুক্ত দুইটি বলের লব্ধির মান ও অভিমুখিতা নির্ণয়ঃ

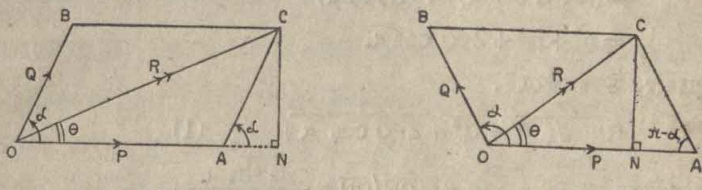


Fig (a) Fig (b)

মনে করি, O বিন্দুতে দুইটি বল P এবং Q যুগপৎ প্রযুক্ত, যেখানে তাহারা মানে, প্রয়োগরেখায় ও দিকে যথাক্রমে, $\vec{OA}$ ও $\vec{OB}$ দ্বারা নির্দেশিত, এবং $\overline{OA}=P$ ও $\overline{OB}=Q$ এবং $\angle AOB=\alpha$.

এখন, OACB সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করি এবং $\overline{OC}$ কর্ণটি অঙ্কন করি। তারপর, বর্ধিত $\overline{OA}$, অথবা, $\overline{OA}$ এর উপর $\overline{CN}$ লম্ব অঙ্কন করি, যেখানে N বিন্দুটি বর্ধিত $\overline{OA}$, বা, $\overline{OA}$ এর উপর থাকিবে। মনে করি, পূর্ব-নির্ধারিত এককে, $\overline{OC}=R$ এবং $\angle AOC=\theta$. তখন, 'বলের সামান্তরিক সূত্র' অনুযায়ী $\vec{OA}$ এবং $\vec{OB}$ এর লব্ধি $\vec{OC}$, অর্থাৎ, P এবং Q এর লব্ধি R (মানে) এবং ইহা P এর অভিমুখিতার সহিত θ কোণে নত।

$\overline{OB}$ এবং $\overline{AC}$ সর্বসম ও সমান্তরাল বলিয়া, $\overline{AC}=Q$.

এখন, $0°<\alpha<90°$ হইলে, Fig. (a) হইতে,

$$\overline{CN}=\overline{AC}.\sin N\hat{A}C=Q\sin\alpha\ ;$$

$$\overline{AN}=\overline{AC}.\cos N\hat{A}C=Q\cos\alpha.$$

কিন্তু, $90°<\alpha<180°$ হইলে, Fig.(b) হইতে,

$$\overline{CN}=\overline{AC}.\ \sin N\hat{A}C=Q\sin(\pi-\alpha)=Q\sin\alpha\ ;$$

$$\overline{AN}=\overline{AC}.\ \cos N\hat{A}C=Q\cos(\pi-\alpha)=-Q\cos\alpha.$$

এখন, ONC সমকোণী ত্রিভুজ হইতে পাই,

$$R^2 = \overline{OC}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{CN}^2$$
$$= (\overline{OA} + \overline{AN})^2 + \overline{CN}^2, \text{ [Fig. (a) হইতে]}$$
$$= (P + Q\cos\alpha)^2 + (Q\sin\alpha)^2$$
$$= P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha.$$

অথবা, $R^2 = \overline{OC}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{CN}^2$

$$= (\overline{OA} - \overline{AN})^2 + \overline{CN}^2, \text{ [Fig. (b) হইতে]}$$
$$= (P + Q\cos\alpha)^2 + (Q\sin\alpha)^2$$
$$= P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha.$$

সুতরাং, উভয় ক্ষেত্রেই,

$$R = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha)}. \quad \cdots \quad (1)$$

আবার উভয় ক্ষেত্রেই, $\tan\theta = \overline{CN}/\overline{ON} = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

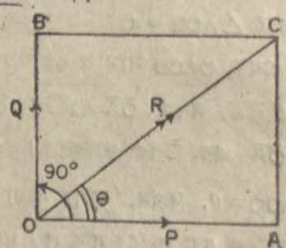
অর্থাৎ, $$\theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}. \quad \cdots \quad (2)$$

দ্রষ্টব্য : 1.

$\alpha = 90°$ হইলে,

$R = \sqrt{(P^2 + Q^2)}$;

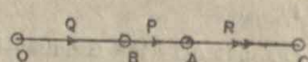
$\theta = \tan^{-1}\dfrac{Q}{P}$.



দ্রষ্টব্য : 2.

$\alpha = 0°$ হইলে,

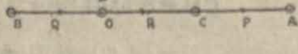
$R = P + Q$.



দ্রষ্টব্য : 3.

$\alpha = 180°$ হইলে,

$R = P - Q$, $(P > Q)$.



দ্রষ্টব্য : 4.

$Q = P$ হইলে,

$$R = \sqrt{(P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha)} = 2P\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{P\sin\alpha}{P + P\cos\alpha} = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

মন্তব্য : 1 (a). P এবং Q প্রদত্ত হইলে, তাহাদের লব্ধির মান **বৃহত্তম** হইবে, যখন cos α এর মান বৃহত্তম হইবে, অর্থাৎ, $\cos\alpha = 1$, বা, $\alpha = 0°$; এবং তখন লব্ধির বৃহত্তম মান হইবে : $(P+Q)$.

(b). P এবং Q প্রদত্ত হইলে, তাহাদের লব্ধি **ক্ষুদ্রতম** হইবে, যখন cos α এর মান ক্ষুদ্রতম হইবে, অর্থাৎ, $\cos\alpha = -1$, বা, $\alpha = \pi$; এবং, তখন, লব্ধির ক্ষুদ্রতম মান হইবে : $(P-Q)$ যদি $P>Q$, অথবা, $(Q-P)$ যদি $Q>P$.

মন্তব্য : 2. P, Q, α প্রদত্ত হইলে, এবং $P>Q$ থাকিলে, P এবং Q এর লব্ধির অভিমুখিতা P এর অভিমুখিতার নিকটতর হইবে।

মন্তব্য : 3. $P=Q$ এবং $\alpha = 120°$ হইলে, P ও Q এর লব্ধি P হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : একটি কণার উপর যুগপৎ $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ বল সমূহ ক্রিয়াশীল হইলে, পূর্ব-নিয়মে P_1 ও P_2 এর লব্ধি R_1 ; R_1 ও P_3 এর লব্ধি R_2 ; ইত্যাদি, এবং এই ভাবে অগ্রসর হইয়া, সর্বশেষে R_{n-2} এবং P_n এর লব্ধি R_{n-1} নির্ণয় করা যাইবে।

1-5. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. কোন বিন্দুতে যুগপৎ 8 পা.-ভার ও 7 পা.-ভার বল দুইটি 60° কোণে ক্রিয়াশীল হইলে, উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

নির্ণেয় লব্ধির মান R পা.-ভার হইলে, এবং ইহার অভিমুখিতা 8 পা.-ভার এর সহিত θ কোণ করিলে,

$$R^2 = 8^2 + 7^2 + 2.8.7.\ \cos 60°$$

$$= 64 + 49 + 56 = 169\ ;$$

অর্থাৎ, $P = 13$;

এবং, $\tan\theta = \dfrac{7\sin 60°}{8 + 7\cos 60°} = \dfrac{7\sqrt{3}}{23}$.

সুতরাং, নির্ণেয় লব্ধির মান 13 পা.-ভার, এবং ইহা 8 পা.-ভারের অভিমুখিতার সহিত $\tan^{-1}\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{23}\right)$ বা, $\cos^{-1}\dfrac{23}{26}$ কোণ করে।

উদাহরণ 2. দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 17 কি. গ্রা.-ভার। যদি উহারা পরস্পর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করে, তাহা হইলে, উহাদের লব্ধি 13 কি. গ্রা.-ভার হয়। বল দুইটির মান কত?

মনে করি, বল দুইটি P কি. গ্রা.-ভার এবং Q কি. গ্রা.-ভার যেখানে $P>Q$. তাহা হইলে,

$$P+Q=17\,; \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $P^2+Q^2=13^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

এখন, $P^2+Q^2+2PQ=(P+Q)^2$;

বা, $169+2PQ=17^2$;

বা, $PQ=60. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

$\therefore\ (P-Q)^2=(P+Q)^2-4PQ$

$=17^2-4\times60=49.$

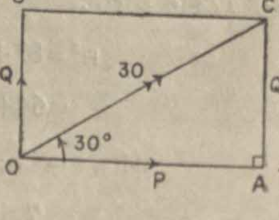
বা, $P-Q=7$, $(\because\ P>Q) \quad \cdots \quad (4)$

তাহা হইলে, (1) এবং (4) হইতে,

$P=12$ এবং $Q=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় বল দুইটি : **12 কি. গ্রা.-ভার এবং 5 কি. গ্রা.-ভার।**

উদাহরণ 3. একটি বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি 30 পা.-ভার এবং ইহা বৃহত্তর বলের অভিমুখিতার সহিত 30° কোণে ক্রিয়া করে। বল দুইটি নির্ণয় কর।



মনে করি, বল দুইটি P পা.-ভার ও Q পা.-ভার, যেখানে $P>Q$.

চিত্রে, $\overline{OA}=P$, $\overline{AC}=Q$; $\overline{OC}=30$; $\angle AOC=30^\circ$, $\angle OAC=90^\circ$.

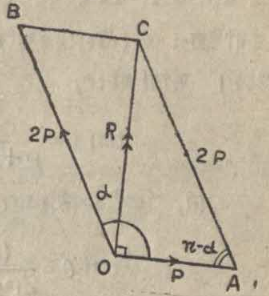
এখন, OAC ত্রিভুজ হইতে,

$$\frac{Q}{\sin 30^\circ}=\frac{P}{\sin 60^\circ}=\frac{30}{\sin 90^\circ}.$$

$\therefore\ P=15\sqrt{3}$ এবং $Q=15$.

সুতরাং, নির্ণেয় বল দুইটি : **$15\sqrt{3}$ পা.-ভার ও 15 পা.-ভার।**

উদাহরণ 4. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল 2P এবং P এর লব্ধি বল ক্ষুদ্রতরটির উপর লম্ব। লব্ধি বল নির্ণয় কর, এবং প্রদত্ত বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ বাহির কর।



মনে করি, $\overline{OA}=P$; $\overline{OB}=2P$;

$\angle AOB=\alpha$; OACB সামান্তরিক।

$\therefore$ $\angle AOC=90°$. তাহা হইলে,

$$\cos O\hat{A}C=\overline{OA}/\overline{AC}$$

$$=\frac{P}{2P}=\frac{1}{2}$$

বা, $\cos(\pi-\alpha)=\frac{1}{2}$; বা, $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

$\therefore$ $\alpha=120°$.

তখন, লব্ধিবল R হইলে,

$$R^2=P^2+(2P)^2+2.P.2P.\cos\alpha$$
$$=5P^2+4P^2\cos(120°)$$
$$=5P^2-2P^2=3P^2.$$
$$\therefore\ R=\sqrt{3}P$$

$\therefore$ নির্ণেয় লব্ধি বল $=\sqrt{3}P$, এবং নির্ণেয় অন্তর্গত কোণ $=120°$.

উদাহরণ 5. একটি বিন্দুতে যুগপৎ ক্রিয়াশীল P এবং Q বল দুইটির লব্ধি R, যেখানে $P:Q=3:2$. বৃহত্তর বলটিকে দ্বিগুণ করিলে এবং ক্ষুদ্রতর বলটিকে পূর্ববৎ রাখিলে, উহাদের লব্ধি 2R হয়। বল দুইটির অন্তর্গত কোণ বাহির কর।

বল দুইটিকে 3x এবং 2x ধরা যাইতে পারে, এবং তাহাদের অন্তর্গত কোণ α. মনে করা যাইতে পারে। তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$R^2=(3x)^2+(2x)^2+2.3x.2x.\cos\alpha$$
$$=13x^2+12x^2\cos\alpha\ ; \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং, $(2R)^2=(6x)^2+(2x)^2+2.\ 6x.\ 2x.\ \cos\alpha$

$$=40x^2+24x^2\cos\alpha. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) হইতে পাই :

$$52x^2+48x^2\cos\alpha=40x^2+24x^2\cos\alpha\ ;$$

বা, $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$. $\therefore$ $\alpha=120°$.

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ $=120°$.

উদাহরণ 6. দুইটি বল একটি কণার উপরে ক্রিয়াশীল। একটিকে দ্বিগুণ করিলে এবং অপরটিকে 20 পা.-ভার বাড়াইলে, উহাদের লব্ধির দিক্ অপরিবর্তিত থাকে। শেষোক্ত বলটি নির্ণয় কর।

মনে করি, প্রদত্ত বল দুইটি : P পা.-ভার ও Q পা.-ভার; উহারা α কোণে ক্রিয়াশীল ; এবং উহাদের লব্ধি P পা.-ভার বলের অভিমুখিতার সহিত θ কোণে ক্রিয়া করে। তাহা হইলে,

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}. \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, দ্বিতীয় শর্তানুসারে,

$$\tan\theta = \frac{(Q+20)\sin\alpha}{2P+(Q+20)\cos\alpha}. \quad \cdots \quad (2)$$

তখন, (1) এবং (2) হইতে,

$$\frac{Q}{P+Q\cos\alpha} = \frac{Q+20}{2P+(Q+20)\cos\alpha} = \frac{20}{P+20\cos\alpha};$$

বা, $Q(P+20\cos\alpha) = 20(P+Q\cos\alpha)$;

বা, $PQ = 20P$.

$\therefore\ Q = 20, \quad (\because\ P \neq 0)$.

$\therefore$ শেষোক্ত বলটি 20 পা.-ভার।

উদাহরণ 7. একটি বিন্দুতে 10 একক, $10\sqrt{2}$ একক, ও 10 একক তিনটি বল যুগপৎ ক্রিয়াশীল হইয়া সাম্যাবস্থায় থাকিলে, প্রথম ও দ্বিতীয় বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণটি নির্ণয় কর।

বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া, যে কোন দুইটির লব্ধি তৃতীয়টির সহিত মানে সমান হইবে এবং একই রেখায় উহার বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়া করিবে। তাহা হইলে, প্রথম দুইটির মধ্যবর্তী কোণ α হইলে,

$$10^2 = (10\sqrt{2})^2 + 10^2 + 2(10\sqrt{2})10.\cos\alpha;$$

বা, $100 = 300 + 200\sqrt{2}.\cos\alpha$;

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 135°$.

$\therefore\ \alpha = 135°$.

উদাহরণ 8. O বিন্দুতে $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ বরাবর তিনটি বল, 20 গ্রা.-ভার, 20 গ্রা.-ভার ও $20\sqrt{3}$ গ্রা.-ভার, যুগপৎ ক্রিয়াশীল, যেখানে $\overline{OA}$ ও $\overline{OC}$, $\overline{OB}$ এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত এবং $\angle AOB = \angle BOC = 60°$. এই তিনটি বলের লব্ধি নির্ণয় কর।

প্রথম ও দ্বিতীয় বলের লব্ধি R_1 গ্রা.-ভার হইলে,

$$R_1^2 = 20^2 + 20^2 + 2.20.20.\cos 60°$$
$$= 1200 = (20\sqrt{3})^2.$$
$$\therefore \quad R_1 = 20\sqrt{3}.$$

এবং, এই R_1 গ্রা.-ভার বলটি $\vec{OB}$ এর সহিত 30° কোণে নত ; (প্রথম ও দ্বিতীয় বল সমান বলিয়া) [R_1 এবং $\vec{OC}$, $\vec{OB}$ এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত]।

এখন, R_1 গ্রা.-ভার ও তৃতীয় বলের লব্ধি R_2 গ্রা.-ভার হইলে,

$$R_2^2 = R_1^2 + (20\sqrt{3})^2 + 2.R_1.(20\sqrt{3})\cos 90°$$
$$= 1200 + 1200 = 2400 = 400 \times 6.$$
$$\therefore \quad R_2 = 20\sqrt{6}.$$

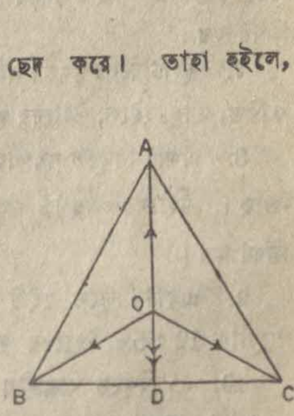
যেহেতু, R_2 গ্রাম-ভার বলটি দুইটি সমান বলের লব্ধি, এবং এই দুইটি সমান বলের অন্তর্গত কোণ 90°, অতএব, R_2 গ্রা.-ভার বলটি $\vec{OC}$ এর সহিত 45° কোণে নত। সুতরাং, নির্ণেয় **লব্ধি $20\sqrt{6}$ গ্রা.-ভার** এবং ইহা **তৃতীয় বলের সহিত 45° কোণে নত।**

উদাহরণ 9. ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O. দেখাও যে, O বিন্দুতে যুগপৎ ক্রিয়াশীল, মানে, দিকে ও ক্রিয়ারেখায় $\vec{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ ও $\vec{OC}$ দ্বারা নির্দেশিত বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

মনে করি, বর্ধিত $\overline{AO}$, $\overline{BC}$ কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে, $\overline{BC}$ এর মধ্যবিন্দু D হইবে, এবং $\overline{OA} = 2.\overline{OD}$.

এখন, ভেক্টর প্রতীকের সাহায্যে,

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA} + (\vec{OB} + \vec{OC})$$
$$= \vec{OA} + 2.\vec{OD}$$
$$= \vec{OA} + (-2\vec{DO})$$
$$= \vec{OA} + (-\vec{OA})$$
$$= \vec{OA} - \vec{OA} = \vec{0}.$$



সুতরাং, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

প্রশ্নমালা 1

1. একটি বিন্দুতে 8 গ্রাম-ভার ও 7 গ্রাম-ভার দুইটি বল 60° কোণে সক্রিয়। উহাদের লব্ধির মান ও অভিমুখিতা বাহির কর।

2. একটি কণার উপর 5 পা.-ভার ও 3 পা.-ভার বল দুইটি α কোণে সক্রিয়। তাহাদের লব্ধি বল 7 পা.-ভার হইলে α এর মান কত?

3. (a) সমবিন্দু দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি যথাক্রমে 30 কি. গ্রা.-ভার ও 2 কি. গ্রা.-ভার। বল দুইটি 60° কোণে ক্রিয়াশীল হইলে, উহাদের লব্ধি কি হইবে?

(b) সমবিন্দু দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি যথাক্রমে 26 পা.-ভার ও 6 পা.-ভার। বল দুইটি 120° কোণে ক্রিয়াশীল হইলে, উহাদের লব্ধি কি হইবে?

4. সমবিন্দু দুইটি সমান বলের লব্ধির মান উহাদের একটির সমান হইলে, উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাপ কত?

5. একটি কণায় প্রযুক্ত বিপরীতমুখী দুইটি বলের লব্ধি 34 কি. গ্রা.-ভার। যদি তাহারা পরস্পরের সহিত সমকোণে ক্রিয়া করিত, তবে তাহাদের লব্ধি 50 কি. গ্রা. -ভার হইত। বল দুইটি নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1967]

6. (a) একটি বিন্দুতে সমকোণে ক্রিয়ারত দুইটি বলের ক্ষুদ্রতরটি 8 পা.-ভার এবং উহাদের লব্ধি ও বৃহত্তর বলটির সমষ্টি 288 পা.-ভার। লব্ধি ও বৃহত্তর বল নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1967]

(b) একটি বিন্দুতে সমকোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের ক্ষুদ্রতরটি 18 পাউণ্ড-ভার, এবং উহাদের লব্ধি ও বৃহত্তর বলটির সমষ্টি 162 পাউণ্ড-ভার। লব্ধি ও বৃহত্তর বলটি নির্ণয় কর।

7. দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 21 পা.-ভার। যদি উহারা পরস্পর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করিত, তাহা হইলে, উহাদের লব্ধি 15 পা.-ভার হইত। বল দুইটি নির্ণয় কর।

8. একটি বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি $\sqrt{10}$ পা. -ভার। উহাদের অন্তর্গত কোণ 60° হইলে, লব্ধি $\sqrt{13}$ পা.-ভার হইত। বল দুইটি নির্ণয় কর।

9. একটি বিন্দুতে দুইটি বল পরস্পর সমকোণে ক্রিয়াশীল এবং উহাদের মানের অনুপাত 12 : 5. উহাদের লব্ধি 208 পা.-ভার হইলে, উহাদের মান বাহির কর।

10. O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল P ও Q এর লব্ধির মান R. যদি $P : Q : R = 4 : 3 : 5$ হয়, তবে P ও Q এর অন্তর্গত কোণ কত?

11. A বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল P ও Q বল দুইটির লব্ধি R. যদি $P:Q:R = 2:\sqrt{3}:2$ হয়, তবে, P ও R এর অন্তর্ভূত কোণের পরিমাপ কত ?

12. 10 পা.-ভার ও Q পা.-ভার বলদ্বয় পরস্পর $120°$ কোণে একটি কণার উপর ক্রিয়া করে। যদি উহাদের লব্ধি Q এর উপর লম্ব হয়, তবে Q এর মান নির্ণয় কর।

[W. B. H. S. 1964]

13. সমবিন্দু দুইটি বলের একটি অপরটির দ্বিগুণ এবং উহাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলটির সহিত সমকোণে নত। বল দুইটির অন্তর্গত কোণের পরিমাপ কত ?

14. একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল দুইটি বল P এবং Q এর লব্ধির মান $\sqrt{3}Q$ এবং উহার দিক্ P এর দিকের সহিত $30°$ কোণ করে। দেখাও যে, হয় $P=Q$, অথবা, $P=2Q$. [W. B. H. S. 1971 ; C. U. P. 1972]

15. একটি বিন্দুতে 2P পা.-ভার ও P পা.-ভার এর দুইটি বল বিভিন্ন দিকে ক্রিয়া করে। প্রথমটিকে দ্বিগুণ ও দ্বিতীয়টিকে 10 পা.-ভার বর্ধিত করিলে, উহাদের লব্ধির দিক্ অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1965]

16. একটি কণার উপর দুইটি বল ক্রিয়া করে। যদি প্রথম বলটিকে দ্বিগুণ করা হয় এবং দ্বিতীয় বলটিকে 12 পা.-ভার বর্ধিত করা হয়, তাহা হইলে, লব্ধির দিক্ অপরিবর্তিত থাকে। দ্বিতীয় বলটি নির্ণয় কর। [C. U. P. 1977]

17. একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত 3P এবং 2P মানের দুইটি বলের লব্ধি R. প্রথম বলটিকে দ্বিগুণ করিলে এবং দ্বিতীয় বলটিকে পূর্ববৎ রাখিলে, উহাদের লব্ধিবল দ্বিগুণ হয়। বল দুইটির অন্তর্ভূক্ত কোণ নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1965]

18. একটি বিন্দুতে 2α কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি সমান বলের লব্ধি R. যদি উহারা 2β কোণে ক্রিয়াশীল হইত তবে উহাদের লব্ধি 2R হইত। প্রমাণ কর যে, $\cos\beta = 2\cos\alpha$, এবং $60° \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

19. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P ও Q বল দুইটির লব্ধি R. Q কে দ্বিগুণ করিলে, R দ্বিগুণ হয় ; আবার, Q বিপরীত মুখে ক্রিয়া করিলেও, R দ্বিগুণ হয়। দেখাও যে,

$P:Q:R = \sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2}$; এবং $(\widehat{P, Q}) = \pi - \cos^{-1}\sqrt{3/8}$.

[W. B. H. S. 1968 ; C. U. P. 1975]

20. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল P এবং Q এর লব্ধি P. দেখাও যে, Pকে দ্বিগুণ করিলে, নূতন লব্ধি Q এর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করিবে।

[W. B. H. S. 1969]

21. একটি বিন্দুতে θ কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বল P ও Q এর লব্ধির মান $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$. যদি তাহাদের অন্তর্গত কোণ $90°-\theta$ হইত, তবে তাহাদের লব্ধির মান $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ হইত। দেখাও যে,

$$\tan\theta=\frac{m-1}{m+1}.$$ [W. B. H S. 1974]

22. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধিবল (R), P এর সহিত θ কোণ করে। যদি P কে R পরিমাণ বর্ধিত করা হয়, তবে দেখাও যে, লব্ধি বল $2R\cos\frac{\theta}{2}$ এবং ইহা P এর দিকের সহিত $\frac{\theta}{2}$ কোণে ক্রিয়া করে।

23. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বলের লব্ধি উহাদের একটির সহিত সমকোণে নত এবং উহার মান অপর বলটির এক-তৃতীয়াংশ। দেখাও যে, বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর বলের অনুপাত $=3:2\sqrt{2}$; এবং বল দুইটির মধ্যস্থ কোণ $=\pi-\cos^{-1}(\frac{2}{3}\sqrt{2})$.

24. P ও Q দুইটি বলের $(2Q>P>Q)$ লব্ধি (R) তাহাদের অন্তর্গত কোণকে 1 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করে। দেখাও যে, লব্ধির মান $(P^2-Q^2)/Q$, এবং বল দুইটির অন্তর্গত কোণ $3\cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right)$. [C. U. P. 1976]

25. l দৈর্ঘ্যের একখণ্ড হাল্কা অবিস্তার্য দড়ি একটি হাল্কা আংটার মধ্য দিয়া লইয়া উহার দুই প্রান্ত একই অনুভূমিকতলে c দূরত্বে বাঁধিয়া দেওয়া হইল $(l>c)$। আংটার সহিত W ভারের একটি বস্তু অবাধে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। দেখাও যে, দড়ির টান $T=\frac{lW}{2\sqrt{l^2-c^2}}$.

26. একটি বিন্দুতে 10 পা.-ভার, 10 পা.-ভার ও 5 পা.-ভার এর তিনটি বল একই সমতলে ক্রিয়াশীল। প্রথম ও দ্বিতীয় বলের অন্তর্গত কোণ 90° ; দ্বিতীয় ও তৃতীয় বলের অন্তর্গত কোণ 45° ; এবং প্রথম ও তৃতীয় বলের অন্তর্গত কোণ 135° হইলে, উহাদের লব্ধি বলের মান ও অভিমুখিতা নির্ণয় কর।

27. একটি বিন্দুতে 7 পা.-ভার, 5 পা.-ভার ও 8 পা.-ভার—তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। দ্বিতীয় ও তৃতীয় বল দুইটির অন্তবর্তী কোণ বাহির কর।

28. O বিন্দুতে তিনটি সমান বল P একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর ক্রমানুসারে ক্রিয়াশীল। তাহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

29. ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A=90°$; $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ যেখানে $\overline{BC}$ এর উপর D অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AB}$ বরাবর $1/\overline{AB}$ পরিমাপের বল এবং $\overrightarrow{AC}$ বরাবর $1/\overline{AC}$ পরিমাপের বল দুইটির লব্ধি $1/\overline{AD}$ এবং তাহা $\overrightarrow{AD}$ বরাবর ক্রিয়াশীল।

30. ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O. দেখাও যে, $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে।

31. ABCD সামান্তরিকের $\overline{CD}$ বাহু E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত। A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ও $2\vec{AE}$ বলসমূহের লব্ধি নির্ণয় কর।

32. ABC ত্রিভুজের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F এবং O ঐ ত্রিভুজের মধ্যে যে কোন বিন্দু। দেখাও যে, $\vec{OE}$, $\vec{OF}$ ও $\vec{DO}$ বলসমূহের লব্ধি $\vec{OC}$.

33. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ জ্যা দুইটি Q বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। দেখাও যে, $\vec{QA}$, $\vec{QB}$, $\vec{QC}$, $\vec{QD}$ বলসমূহের লব্ধি $2\vec{QO}$.

34. ABCD বর্গক্ষেত্রের $\vec{AB}$, $\vec{CB}$, $\vec{AD}$ ও $\vec{DC}$ বরাবর চারিটি সমান বল P (মানে) ক্রিয়াশীল। উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

35. ABC ত্রিভুজের $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. প্রমাণ কর যে, $\vec{BE}$ ও $\vec{DC}$ দ্বারা নির্দেশিত বল দুইটির লব্ধি $\frac{3}{2}$ BC (মানে)।

36. সুষম ষড়ভুজ ABCDEF এর কৌণিক বিন্দু A তে প্রযুক্ত পাঁচটি বল মান, দিক ও ক্রিয়ারেখায় $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$ ও $\vec{AF}$ দ্বারা নির্দেশিত হইলে, উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

37. $\vec{AB}$ ও $\vec{AC}$ বল দুইটির লব্ধি যদি ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি হয় সমকোণী, নয়ত সমদ্বিবাহু।

ANSWERS (প্রশ্নমালা 1)

1. 13 গ্রাম-ভার ; 8 গ্রাম-ভার বলের সহিত $\cos^{-1}(23/26)$ কোণে। 2. 60°. 3. (a). 26 কি. গ্রা.-ভার ; বৃহত্তর বলটির সহিত $\cos^{-1}(23/26)$ কোণে। (b). 14 পা.-ভার ; বৃহত্তর বলটির সহিত $\cos^{-1}(11/14)$ কোণে। 4. 120°. 5. 48 কি. গ্রা.-ভার ; 14 কি. গ্রা.-ভার। 6. (a). $144\frac{1}{5}$ পা.-ভার ; $143\frac{3}{5}$ পা.-ভার। (b). 82 পা.-ভার ; 80 পা.-ভার। 7. 12 পা.-ভার ; 9 পা.-ভার। 8. 3 পা.-ভার ; 1 পা.-ভার। 9. 192 পা.-ভার ; 80 পা.-ভার। 10. 90°. 11. $\cos^{-1}(5/8)$. 12. 5. 13. 120°. 15. 10. 16. 12 পা.-ভার। 17. 120°. 26. 15 পা.-ভার ; প্রথম বলের সহিত $\tan^{-1}\frac{1}{7}(9+4\sqrt{2})$ কোণে। 27. 120°. 28. বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। 31. $3\vec{AC}$. 34. $\vec{DC}$ বরাবর 2P. 36. $\vec{AD}$ বরাবর $3\vec{AD}$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

তিন বা ততোধিক সমতলীয় সমবিন্দু বলের লব্ধি
(Resultant of three or more Concurrent Coplanar forces)

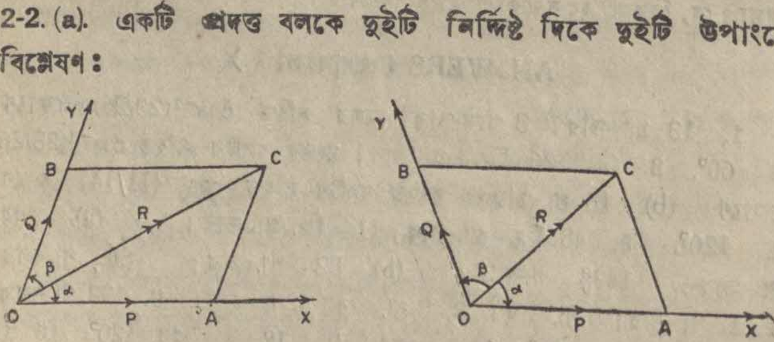
2-1. বলের উপাংশ ও বিশ্লেষিতাংশ :

একটি বিন্দুতে যুগপৎ দুইটি বল P এবং Q ক্রিয়াশীল থাকিলে, 'বলের সামান্তরিক সূত্র' অনুযায়ী উহাদের লব্ধি R নির্ণয় করা যাইবে। এইরূপ ক্ষেত্রে, P এবং Q বলদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে উহাদের অনুরূপ ক্রিয়ারেখা বরাবর R বলের **উপাংশ** (Component) বলা হইবে।

P এবং Q বলের মান, ক্রিয়ারেখা ও দিক্ নির্দিষ্ট থাকিলে, R এর মান, দিক ও ক্রিয়ারেখাও নির্দিষ্ট হইবে। কিন্তু, বিপরীতক্রমে, নির্দিষ্ট R বলকে (যাহা মানে, দিকে ও ক্রিয়ারেখায় নির্দিষ্ট) অসংখ্য উপায়ে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ (Resolution) করা যাইবে ; কারণ, R বলের পরিমাপ দিক্-নির্দেশিত রেখাংশকে কর্ণ ধরিয়া অসংখ্য উপায়ে সামান্তরিক অঙ্কন করা যাইবে, যাহার সন্নিহিত বাহুদ্বয় প্রদত্ত বলের উপাংশকে সূচিত করিবে।

কোন একটি বলকে উহার ক্রিয়া বিন্দুতে পরস্পর লম্বাভিমুখে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করিলে, উক্ত উপাংশদ্বয়কে তাহাদের অনুরূপদিকে, প্রদত্ত বলের পরস্পর **লম্ব-উপাংশ, বা, বিশ্লেষিতাংশ (Resolved part)** বলা হইবে।

2-2. (a). একটি প্রদত্ত বলকে দুইটি নির্দিষ্ট দিকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ :



মনে করি, প্রদত্ত বল $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা সূচিত, যেখানে, $\overline{OC}=R$ (মানে)। $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ বরাবর উহার উপাংশ নির্ণয় করিতে হইবে, যেখানে, $\overrightarrow{OC}$ এর বিপরীত পার্শ্বে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ অবস্থিত, এবং $0° < X\hat{O}Y < 180°$.

মনে করি, $\angle XOC=\alpha$; $\angle COY=\beta$. এখন, OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি, যাহার কর্ণ $\overline{OC}$; $\overrightarrow{OX}$ এর উপর A এবং $\overrightarrow{OY}$ এর উপর B অবস্থিত।

'বলের সামান্তরিক সূত্র' অনুযায়ী $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{OC}$ হইবে। তাহা হইলে, $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ বরাবর $\overrightarrow{OC}$ এর উপাংশ যথাক্রমে, $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$. ধরি, $\overline{OA}=P$ এবং $\overline{OB}=Q$ (মানে)। তখন OACB একটি সামান্তরিক বলিয়া, $\overline{AC}=\overline{OB}=Q$; $\angle ACO=\beta$; $\angle OAC=\pi-(\alpha+\beta)$. সুতরাং, $\triangle OAC$ হইতে পাই,

$$\frac{\overline{OA}}{\sin\beta}=\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{OC}}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}\ ;$$

বা, $$\frac{P}{\sin\beta}=\frac{Q}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}\ ;$$

অর্থাৎ $$P=\frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\ ;\quad Q=\frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

মন্তব্য : α এবং β এর বিভিন্ন মানের জন্য, নির্ণেয় উপাংশ P এবং Q এর মান ও দিক্ বিভিন্ন হইবে। সুতরাং, একটি প্রদত্ত বলকে অসংখ্য উপায়ে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করা যাইবে।

2-2. (b). একটি প্রদত্ত বলের দুইটি পরস্পর লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় :

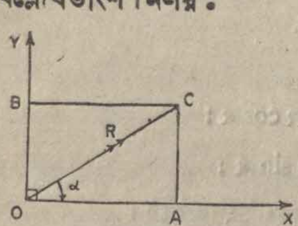


Fig. (a)

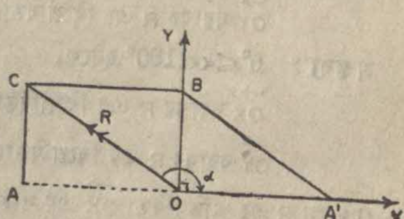


Fig. (b)

মনে করি, প্রদত্ত বল $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা সূচিত, যেখানে, $\overline{OC}=R$ (মানে)। $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ বরাবর উহার বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় করিতে হইবে, যেখানে $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত এবং $\angle XOC=\alpha$, $(0°<\alpha<180°)$.

এখন, $\overline{OC}$ কে কর্ণ ধরিয়া OACB আয়তক্ষেত্র সম্পূর্ণ করি, যেখানে A, $\overrightarrow{OX}$ এর উপরিস্থ এবং B, $\overrightarrow{OY}$ এর উপরিস্থ। 'বলের সামান্তরিক সূত্র' অনুযায়ী, $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{OC}$ হইবে।

ধরি, $\overline{OA}=P$ এবং $\overline{OB}=Q$ (মানে)। এখন, OACB একটি আয়তক্ষেত্র বলিয়া, $\overline{AC}=\overline{OB}=Q$. এখন, $0°<\alpha<90°$ হইলে, Fig. (a) হইতে, $P=\overline{OA}=R\cos\alpha$; $Q=\overline{OB}=R\sin\alpha$. কিন্তু, $90°<\alpha<180°$ হইলে, Fig. (b) হইতে, $P=\overline{OA}=R\cos(\pi-\alpha)=-R\cos\alpha$; $Q=\overline{OB}=R\sin(\pi-\alpha)=R\sin\alpha$.
সুতরাং, $0°<\alpha\leq 90°$, অথবা, $90°<\alpha<180°$ হইলে, উভয় ক্ষেত্রেই,

$\overrightarrow{OX}$ বরাবর R এর বিশ্লেষিতাংশ $=R\cos\alpha$;

$\overrightarrow{OY}$ বরাবর R এর বিশ্লেষিতাংশ $=R\sin\alpha$.

দ্রষ্টব্য : (i) $\alpha=0°$ হইলে,

$\overrightarrow{OX}$ বরাবর R এর বিশ্লেষিতাংশ $=R$;

$\overrightarrow{OY}$ বরাবর R এর বিশ্লেষিতাংশ $=0$.

(ii) $\alpha=90°$ হইলে,

$\overrightarrow{OX}$ বরাবর R এর বিশ্লেষিতাংশ $=0$;

$\overrightarrow{OY}$ বরাবর R এর বিশ্লেষিতাংশ $=R$.

(iii) $\alpha=180°$ হইলে,

$\overrightarrow{OX}$ বরাবর R এর বিশ্লেষিতাংশ $=-R$;

$\overrightarrow{OY}$ বরাবর R এর বিশ্লেষিতাংশ $=0$.

মন্তব্য : $0°\leqslant\alpha\leqslant 180°$ হইলে,

$\overrightarrow{OX}$ বরাবর R এর বিশ্লেষিতাংশ $=R\cos\alpha$;

$\overrightarrow{OY}$ বরাবর R এর বিশ্লেষিতাংশ $=R\sin\alpha$;

যেখানে R এর অভিমুখিতা $\overrightarrow{OX}$ এর সহিত α কোণ উৎপন্ন করে।

2-3. কোন নির্দিষ্ট দিকে সমবিন্দু দুইটি বলের বিশ্লেষিতাংশের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ দিকে উহাদের লব্ধির বিশ্লেষিতাংশের সমান।

মনে করি, O বিন্দুতে যুগপৎ দুইটি বল সক্রিয়, যাহারা মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা সূচিত, এবং উহাদের লব্ধি $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা সূচিত। ধরা যাক, $\overline{OA}=P$; $\overline{OB}=Q$; $\overline{OC}=R$ (মানে)। তাহা হইলে, OACB একটি সামান্তরিক, যাহার একটি কর্ণ $\overline{OC}$.

মনে করি, $\overrightarrow{OX}$ একটি প্রদত্ত দিক্‌। এখন, $\overrightarrow{OX}$ এর উপর $\overline{AL}$, $\overline{BM}$, $\overline{CN}$ লম্ব টানি, এবং পরে $\overline{CN}$ এর উপর $\overline{AD}$ লম্ব টানি ; যেখানে, $\overleftrightarrow{OX}$ এর উপর L, M, N এবং $\overline{CN}$ এর উপর D অবস্থিত। তাহা হইলে, Fig. (a) হইতে, $\overrightarrow{OX}$

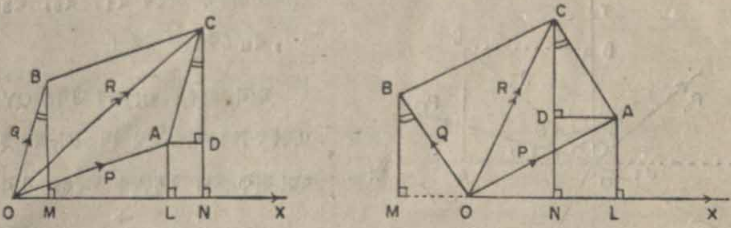


Fig. (a) Fig. (b)

বরাবর P, Q, R এর বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে, $\overline{OL}, \overline{OM}, \overline{ON}$; এবং Fig. (b) হইতে, $\overrightarrow{OX}$ বরাবর P, Q, R এর বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে, $\overline{OL}$, $-\overline{OM}$, $\overline{ON}$.

যেহেতু, $\triangle OMB$ এবং $\triangle ADC$ সর্বসম, সুতরাং, $\overline{OM}=\overline{AD}$. কিন্তু, ADNL একটি আয়তক্ষেত্র বলিয়া, $\overline{LN}=\overline{AD}$; সুতরাং, $\overline{LN}=\overline{OM}$ (মানে)।

তাহা হইলে, Fig.(a) হইতে,

$\overline{ON}=\overline{OL}+\overline{LN}=\overline{OL}+\overline{OM}$;

এবং, Fig. (b) হইতে,

$\overline{ON}=\overline{OL}-\overline{NL}=\overline{OL}+(-\overline{OM})$.

সুতরাং, $\angle XOA=\alpha$; $\angle XOB=\beta$; $\angle XOC=\theta$ হইলে,

$$R \cos\theta=P\cos\alpha+Q\cos\beta.$$

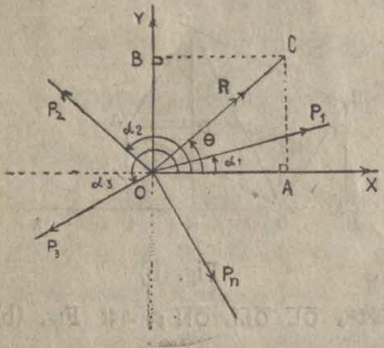
অতএব, $\overrightarrow{OX}$ বরাবর P ও Q বলের বিশ্লেষিতাংশের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ একই দিকে উহাদের লব্ধি R এর বিশ্লেষিতাংশের সমান।

দ্রষ্টব্য : $R \sin\theta=P\sin\alpha+Q\sin\beta$, ($\dot{\overrightarrow{OX}}$ এর লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিতাংশ লইয়া)।

মন্তব্য : এইভাবে দেখানো যাইবে, কোন নির্দিষ্ট দিকে কতিপয় সমতলীয় সমবিন্দু বলের বিশ্লেষিতাংশের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ একই দিকে উহাদের লব্ধির বিশ্লেষিতাংশের সমান হইবে।

2-4. একটি বিন্দুতে যুগপৎ সক্রিয় কতিপয় সমতলীয় বলের লব্ধি নির্ণয়।

মনে করি, O বিন্দুতে যুগপৎ কতিপয় সমতলীয় বল সক্রিয়, যাহাদের মান $P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, P_n$ এবং যাহাদের দিক্ উহাদের সমতলে স্থিত $\overrightarrow{OX}$ এর সহিত একই ক্রমে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \cdots, \alpha_n$ কোণে নত।



মনে করি, $\overrightarrow{OX}$ এর উপর $\overrightarrow{OY}$ লম্ব এবং তাহা বলগুলির সমতলে অবস্থিত। ধরা যাক্, বল সমূহের লব্ধির মান R এবং উহার দিক্ $\overrightarrow{OX}$ এর সহিত ঐ একই ক্রমে θ কোণে নত। তাহা হইলে, যেহেতু, যে কোন দিকে ঐ বলগুলির বিশ্লেষিতাংশের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ একই দিকে উহাদের লব্ধির বিশ্লেষিতাংশের সমান,

$$\therefore \quad R\cos\theta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \cdots \cdots + P_n\cos\alpha_n$$

$$= \sum_{r=1}^{n} P_r \cos\alpha_r = X, \quad (\text{ধরি});$$

$$R\sin\theta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \cdots \cdots + P_n\sin\alpha_n$$

$$= \sum_{r=1}^{n} P_r \sin\alpha_r = Y, \quad (\text{ধরি})।$$

$$\therefore \quad R^2 = X^2 + Y^2, \quad \text{বা}, \quad R = \sqrt{X^2+Y^2};$$

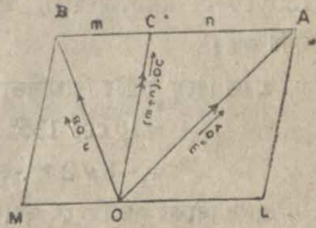
$$\text{এবং}, \quad \tan\theta = Y/X, \quad \text{বা}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right).$$

2-5. O বিন্দুতে $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ বরাবর সক্রিয় দুইটি বলের মান যথাক্রমে, $m.\overline{OA}$ এবং $n.\overline{OB}$ হইলে, উহাদের লব্ধি $\overrightarrow{OC}$ বরাবর সক্রিয় হইবে এবং উহার মান $(m+n).\overline{OC}$ হইবে, যেখানে $\overline{AB}$ এর উপরে C অবস্থিত এবং $m.\overline{AC} = n.\overline{BC}$.

O বিন্দু দিয়া $\overline{AB}$ এর সমান্তরাল করিয়া $\overline{LM}$ অঙ্কন করি এবং OCAL ও OCBM সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি।

$\vec{OA}$ বরাবর সক্রিয় $m.\vec{OA}$ বলের উপাংশ $\vec{OL}$ বরাবর $m.\vec{OL}$ এবং $\vec{OC}$ বরাবর $m.\vec{OC}$. আবার, $\vec{OB}$ বরাবর সক্রিয় $n.\vec{OB}$ বলের উপাংশ $\vec{OM}$ বরাবর $n.\vec{OM}$ এবং $\vec{OC}$ বরাবর $n.\vec{OC}$.

যেহেতু, $m.\overline{AC}=n.\overline{BC}$ এবং $\overline{AC}=\overline{OL}$ ও $\overline{BC}=\overline{OM}$, $\therefore$ $m.\overline{OL}=n.\overline{OM}$.



সুতরাং, $m.\vec{OA}$ এর উপাংশ $\vec{OL}$ বরাবর এবং $n.\vec{OB}$ এর উপাংশ $\vec{OM}$ বরাবর সমান (মানে), কিন্তু বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল।

তাহা হইলে, $m.\vec{OA}$ এবং $n.\vec{OB}$ বলের লব্ধি $(m+n).\vec{OC}$, [যাহার মান $(m+n).\overline{OC}$], এবং তাহা $\vec{OC}$ বরাবর ক্রিয়াশীল।

দ্রষ্টব্যঃ (1). $m=n=1$ হইলে, $\vec{OA}$ এবং $\vec{OB}$ বল দুইটির লব্ধি $2 \cdot \vec{OC}$ হইবে, যেখানে $\overline{AB}$ এর মধ্যবিন্দু C.

দ্রষ্টব্যঃ (2). $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ বল তিনটির লব্ধি $3 \cdot \vec{OG}$ হইবে, যেখানে ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G.

দ্রষ্টব্যঃ (3). $\vec{AO}$ ও $\vec{BO}$ বরাবর ক্রিয়াশীল $m.\vec{AO}$ ও $n.\vec{BO}$ বলের লব্ধি $(m+n).\vec{CO}$, যেখানে, $m.\overline{AC}=n.\overline{BC}$.

দ্রষ্টব্যঃ (4). $\vec{OA}$ এবং $\vec{BO}$ বরাবর ক্রিয়াশীল $m.\vec{OA}$ ও $n.\vec{BO}$ বলের লব্ধি $(m-n).\vec{OC}$, যেখানে, বর্ধিত $\overline{BA}$ বা বর্ধিত $\overline{AB}$ এর উপর C থাকিবে, এবং $m.\overline{AC}=n.\overline{BC}$.

2-6. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণঃ

উদাহরণ 1. 10 কি. গ্রা.-ভারের একটি বল উল্লম্বরেখার সহিত 30° কোণে উপরের দিকে সক্রিয়। অনুভূমিক ও উল্লম্বদিক্ বরাবর উহার বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় কর।

উল্লম্বদিক্ বরাবর বিশ্লেষিতাংশ

$=10 \cos 30°$ কি. গ্রা.-ভার

$=5\sqrt{3}$ কি. গ্রা.-ভার।

অনুভূমিক দিক্ বরাবর বিশ্লেষিতাংশ

$=10 \sin 30°$ কি. গ্রা.-ভার

$=5$ কি. গ্রা.-ভার

উদাহরণ 2. 16 পাউণ্ড-ভারের একটি বল একটি প্রদত্ত দিকের সহিত 135° কোণে ক্রিয়াশীল হইলে, ঐদিকে এবং উহার লম্বাভিমুখে বলটির বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত দিকে বলটির বিশ্লেষিতাংশ

$=16 \cos 135°$ পা.-ভার

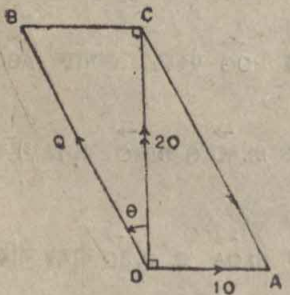
$=-8\sqrt{2}$ পা.-ভার।

প্রদত্ত দিকের লম্বাভিমুখে উহার বিশ্লেষিতাংশ

$=16 \sin 135°$ পা.-ভার

$=8\sqrt{2}$ পা.-ভার।

উদাহরণ 3. উল্লম্বরেখায় উপরের দিকে 20 গ্রা.-ভারের একটি বল সক্রিয় এবং অনুভূমিক দিকে উহার উপাংশ 10 গ্রা.-ভার। অপর উপাংশের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।



চিত্রে, $\overline{OC}$ উল্লম্ব দিক্ বরাবর; $\overrightarrow{OA}=10$ গ্রাম-ভার (অনুভূমিক দিক্ বরাবর); $\overrightarrow{OC}=20$ গ্রাম-ভার; $\angle AOC=90°$.

মনে করি, $\overrightarrow{OB}=Q$ গ্রাম-ভার; এবং $\angle BOC=\theta$, যেখানে OACB একটি সামান্তরিক। তাহা হইলে, OACB সামান্তরিকে, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}=10$ গ্রাম-ভার; এবং $\triangle OBC$ হইতে,

$$\frac{Q}{\sin 90°}=\frac{10}{\sin\theta}=\frac{20}{\cos\theta}.$$

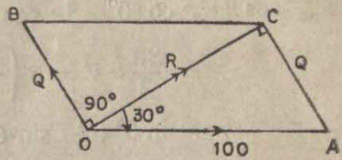
$\therefore\ \tan\theta=\frac{1}{2}$; বা, $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2}$;

$Q\sin\theta=10$; $Q\cos\theta=20$.

$\therefore\ Q^2=10^2+20^2=10^2\times 5$; বা, $Q=10\sqrt{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় উপাংশ $=10\sqrt{5}$ গ্রা.-ভার এবং নির্ণেয় দিক: উল্লম্ব দিকের সহিত $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণে।

উদাহরণ 4. 120° কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের লম্বাভিমুখী। বৃহত্তর বলটি 100 গ্রাম-ভার হইলে; ক্ষুদ্রতর বল ও লব্ধি নির্ণয় কর।



চিত্রে, $\angle AOB = 120°$; $\angle BOC = 90°$; $\angle AOC = 30°$; $\overrightarrow{OA} = 100$ গ্রা.-ভার।
মনে করি, ক্ষুদ্রতর বল $= Q$ গ্রাম-ভার; লব্ধি $= R$ গ্রাম-ভার।

OACB সামান্তরিকে, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = Q$ গ্রা.-ভার। এখন $\triangle OAC$ হইতে

$$\frac{100}{\sin 90°} = \frac{Q}{\sin 30°} = \frac{R}{\sin 120°}$$

$\therefore \; Q = 100 \sin 30° = 50$;

$R = 100 \sin 120° = 50\sqrt{3}$.

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর বল $= 50$ গ্রাম-ভার;

লব্ধি বল $= 50\sqrt{3}$ গ্রাম-ভার।

উদাহরণ 5. দুইটি বল P ও Q এর লব্ধি $\sqrt{3}Q$ এবং ইহা P এর সহিত 30° কোণে ক্রিয়াশীল। দেখাও যে, $P = Q$, অথবা, $P = 2Q$. [**C. U. P. 1972**]

মনে করি, P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α. তাহা হইলে,

$$\frac{P}{\sin(\alpha - 30°)} = \frac{Q}{\sin 30°} = \frac{\sqrt{3}\,Q}{\sin(\pi - \alpha)}.$$

$\therefore \; \sin\alpha = \sqrt{3} \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore \; \alpha = 60°$, অথবা, $\alpha = 120°$.

এখন, $\alpha = 60°$ হইলে, $\frac{P}{\sin 30°} = \frac{Q}{\sin 30°}$; বা, $P = Q$.

আবার, $\alpha = 120°$ হইলে, $\frac{P}{\sin 90°} = \frac{Q}{\sin 30°}$; বা, $P = 2Q$.

উদাহরণ 6. একই সমতলে $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ বরাবর P, 3P, $\sqrt{3}P$, $\sqrt{3}P$ পা.-ভার বল যথাক্রমে ক্রিয়াশীল। যদি একই ক্রমে $\angle AOB = 60°$; $\angle BOC = 90°$; এবং $\angle COD = 120°$ হয়, তবে এই বলসমূহের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

মনে করি, বলসমূহের লব্ধি F পা.-ভার এবং উহা $\overrightarrow{OA}$ এর সহিত θ কোণে (পূর্বোক্ত ক্রমে) সক্রিয়। তাহা হইলে,

$$F\cos\theta = P\cos 0^\circ + 3P\cos 60^\circ + \sqrt{3}P\cos 150^\circ + \sqrt{3}P\cos 270^\circ$$

$$= P + \frac{3P}{2} + \sqrt{3}P\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}P\times 0 = P;$$

$$F\sin\theta = P\sin 0^\circ + 3P\sin 60^\circ + \sqrt{3}P\sin 150^\circ + \sqrt{3}P\sin 270^\circ$$

$$= 0 + 3P\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}P\times\frac{1}{2} + \sqrt{3}P\times(-1) = \sqrt{3}P.$$

$\therefore\ (F\cos\theta)^2 + (F\sin\theta)^2 = P^2 + 3P^2;$

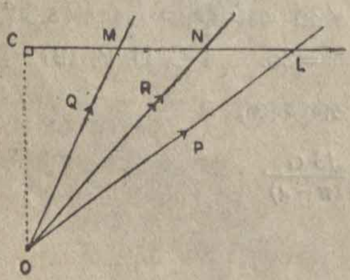
বা, $F^2 = 4P^2$; বা, $F = 2P$.

আবার, $\tan\theta = \sqrt{3}$; বা, $\theta = 60^\circ$.

$\therefore$ নির্ণেয় লব্ধি $=2P$ পা.-ভার, এবং উহা $\overrightarrow{OB}$ বরাবর ক্রিয়াশীল থাকিবে।

উদাহরণ 7. O বিন্দুতে সক্রিয় P ও Q বলের লব্ধি R. একটি সরলরেখা উহাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করিলে, দেখাও যে,

$$P/\overline{OL} + Q/\overline{OM} = R/\overline{ON}.$$



$\overline{ML}$ এর উপর $\overline{OC}$ লম্ব টানা হইল, যেখানে C, $\overleftrightarrow{LM}$-এর উপর অবস্থিত। তাহা হইলে, $\overrightarrow{OC}$ বরাবর P ও Q-এর বিশ্লেষিতাংশের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ দিক্ বরাবর উহাদের লব্ধি R-এর বিশ্লেষিতাংশের সমান হইবে।

$\therefore\ P\cos\angle LOC + Q\cos\angle MOC = R\cos\angle NOC;$

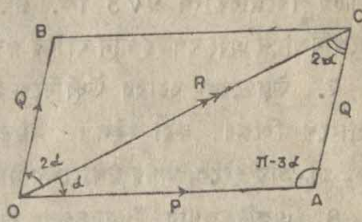
বা, $P.\overline{OC}/\overline{OL} + Q.\overline{OC}/\overline{OM} = R.\overline{OC}/\overline{ON}$

$\therefore\ P/\overline{OL} + Q/\overline{OM} = R/\overline{ON}.$

উদাহরণ 8. যদি P এবং Q ($P>Q$) দুইটি বলের লব্ধি উহাদের অন্তর্গত কোণকে 1 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে দেখাও যে, লব্ধির মান $(P^2-Q^2)/Q$, এবং উাদের অন্তর্গত কোণ $3\cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right)$. [C. U. P. 1976]

মনে করি, লব্ধির মান $=R$ এবং উহা P-এর সহিত α কোণ করে। তাহা হইলে, উহা Q-এর সহিত 2α কোণ করে। চিত্রে, OACB সামান্তরিক, যেখানে $\overline{OA}=P$;

$\overline{OB}=Q$; $\overline{OC}=R$; $\angle AOC=\alpha$; $\angle BOC=2\alpha$. তাহা হইলে, $\triangle AOC$ হইতে,



$$\frac{P}{\sin 2\alpha}=\frac{Q}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin 3\alpha}$$

$$\therefore\ \frac{P}{Q}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha\ ;$$

$$\frac{R}{Q}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=3-4\sin^2\alpha.$$

$$\therefore\ 4\sin^2\alpha=3-R/Q\ ;$$

বা, $4(1-\cos^2\alpha)=3-R/Q$;

বা, $4-\dfrac{P^2}{Q^2}=3-\dfrac{R}{Q}$;

বা, $\dfrac{R}{Q}=\dfrac{P^2}{Q^2}-1=\dfrac{P^2-Q^2}{Q^2}$. $\therefore\ R=\dfrac{P^2-Q^2}{Q}$.

আবার, $\cos\alpha=\dfrac{P}{2Q}$. $\therefore\ \alpha=\cos^{-1}\left(\dfrac{P}{2Q}\right)$.

$$\therefore\ 3\alpha=3\cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right).$$

প্রশ্নমালা 2.

1. 30 পাউণ্ড-ভার এর একটি বল অনুভূমিক দিকের সহিত 30° উন্নতি কোণে ক্রিয়াশীল থাকিলে, অনুভূমিক ও উল্লম্ব দিক্ বরাবর উহার বিশ্লেষিতাংশ কত হইবে?

2. 24 গ্রাম-ভার এর একটি বল একটি বিন্দুতে সক্রিয় হইয়া ঐ বিন্দুগামী দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ঐ অন্তর্গত কোণটির পরিমাণ 120° হইলে, ঐ দুই রেখা বরাবর বলটির উপাংশ নির্ণয় কর।

3. 20 পা.-ভার বিশিষ্ট একটি বল উহার দুই পার্শ্বে দুইটি সরলরেখার সহিত 30° ও 45° কোণ উৎপন্ন করে। ঐ দুইটি রেখা বরাবর বলটির উপাংশ বাহির কর।

4. একটি বল উপরের দিকে উল্লম্ব রেখার সহিত 60° কোণে সক্রিয়। ঊর্ধ্বদিকে ইহার বিশ্লেষিতাংশ 50 পা.-ভার হইলে, অনুভূমিক দিকে ইহার বিশ্লেষিতাংশ কত হইবে? বলটির পরিমাণই বা কত?

5. 20 কি. গ্রা.-ভার এর একটি বল পূর্ব্বদিকে ক্রিয়াশীল হইলে, উত্তর ও দক্ষিণ-পূর্বদিকে উহার উপাংশ বাহির কর।

6. একটি বল কোন নির্দ্দিষ্ট দিকের সহিত 30° কোণে ক্রিয়াশীল এবং ঐ দিকে বলটির বিশ্লেষিতাংশ $9\sqrt{3}$ কি. গ্রা.-ভার। ঐ নির্দ্দিষ্ট দিকের লম্বাভিমুখে উহার বিশ্লেষিতাংশ এবং বলটির মান বাহির কর।

7. উল্লম্বরেখা বরাবর উর্ধ্বদিকে 200 কি. গ্রা-ভার এর একটি বলকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করা হইল। অনুভূমিক দিক্ বরাবর উহার উপাংশ 200 কি. গ্রা.-ভার হইলে, অপর উপাংশের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

8. একটি কণার উপর যুগপৎ ক্রিয়াশীল P এবং Q দুইটি বলের লব্ধি R. P এর অভিমুখিতায় R এর উপাংশের মান Q এবং Q এর অভিমুখিতায় R এর উপাংশের মান P হইলে, Q এর মান, লব্ধির মান ও বল দুইটির মধ্যবর্ত্তী কোণ নির্ণয় কর।

9. একই সমতলে একটি বস্তুকণার উপর তিনটি বল, 2 পা.-ভার, $2\sqrt{2}$ পা.-ভার ও 1 পা.-ভার যুগপৎ ক্রিয়াশীল। উহাদের প্রথমটি অনুভূমিক দিক বরাবর, দ্বিতীয়টি ঐ অনুভূমিক দিকের সহিত 45^o উন্নতি কোণে এবং তৃতীয়টি উল্লম্বভাবে উর্দ্ধ দিকে সক্রিয়। উহাদের লব্ধির মান ও দিক্ বাহির কর।

10. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। 11 পা.-ভার, 6 পা.-ভার ও 9 পা.-ভার তিনটি বল যথাক্রমে $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ও $\vec{AD}$ বরাবর যুগপৎ ক্রিয়াশীল হইলে, উহাদের লব্ধির মান ও দিক্ বাহির কর।

11. একটি বিন্দুতে 3 পা.-ভার, 4 পা.-ভার ও 2 পা.-ভার তিনটি বল একই সমতলে যুগপৎ ক্রিয়াশীল, এবং উহাদের যে কোনও দুইটির অন্তর্গত কোণ 120°. প্রথম বলের দিকে এবং উহার লম্বাভিমুখে উহাদিগকে দুইটি বলে প্রকাশ কর, এবং উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

12. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির ক্রমানুসারে গৃহীত উহাদের সমান্তরাল তিনটি বল 3P, 7P, 5P একই বিন্দুতে যথাক্রমে যুগপৎ সক্রিয়। উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর। **[W. B. H. S. 1971]**

13. একটি বিন্দুতে যুগপৎ 3, $13\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ গ্রা.-ভার বিশিষ্ট তিনটি বল, যথাক্রমে পূর্ব, উত্তর-পূর্ব, ও দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে ক্রিয়াশীল। উহাদের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর। **[W. B. H. S. 1975]**

14. ABCDEF একটি সুষম ষড়্‌ভুজ। A বিন্দুতে যুগপৎ তিনটি বল 2, $2\sqrt{3}$, 6 পা.-ভার যথাক্রমে $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ ও $\vec{AE}$ বরাবর ক্রিয়াশীল। উহাদের লব্ধি বাহির কর।

15. সমতলীয় সমবিন্দু তিনটি বলের লব্ধি উত্তরদিকে 10 পা.-ভার। উহাদের দুইটি $5\sqrt{2}$ পা.-ভার ও 7 পা.-ভার যথাক্রমে উত্তর-পশ্চিম ও পশ্চিম দিকে সক্রিয়। তৃতীয় বলটির মান ও দিক্ বাহির কর।

16. একটি বিন্দুতে তিনটি বল 1, 2, $\sqrt{3}$ পা-ভার যুগপৎ ক্রিয়াশীল। প্রথম দুইটি ABC সমবাহু ত্রিভুজের A বিন্দুতে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ বরাবর এবং তৃতীয়টি A বিন্দুতে $\overrightarrow{DA}$ বরাবর, যেখানে $\overline{BC}$ এর উপর $\overline{DA}$ লম্ব। উহাদের লব্ধি বাহির কর।

17. ABCDEF সুষম ষড়্ভুজের A বিন্দুতে 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$, 2 পা.-ভার বলসমূহ যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ও $\overrightarrow{AF}$ বরাবর যুগপৎ ক্রিয়াশীল। উহাদের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর। **[W. B. H. S. 1973]**

18. P এবং Q বলদ্বয়ের লব্ধির উপাংশ P বলের দিকে Q. দেখাও যে, বল দুইটি অন্তর্গত কোণের পরিমাপ $2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$, এবং লব্ধির মান $=\sqrt{Q^2+2PQ-P^2}$; $Q>\frac{1}{2}P$.

19. একটি কণার উপর যুগপৎ তিনটি সামতলিক বল P, Q, R পরস্পরের সহিত যথাক্রমে α, β, γ কোণে ক্রিয়াশীল হইলে, দেখাও যে, তাহাদের লব্ধির মান

$$=\sqrt{(P^2+Q^2+R^2+2PQ\cos\alpha+2QR\cos\beta+2RP\cos\gamma)}.$$

[C. U. P. 1965]

20. একটি বিন্দুতে তিনটি বল P, Q, R যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ এর সমান্তরাল ভাবে যুগপৎ ক্রিয়াশীল। দেখাও যে, উহাদের লব্ধির মান

$$=\sqrt{[P^2+Q^2+R^2-2QR\cos A-2RP\cos B-2PQ\cos C\,]}.$$

21. একটি বিন্দুতে তিনটি বল P_1, P_2, P_3 একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর ক্রমানুসারে উহাদের সমান্তরাল দিকে ক্রিয়াশীল। দেখাও যে, উহাদের লব্ধির মান$=\sqrt{(P_1{}^2+P_2{}^2+P_3{}^2-P_2P_3-P_3P_1-P_1P_2)}$.

22. ABC ত্রিভুজের A বিন্দুতে সক্রিয় $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ বরাবর দুইটি বল $3.\overrightarrow{AB}$ এবং $5.\overrightarrow{AC}$ ক্রিয়াশীল হইলে, দেখাও যে, উহাদের লব্ধি $8.\overrightarrow{AD}$, যেখানে D বিন্দুটি $\overline{BC}$ এর উপরিস্থ এবং উহা $\overrightarrow{AD}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইলে, D বিন্দু $\overline{BC}$ কে কিরূপ অনুপাতে বিভক্ত করিবে?

23. O বিন্দুতে সক্রিয় দুইটি বল $\overrightarrow{OA}\,.\tan A$ এবং $\overrightarrow{OB}\,.\tan B$ যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ বরাবর ক্রিয়াশীল, (A, B, OAB ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে $\angle OAB$, $\angle OBA$)। দেখাও যে, উহাদের লব্ধির মান $\overline{AB}\,.\tan A \tan B$, এবং উহা O হইতে $\overline{AB}$ এর লম্বাভিমুখে ক্রিয়াশীল।

24. দেখাও যে, ABC ত্রিভুজের $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ বরাবর ক্রিয়াশীল দুইটি বল (যাহাদের মান $\sec B$ এবং $\sec C$) এর লব্ধির মান ($\tan B+\tan C$) এবং উহা $\overrightarrow{AD}$ বরাবর ক্রিয়াশীল, যেখানে $\overline{BC}$ এর উপর $\overline{AD}$ লম্ব।

ANSWERS. (প্রশ্নমালা 2).

1. $15\sqrt{3}$ পা.-ভার ; 15 পা.-ভার। 2. প্রত্যেকটি উপাংশ : 24 গ্রাম-ভার। 3. $20(\sqrt{3}-1)$ পা.-ভার ; $10(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ পা.-ভার। 4. $50\sqrt{3}$ পা.-ভার ; 100 পা.-ভার। 5. 20 কি. গ্রা.-ভার ; $20\sqrt{2}$ কি. গ্রা.-ভার। 6. 9 কি. গ্রা.-ভার ; 18 কি. গ্রা.-ভার। 7. $200\sqrt{2}$ কি. গ্রা.-ভার ; প্রদত্ত অনুভূমিক দিকের সহিত $135°$ কোণে। 8. P ; $P\sqrt{2}$; $90°$. 9. লব্ধি $=5$ পা.-ভার ; প্রথমটির সহিত $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ কোণে। 10. লব্ধি $=\sqrt{238+120\sqrt{2}}$ পা.-ভার ; প্রথম বলের সহিত $\tan^{-1}\{(81+6\sqrt{2})/103\}$ কোণে। 11. 0 পা.-ভার ; $\sqrt{3}$ পা.-ভার ; লব্ধি $=\sqrt{3}$ পা.-ভার, প্রথম বলের লম্বাভিমুখে। 12. $2P\sqrt{3}$; $5P$ এর উপর লম্ব এবং $5P$ ও $7P$ এর মধ্যে অবস্থিত। 13. 15 গ্রা.-ভার ; পূর্ব হইতে উত্তরদিকে $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ কোণে। 14. $4\sqrt{7}$ পা.-ভার ; $\overrightarrow{AD}$ এর সহিত $\cot^{-1}(3\sqrt{3})$ কোণে নত। 15. 13 পা.-ভার ; পূর্ব হইতে উত্তরদিকে $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ কোণে। 16. 1 পা.-ভার ; $\overrightarrow{AC}$ এর দিকে। 17. 10 পা.-ভার ; $\overrightarrow{AD}$ এর দিকে। 22. $\overline{BD} : \overline{DC}=5:3$.

তৃতীয় অধ্যায়

সমতলীয় সমবিন্দু বলের সাম্যাবস্থা

[Equilibrium of concurrent coplanar forces.]

3-1. উপস্থাপন :

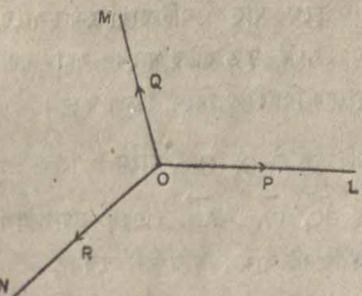
স্থিতিবিদ্যার প্রধান আলোচ্য বিষয় হইল, "বলের প্রয়োগে বস্তুর স্থিরাবস্থা"। এখন পর্যন্ত যাহা আলোচিত হইয়াছে, তাহা কেবলমাত্র সমতলীয় সমবিন্দু বলের লব্ধি নির্ণয়। এখানে কেবল "সমতলীয় সমবিন্দু বলের প্রয়োগে বস্তুর স্থিরাবস্থা" আলোচিত হইবে।

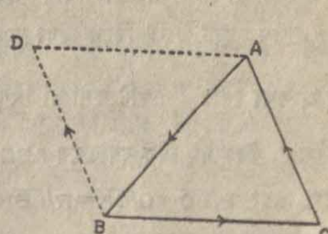
একটি বস্তুর উপর দুইটি বল প্রযুক্ত হওয়া সত্ত্বেও বস্তুটি স্থিরাবস্থায় থাকিবে, যদি (i) ঐ বল দুইটির মান সমান হয় ; (ii) উহাদের ক্রিয়ারেখা একই হয় ; এবং (iii) উহাদের অভিমুখিতা বিপরীত হয়। সুতরাং, "সমবিন্দু দুইটি বলের মান সমান হইলে, এবং উহারা বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়া করিলে, উহারা **সাম্যাবস্থায়** **(in equilibrium)** থাকিবে, এই কথা বলা হইবে। এইরূপ ক্ষেত্রে, উহাদের লব্ধির মান শূন্য।

সেইরূপ, কতিপয় সমতলীয় সমবিন্দু বল সাম্যাবস্থায় থাকিবে, যদি তাহাদের লব্ধি শূন্য হয়, এবং বিপরীতক্রমে।

3-2. "বল-ত্রিভুজ" এর প্রতিজ্ঞা (*Theorem of Triangle of forces*) :

একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বলের মান ও অভিমুখিতা যদি কোন ত্রিভুজের ক্রমানুসারে (*in order*) গৃহীত বাহু তিনটি দ্বারা সূচিত করা যায়, তবে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।





মনে করি, O বিন্দুতে তিনটি বল P, Q, R (মানে) যথাক্রমে $\vec{OL}$, $\vec{OM}$, ও $\vec{ON}$ বরাবর যুগপৎ ক্রিয়াশীল ; এবং ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ বাহু যথাক্রমে $\overline{OL}$, $\overline{OM}$

ও $\overline{ON}$ এর সমান্তরাল। অপিচ, বল তিনটি মানে ও অভিমুখিতায়, যথাক্রমে $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা নির্দেশিত। প্রমাণ করিতে হইবে যে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

BCAD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করি। তাহা হইলে, $\overline{BD}$ ও $\overline{CA}$ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হইবে। সুতরাং, Q বলটি মানে ও দিকে $\overrightarrow{BD}$ দ্বারা নির্দেশিত।

এখন, 'বলের সামান্তরিক সূত্র' অনুযায়ী, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{BA}$ হইবে; অর্থাৎ, P এবং Q এর লব্ধি মানে ও দিকে $\overrightarrow{BA}$ দ্বারা নির্দেশিত, এবং তাহা O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। কিন্তু, R বলটি মানে ও দিকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা নির্দেশিত, এবং তাহা O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এখন, P ও Q বলের লব্ধি R বলের সমান (মানে) এবং একই বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল হওয়ায়, ইহাদের মিলিত ক্রিয়াফল শূন্য ; অর্থাৎ, ইহারা সাম্যাবস্থায় আছে।

সুতরাং, তিনটি বল P, Q, R (মানে) **একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল** থাকিলে, এবং তাহারা ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয় দ্বারা মানে ও দিকে, অর্থাৎ, যথাক্রমে $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত হইলে,

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}.$$

মন্তব্য : 1. একটি কণা বা বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিবে, যদি উহাদের যে কোন দুইটির মানের সমষ্টি তৃতীয়টির মান অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, এবং যদি উহাদিগকে মানে ও অভিমুখিতায় কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটি দ্বারা ক্রমানুসারে সূচিত করা যায় ; **অথবা**, যদি দুইটির মানের সমষ্টি তৃতীয়টির মানের সমান হয়, এবং প্রথম দুইটি একই দিকে এবং তৃতীয়টি উহাদের বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে।

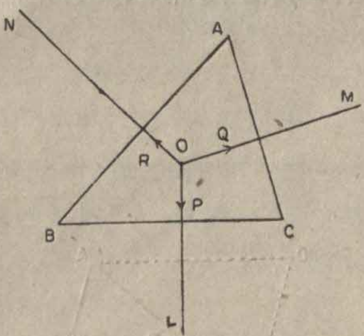
মন্তব্য : 2. একটি কণা বা বিন্দুতে তিনটি বল P, Q, R (মানে) ক্রিয়াশীল থাকিলে, উহাদের দিক্ যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ এর সমান্তরাল হইলে, এবং $P/\overline{BC}=Q/\overline{CA}=R/\overline{AB}$ হইলে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

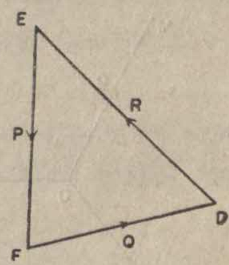
মন্তব্য : 3. একটি বিন্দু বা কণাতে ক্রিয়াশীল তিনটি বলের যে কোন দুইটির মানের সমষ্টি তৃতীয়টির মানের চেয়ে ক্ষুদ্রতর হইলে, তাহারা সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে না।

মন্তব্য : 4. তিনটি বল P, Q, R (মানে) কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল না হইয়া একটি দৃঢ় বস্তুতে সক্রিয় হইলে, এবং উহারা যথাক্রমে $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত হইলে, উহারা সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে না।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (Perpendicular Triangle of Forces) :

একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল কোন ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহুর সমানুপাতিক হইলে, এবং উহাদের দিক্ অনুরূপ বাহু তিনটির সহিত লম্বভাবে (প্রত্যেকটি বহির্মুখী, বা, প্রত্যেকটি অন্তর্মুখী অবস্থায়) থাকিলে, উহারা সাম্যাবস্থায় থাকিবে।





মনে করি, P, Q, R তিনটি বল O বিন্দুতে যথাক্রমে $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM}$ ও $\overrightarrow{ON}$ বরাবর ক্রিয়াশীল, এবং ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ এর সমানুপাতিক ও উহাদের উপর লম্বভাবে অবস্থিত (চিত্রে প্রত্যেকটি বহির্মুখী)। প্রমাণ করিতে হইবে যে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

এখন, ABC ত্রিভুজটি যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলে উহাকে ঘড়ির কাঁটার গতি-ক্রমে এক সমকোণে ঘুরাইলে, মনে করা যাক্ উহার অনুরূপ অবস্থান DEF হইল। তাহা হইলে, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$, $\overline{DE}$ যথাক্রমে, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ এর উপর লম্ব হইবে। এখন, নির্ধারিত স্কেলে, P, Q, R, এর মানগুলি যথাক্রমে $\overline{EF}$, $\overline{FD}$ ও $\overline{DE}$ দ্বারা সূচিত করা যাইবে।

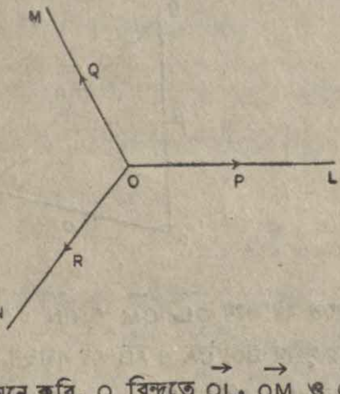
সুতরাং, O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R মানে ও দিকে DEF ত্রিভুজের $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FD}$ ও $\overrightarrow{DE}$ দ্বারা নির্দেশিত।

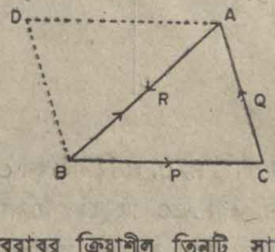
সুতরাং, 'বল-ত্রিভুজ' এর প্রতিজ্ঞানুসারে, তাহারা সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

দ্রষ্টব্য : "বল তিনটি একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হইয়া কোন ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহুর সমানুপাতিক হইলে এবং উহাদের দিক্ অনুরূপ বাহু তিনটির সহিত একই ক্রমে সমান কোণে (প্রত্যেকটি বহির্মুখী, অথবা, প্রত্যেকটি অন্তর্মুখী অবস্থায়) নত থাকিলে, উহারা সাম্যাবস্থায় থাকিবে"—ইহা পূর্ব পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যাইবে।

৪-৪. 'বল-ত্রিভুজ' এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা :
(Converse of the Triangle of Forces) :

সামতলিক সমবিন্দু তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিলে, সাধারণভাবে, তাহাদের একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশিত করা যাইবে।





মনে করি, O বিন্দুতে $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM}$ ও $\overrightarrow{ON}$ বরাবর ক্রিয়াশীল তিনটি সামতলিক বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহাদিগকে কোন একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশিত করা যাইবে।

$\overrightarrow{OL}$ এবং $\overrightarrow{OM}$ এর সমান্তরাল $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{CA}$ লইলাম, যেখানে নির্ধারিত এককে $\overline{BC}=P$; $\overline{CA}=Q$. এখন, BCAD সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি, এবং $\overline{BA}$ অঙ্কন করি।

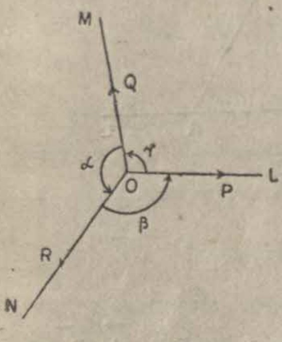
এখন, $\overline{CA}$ এবং $\overline{BD}$ সমান ও সমান্তরাল বলিয়া, Q বলটি মানে ও দিকে $\overrightarrow{BD}$ দ্বারা নির্দেশিত হইবে। এখন, 'বলের সামান্তরিক সূত্র' অনুসারে,

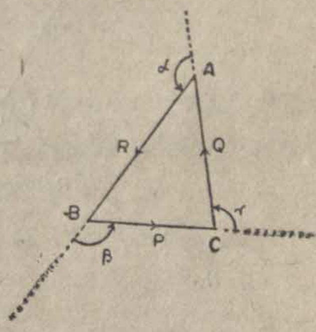
$\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{BA}$ হইবে; অর্থাৎ, P ও Q বলের লব্ধি মানে ও দিকে $\overrightarrow{BA}$ দ্বারা নির্দেশিত হইবে। যেহেতু, P, Q, R বল তিনটি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব, R বলটি, P ও Q এর লব্ধির সমান (মানে) এবং বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল হইবে। সুতরাং R বলটি মানে ও দিকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা নির্দেশিত হইবে। অতএব, নির্ধারিত স্কেলে P, Q, R বলকে যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা, (মানে ও অভিমুখিতায়, ক্রিয়ারেখায় নহে) নির্দেশিত করা যাইবে।

মন্তব্য: সামতলিক সমবিন্দু তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিলে, যদি উহাদের যে কোন দুইটির মানের সমষ্টি তৃতীয়টির মান অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে তাহাদিগকে একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশিত করা যাইবে; কিন্তু, যদি তাহাদের দুইটির মানের সমষ্টি তৃতীয়টির মানের সমান হয়, তবে ABC ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব হইবে না; (উহা একটি সরল রেখা হইয়া যাইবে)।

3·4. লামির প্রতিজ্ঞা (Lami's theorem):

একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি সামতলিক বল সাম্যাবস্থায় থাকিলে প্রত্যেকটি বল অপর দুইটির অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতে থাকিবে।





মনে করি, O বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি সামতলিক বল, P, Q, R যথাক্রমে $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM}$ ও $\overrightarrow{ON}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে, যেখানে, $\angle MON=\alpha$; $\angle NOL=\beta$; $\angle LOM=\gamma$. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{P}{\sin\alpha}=\frac{Q}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin\gamma}.$$

যেহেতু, তিনটি সামতলিক বল P, Q, R, O বিন্দুতে যথাক্রমে $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM}$ ও $\overrightarrow{ON}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে, যেখানে

$\angle MON=\alpha$; $\angle NOL=\beta$; $\angle LOM=\gamma$,

অতএব "বল-ত্রিভুজ এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা" অনুযায়ী নির্ধারিত স্কেলে P, Q, R বলকে যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা নির্দেশিত করা যাইবে, যেখানে,

$\angle BAC=\pi-\alpha$; $\angle ABC=\pi-\beta$; $\angle BCA=\pi-\gamma$.

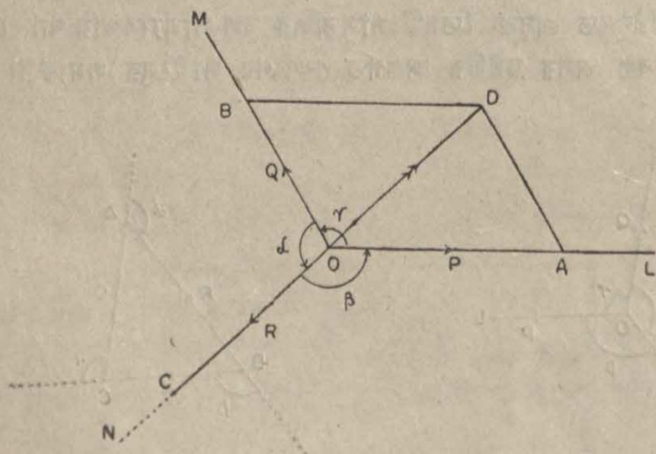
তাহা হইলে, এখন ত্রিকোণমিতির সাহায্যে, ABC ত্রিভুজ হইতে,

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle A}=\frac{\overline{CA}}{\sin \angle B}=\frac{\overline{AB}}{\sin \angle C};$$

অর্থাৎ, $\dfrac{P}{\sin(\pi-\alpha)}=\dfrac{Q}{\sin(\pi-\beta)}=\dfrac{R}{\sin(\pi-\gamma)}$;

বা, $\dfrac{P}{\sin\alpha}=\dfrac{Q}{\sin\beta}=\dfrac{R}{\sin\gamma}$.

বিকল্প প্রমাণ :



O বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি সামতলিক বল P, Q, R যথাক্রমে $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM}$ ও $\overrightarrow{ON}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে, যেখানে, $\angle MON=\alpha$; $\angle NOL=\beta$; $\angle LQM=\gamma$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$P : Q : R=\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

নির্ধারিত স্কেলে, $\overline{OA}=P$, $\overline{OB}=Q$ লইয়া OADB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি এবং $\overline{OD}$ কর্ণ অঙ্কন করি। বলের সামান্তরিক সূত্রানুযায়ী $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{OD}$ হইবে, অর্থাৎ, P এবং Q এর লব্ধি $\overline{OD}$ (মানে) হইবে, এবং তাহা $\overrightarrow{OD}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইবে। এক্ষণে, যেহেতু, P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং, P ও Q এর লব্ধি R এর সমান (মানে) হইবে, এবং R ঐ লব্ধির বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়া করিবে।

সুতরাং, পূর্বোক্ত স্কেলে $\overrightarrow{ON}$ বরাবর $\overline{OC}=R$ হইলে, $\overline{OC}$ এবং $\overline{OD}$ একই সরলরেখায় থাকিবে, এবং $\overline{OD}=R$ হইবে।

আবার, $\overline{OB}$ এবং $\overline{AD}$ সমান ও সমান্তরাল বলিয়া, $\overline{AD}=Q$.

এক্ষণে, ত্রিকোণমিতির সাহায্যে, OAD ত্রিভুজ হইতে পাই :

$$\frac{\overline{OA}}{\sin \angle ODA}=\frac{\overline{AD}}{\sin \angle AOD}=\frac{\overline{OD}}{\sin \angle OAD};$$

বা, $$\frac{P}{\sin \angle BOD}=\frac{Q}{\sin \angle AOD}=\frac{R}{\sin \angle OAD};$$

বা, $$\frac{P}{\sin (\pi-\alpha)}=\frac{Q}{\sin (\pi-\beta)}=\frac{R}{\sin (\pi-\gamma)};$$

বা, $$\frac{P}{\sin \alpha}=\frac{Q}{\sin \beta}=\frac{R}{\sin \gamma}.$$

3-5. লামির উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse of Lami's Theorem) :

একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি সামতলিক বল যদি এইরূপ হয় যে, উহাদের প্রত্যেকটি অপর দুইটির অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতী, তাহা হইলে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

মনে করি, O বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি সামতলিক বল P, Q, R যথাক্রমে $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM}$ ও $\overrightarrow{ON}$ বরাবর ক্রিয়াশীল, এবং

$$\frac{P}{\sin \angle MON}=\frac{Q}{\sin \angle NOL}=\frac{R}{\sin \angle LOM}. \quad \cdots \quad (1)$$

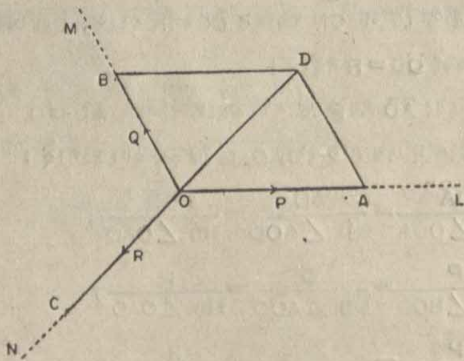
মনে করি, $\overline{OC}=R$. বর্ধিত $\overline{CO}$ হইতে $\overline{OD}=R$ লই, এবং OADB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি, যাহার একটি কর্ণ $\overline{OD}$, এবং A ও B যথাক্রমে $\overrightarrow{OL}$ ও $\overrightarrow{OM}$ এর উপর অবস্থিত।

এখন, OAD ত্রিভুজ হইতে,

$$\frac{\overline{OA}}{\sin\angle ODA} = \frac{\overline{AD}}{\sin\angle AOD} = \frac{\overline{OD}}{\sin\angle OAD};$$

বা, $$\frac{\overline{OA}}{\sin\angle DOM} = \frac{\overline{AD}}{\sin\angle AOD} = \frac{R}{\sin\angle QAD};$$

বা, $$\frac{\overline{AO}}{\sin\angle MON} = \frac{\overline{AD}}{\sin\angle NOL} = \frac{R}{\sin\angle LOM}. \quad \ldots \quad (2)$$



সুতরাং, (1) এবং (2) তুলনা করিয়া পাই, $\overline{OA}=P$; $\overline{AD}=Q$, বা, $\overline{OB}=Q$.

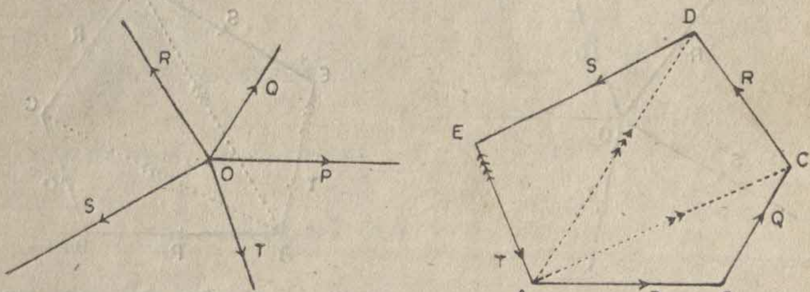
আবার, বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে, $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $\overrightarrow{OD}$, অর্থাৎ, P ও Q বলের লব্ধি মানে ও দিকে $\overrightarrow{OD}$ দ্বারা নির্দেশিত। তাহা হইলে, P ও Q বলের লব্ধি মানে R এর সমান এবং R এর বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল। সুতরাং, P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

3-6. "বল-বহুভুজের উপপাদ্য" (Theorem of polygon of forces) :

কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল যে কোন সংখ্যক সামতলিক বলের মান ও অভিমুখিতা যদি কোন একটি আবদ্ধ (closed) বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুসমূহের দ্বারা নির্দেশিত হয়, তাহা হইলে, ঐ বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল সামতলিক বলসমূহ P, Q, R, S, T মানে ও দিকে আবদ্ধ পঞ্চভুজ ABCDEA এর ক্রমানুসারে গৃহীত $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{EA}$ দ্বারা নির্দেশিত। প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহারা সাম্যাবস্থায় আছে।

$\overline{AC}$ ও $\overline{AD}$ অঙ্কন করিলাম। এক্ষণে, বল-ত্রিভুজের উপপাদ্য অনুসারে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{AC}$, অর্থাৎ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{AD}$, অর্থাৎ, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$; এবং $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{AE}$, অর্থাৎ, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$. সুতরাং, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$; অর্থাৎ, O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P, Q, R, S এর লব্ধি মানে ও দিকে $\overrightarrow{AE}$ দ্বারা নির্দেশিত, এবং তাহা O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। অবশিষ্ট T বলের মান ও দিক্ $\overrightarrow{EA}$ দ্বারা নির্দেশিত, এবং ইহাও O বিন্দুতে



ক্রিয়াশীল। তাহা হইলে, P, Q, R, S বলসমূহের লব্ধি, T বলের সমান (মানে) এবং একই O বিন্দুতে, উক্ত লব্ধি ও T পরস্পর বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল। সুতরাং, তাহারা সাম্যাবস্থায় আছে।

$$\text{ভেক্টর প্রতীকে, } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{0}.$$

মন্তব্য : দুই এর অধিক যে কোন সংখ্যক বলের ক্ষেত্রে এই উপপাদ্যটি অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যাইবে।

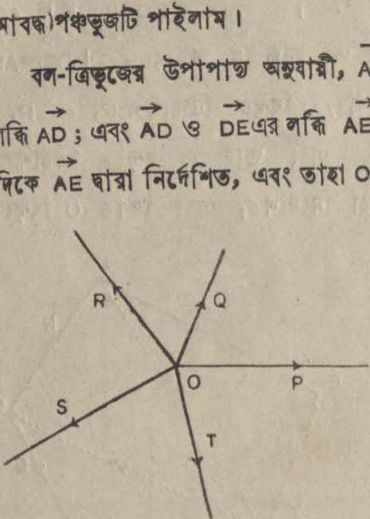
3-7. 'বল-বহুভুজের উপপাদ্য''-এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা : (Converse of the Theorem of Polygon of Forces) :

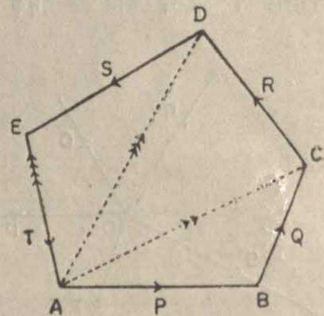
কোনও বিন্দুতে প্রযুক্ত যে কোন সংখ্যক বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে উহাদিগকে একটি আবদ্ধ বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশিত করা যাইবে।

মনে করি, P, Q, R, S, T বলসমূহ O বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে। এখন, P, Q, R, S বলসমূহের অভিমুখিতার সমান্তরাল পরপর $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ও $\overline{DE}$ টানিলাম, যেখানে নির্ধারিতে স্কেলে, P, Q, R ও S যথাক্রমে, মানে

ও দিকে $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, ও $\overrightarrow{DE}$ দ্বারা নির্দেশিত। $\overline{AE}$ অঙ্কন করিয়া ABCDEA আবদ্ধ পঞ্চভুজটি পাইলাম।

বল-ত্রিভুজের উপাপাদ্য অনুযায়ী, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{AD}$; এবং $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{DE}$এর লব্ধি $\overrightarrow{AE}$. তাহা হইলে, P, Q, R, S এর লব্ধিমানে ও দিকে $\overrightarrow{AE}$ দ্বারা নির্দেশিত, এবং তাহা O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।





এখন, যেহেতু, P, Q, R, S, T বলসমূহ O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব, T বলটি মানে ওদিকে অতি অবশ্যই $\overrightarrow{EA}$ দ্বারা নির্দেশিত হইবে ; (যদিও ইহার প্রয়োগবিন্দু O)। সুতরাং, P, Q, R, S, T বলসমূহ ABCDEA আবদ্ধ পঞ্চভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুসমূহ দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশিত হইবে।

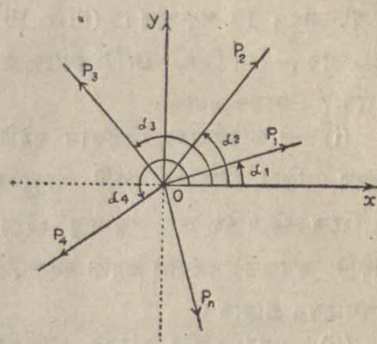
মন্তব্য : দুই এর অধিক যে কোন সংখ্যক বলের ক্ষেত্রে এই উপপাদ্যটি অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যাইবে।

দ্রষ্টব্য : একটি বহুভুজের (ভুজের সংখ্যা>3) অনুরূপ বাহুগুলির সমান্তরাল বাহুযুক্ত বহুভুজ উহার সহিত সদৃশ নাও হইতে পারে ; সেইজন্য এই উপপাদ্যের ক্ষেত্রে বলসমূহকে যে কোন বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা নির্দেশিত করা যাইবে না ; (যদিও বাহুগুলি বলগুলির সহিত ক্রমানুসারে সমান্তরাল)।

3-8. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত সামতলিক বলসমূহের সাম্যাবস্থায় থাকিবার (i) প্রয়োজনীয় (necessary) এবং (ii) যথেষ্ট (sufficient) শর্ত নির্ণয় :

মনে করি, P_1, P_2, P_3,……, P_n সামতলিক বলসমূহ O বিন্দুতে প্রযুক্ত, এবং তাহাদের সমতলে $\overrightarrow{Ox}$ ও $\overrightarrow{Oy}$ দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা।

মনে করি, P_1, P_2, P_3,……, P_n বলসমূহ $\overrightarrow{Ox}$ এর সহিত একই ক্রমে যথাক্রমে α_1, α_2, α_3,……, α_n কোণসমূহ উৎপন্ন করে, এবং উহাদের লব্ধি R, $\overrightarrow{Ox}$ এর সহিত একই ক্রমে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহা হইলে,



$$R\cos\theta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \cdots + P_n\cos\alpha_n$$

$$=\sum_{r=1}^{n} P_r\cos\alpha_r = X, \text{ (ধরি) ;}$$

$$R\sin\theta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \cdots + P_n\sin\alpha_n$$

$$=\sum_{r=1}^{n} P_r\sin\alpha_r = Y, \text{ (ধরি) ।}$$

$$\therefore\ R^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=X^2+Y^2\ ;$$

$$\text{বা, } R^2 = X^2+Y^2. \qquad \cdots \qquad (1)$$

(i) **প্রয়োজনীয় শর্ত :**

যদি P_1, P_2, P_3,……, P_n বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে $R=0$; বা, $X^2+Y^2=0$; বা, $X=0$, $Y=0$; অর্থাৎ, বলসমূহের সমতলে যে কোন দুইটি পরস্পর লম্বাভিমুখে উহাদের বিশ্লেষিতাংশের বীজগণিতীয় যোগফল আলাদা আলাদা ভাবে উভয়েই শূন্য হইবে।

(ii) **যথেষ্ট শর্ত :**

মনে করি, $X=0$ এবং $Y=0$ দেওয়া আছে। তাহা হইলে, $R=0$; অর্থাৎ বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং, বলসমূহের সাম্যাবস্থায় থাকিবার যথেষ্ট শর্ত: $X=0$, $Y=0$.

সুতরাং, একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত সামতলিক বলসমূহের সাম্যাবস্থায় থাকিবার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হইল, "উহাদের সমতলে যে কোন দুইটি লম্বাভিমুখে তাহাদের বিশ্লেষিতাংশের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হইবে"।

3-9. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

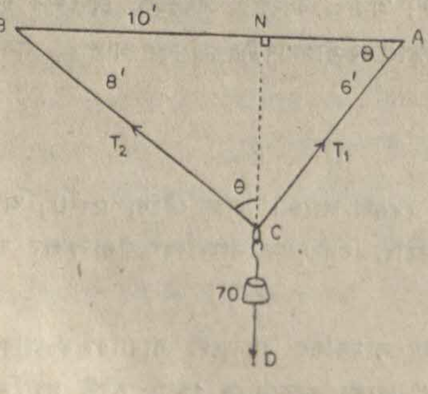
উদাহরণ 1. (i) 3 গ্রা.-ভার ; 5 গ্রা-ভার ; 4 গ্রা.-ভার ; (ii) 6 পা.-ভার ; 4 পা.-ভার ; 10 পা.-ভার : (iii) 15 কি. গ্রা.-ভার ; 6 কি. গ্রা.-ভার ; 8 কি. গ্রা.-ভার ;—বল তিনটি একটি কণাতে প্রযুক্ত হইলে, কণাটি কি স্থিরাবস্থায় থাকিতে পারে ? কারণ দেখাও।

(i) প্রদত্ত বলত্রয়ের যে কোন দুইটির মানের যোগফল তৃতীয়টির মান অপেক্ষা বৃহত্তর বলিয়া, উহাদের একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশিত করা সম্ভবপর হইবে ; এবং তখন উহাদের অনুরূপ অভিমুখিতায় একটি কণাতে বলগুলি প্রযুক্ত হইলে, কণাটি স্থির থাকিবে। ইহা বল-ত্রিভুজের উপপাদ্যের প্রয়োগ।

(ii) প্রথম দুইটির মানের যোগফল তৃতীয়টির সমান বলিয়া, একটি কণাতে প্রথম দুইটিকে একই অভিমুখিতায়, এবং তৃতীয়টিকে তাহাদের বিপরীত অভিমুখিতায় প্রয়োগ করিলে কণাটি স্থির থাকিবে।

(iii) বল তিনটি কখনই সাম্যাবস্থায় থাকিবে না ; কারণ, এখানে দ্বিতীয় ও তৃতীয় বলের মানের যোগফল প্রথমটির চেয়ে ক্ষুদ্রতর। সুতরাং, উহাদের দ্বারা কোন ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভবপর হইবে না। সেইজন্য 'বল-ত্রিভুজের' উপাপাদ্য এখানে প্রয়োগ করা সম্ভবপর নহে। সুতরাং, উহারা কণাটিকে স্থিরাবস্থায় রাখিতে পারে না।

উদাহরণ 2. 70 পাউণ্ড-ভার এর একটি বস্তু 6 ফুট ও 8 ফুট দীর্ঘ দুইটি দড়িতে বাঁধিয়া দড়ির অপর প্রান্তদ্বয় একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত 10 ফুট ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে সংযুক্ত করিয়া দেওয়া হইল। দড়ি দুইটির টান নির্ণয় কর।



পার্শ্ববর্তী চিত্রে, $\overline{AB}$ অনুভূমিকরেখা ; বস্তুর অবস্থান C এতে, যেখানে, $\overline{AB}=10$ ফুট ; $\overline{BC}=8$ ফুট ; $\overline{AC}=6$ ফুট এবং 70 পা.-ভার উল্লম্ব-রেখা $\overrightarrow{CD}$ বরাবর নীচের দিকে ক্রিয়াশীল। মনে করি, CA ও CB দড়ির টান যথাক্রমে T_1 এবং T_2 পাউণ্ড-ভার।

যেহেতু, $6^2+8^2=10^2$ অর্থাৎ, $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$, সুতরাং, $\angle ACB=90°$.

ধরি, $\angle CAB=\theta$. এখন, তিনটি বল, T_1, T_2 ও 70 পাউণ্ড-ভার C বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে। অতএব, লামির উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\frac{T_1}{\sin\angle BCD}=\frac{T_2}{\sin\angle ACD}=\frac{70}{\sin\angle ACB};$$

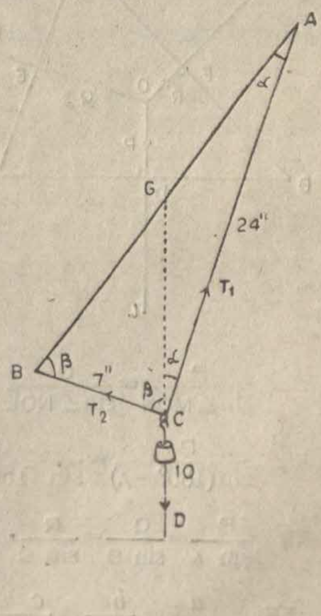
$$\text{বা,}\quad \frac{T_1}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{T_2}{\sin(90^\circ+\theta)}=\frac{70}{\sin 90^\circ};$$

$$\therefore\quad T_1=70\sin\theta=70\times\frac{8}{10}=56;$$

$$T_2=70\cos\theta=70\times\frac{6}{10}=42.$$

সুতরাং, CA ও CB দড়ির টান যথাক্রমে 56 পা.-ভার ও 42 পা.-ভার।

উদাহরণ 3. 10 গ্রা.-ভার এর একটি বস্তু 7 ইঞ্চি ও 24 ইঞ্চি দীর্ঘ দুইটি দড়িতে বাঁধিয়া উহাদের অপর প্রান্ত দুইটি একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে যুক্ত করায় বস্তুটি দণ্ডের মধ্যবিন্দুর ঠিক নীচে স্থিরাবস্থায় ঝুলিয়া থাকিল এবং উভয় দড়িতে টান পড়িল। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য 25 ইঞ্চি হইলে দড়ির টান নির্ণয় কর। **[W. B. H. S. 1956]**



পার্শ্ববর্তী চিত্রে, AB দণ্ডটির অবস্থান, বস্তুর অবস্থান C-এতে, যেখানে, $\overline{AB}=25$ ইঞ্চি; $\overline{BC}=7$ ইঞ্চি; এবং $\overline{AC}=24$ ইঞ্চি; অপিচ, 10 গ্রা.-ভার উল্লম্বভাবে নীচের দিকে ($\overrightarrow{CD}$ বরাবর) ক্রিয়াশীল। মনে করি, CA এবং CB দড়ির টান যথাক্রমে T_1 এবং T_2 গ্রাম-ভার।

এখন, যেহেতু, $7^2+24^2=25^2$;

অর্থাৎ, $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$,

$\therefore\ \angle BCA=90^\circ$.

$\overline{AB}$ এর মধ্যবিন্দু G হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\overline{GC}$ উল্লম্বভাবে অবস্থিত।

আবার, জ্যামিতি থেকে, $\overline{AG}=\overline{BG}=\overline{GC}$.

ধরি, $\angle CAG=\alpha$ এবং $\angle CBG=\beta$.

$\therefore\ \angle GCA=\alpha;\quad \angle GCB=\beta$.

এখন, T_1, T_2 এবং 10 গ্রাম-ভার বল তিনটি C বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া, লামির উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\frac{T_1}{\sin \angle BCD} = \frac{T_2}{\sin \angle ACD} = \frac{10}{\sin \angle ACB};$$

বা, $$\frac{T_1}{\sin (180° - \beta)} = \frac{T_2}{\sin (180° - \alpha)} = \frac{10}{\sin 90°};$$

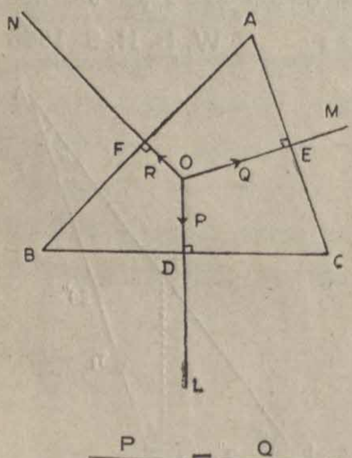
$$\therefore \; T_1 = 10 \sin \beta = 10 \times \overline{AC}/\overline{AB} = 10 \times 24/25 = 9\tfrac{3}{5};$$

$$T_2 = 10 \sin \alpha = 10 \times \overline{BC}/\overline{AB} = 10 \times 7/25 = 2\tfrac{4}{5}.$$

সুতরাং, CA ও CB দড়ির টান, যথাক্রমে, $9\frac{3}{5}$ গ্রা.-ভার ও $2\frac{4}{5}$ গ্রা.-ভার।

উদাহরণ 4. সামতলিক তিনটি বল P, Q, R কোনও ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয় $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ এর উপর যথাক্রমে লম্বাভিমুখে ক্রিয়াশীল হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে,

$$P : Q : R = a : b : c, \text{ যেখানে, } \overline{BC} = a, \; \overline{CA} = b, \; \overline{AB} = c.$$



মনে করি, P, Q, বল দুইটি যথাক্রমে O বিন্দুতে $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM}$ বরাবর ক্রিয়াশীল, যেখানে, $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM}$, যথাক্রমে $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এর উপর লম্ব। যেহেতু, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে, তৃতীয় বলটি O বিন্দুতে $\overrightarrow{ON}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইবে, যেখানে, $\overline{AB}$ এর উপর $\overline{OF}$ লম্ব। তাহা হইলে, লামির উপপাদ্য অনুযায়ী—

$$\frac{P}{\sin \angle MON} = \frac{Q}{\sin \angle NOL} = \frac{R}{\sin \angle LOM};$$

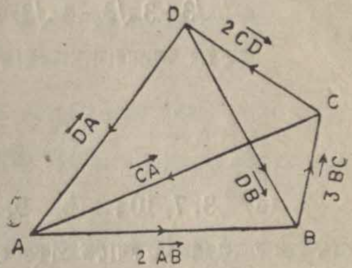
বা, $$\frac{P}{\sin (180° - A)} = \frac{Q}{\sin (180° - B)} = \frac{R}{\sin (180° - C)}$$

বা, $$\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}.$$

কিন্তু, $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$\therefore \; P : Q : R = a : b : c.$$

উদাহরণ 5. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত ছয়টি সামতলিক বল, ABCD চতুর্ভুজের $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$, $\vec{CA}$ ও $\vec{DB}$ এর সমান্তরাল বরাবর সক্রিয়; এবং ইহারা যথাক্রমে $2\vec{AB}$, $3\vec{BC}$, $2\vec{CD}$, $\vec{DA}$, $\vec{CA}$ ও $\vec{DB}$ দ্বারা সূচিত। দেখাও যে, এই বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে।



$$2\vec{AB}+3\vec{BC}+2\vec{CD}+\vec{DA}+\vec{CA}+\vec{DB}$$

$$=(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA})$$

$$+(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA})+(\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DB}).$$

বল-বহুভুজের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}=\vec{0};$$

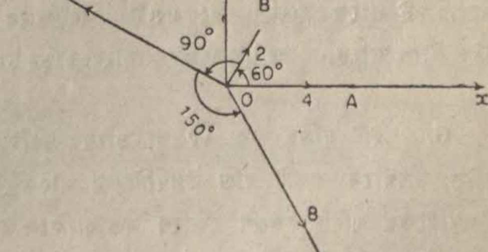
বল-ত্রিভুজের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{0};\ \vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DB}=\vec{0}.$$

$$\therefore\ 2\vec{AB}+3\vec{BC}+2\vec{CD}+\vec{DA}+\vec{CA}+\vec{DB}=\vec{0}.$$

অতএব, প্রদত্ত বলসমূহ, একই বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে।

উদাহরণ 6. একটি বিন্দুতে চারিটি সামতলিক বল, 4, 2, $6\sqrt{3}$, 8 পাউণ্ড-ভার প্রযুক্ত, যেখানে, একই ক্রমে, প্রথম ও দ্বিতীয়, দ্বিতীয় ও তৃতীয় এবং তৃতীয় ও চতুর্থ বলের মধ্যবর্তী কোণ যথাক্রমে, 60°, 90° ও 150°. দেখাও যে, উহারা সাম্যাবস্থায় আছে।



মনে করি, বলসমূহ O বিন্দুতে প্রযুক্ত, এবং প্রথম বলটি $\vec{Ox}$ বরাবর ক্রিয়াশীল।

এখন $\vec{Ox}$ বরাবর এই বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশের বীজগণিতীয় যোগফল

$$=[4\cos 0°+2\cos 60°+6\sqrt{3}\cos(90°+60°)$$
$$+8\cos(60°+90°+150)]\text{ পা.-ভার}$$
$$=(4+1-9+4)\text{ পা.-ভার}=0\text{ পা.-ভার}।$$

এবং $\overrightarrow{Ox}$ এর লম্বাভিমুখে বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশের বীজগণিতীয় যোগফল

$=[4 \sin 0° + 2 \sin 60° + 6\sqrt{3} \sin (90° + 60°)$
$+ 8 \sin (60° + 90° + 150°)]$ পা.-ভার

$= (\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3})$ পা.-ভার $= 0$ পা.-ভার

সুতরাং বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে।

প্রশ্নমালা 3.

1. (a) 3, 7, 10 ; (b) 5, 7, 10 ; (c) 5, 7, 15 অনুপাতের তিনটি সামতলিক বল একটি কণাতে প্রযুক্ত হইয়া কি সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে? যুক্তিসহ উত্তর লিখ। [W.B.H.S. 1964]

2. একটি কণাতে প্রযুক্ত তিনটি সামতলিক বল, 3P, 4P ও 7P সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে কিনা পরীক্ষা কর। [W.B.H.S. 1960]

3. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি সামতলিক বলের অনুপাত 4 : 9 : 11. ইহারা সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে কিনা পরীক্ষা কর।

4. 36 পাউণ্ড-ভারের একটি বস্তু 16 ফুট ও 12 ফুট দীর্ঘ দুইটি দড়ির সাহায্যে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে। দড়ি দুইটির অপর প্রান্ত একই অনুভূমিক রেখায় 20 ফুট ব্যবধানে সংযুক্ত থাকিলে, দড়ির টানগুলি নির্ণয় কর।

5. 6 ফুট ও 8 ফুট দীর্ঘ দুইটি দড়ির এক প্রান্তে 80 পা.-ভারের একটি বস্তু বাঁধিয়া ঝুলাইয়া দেওয়া হইল, যেখানে দড়ির অপর প্রান্ত 10 ফুট দীর্ঘ একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে সংযুক্ত এবং দণ্ডটি এমন ভাবে আছে যে, বস্তুটি দণ্ডের মধ্যবিন্দুর ঠিক নীচে আছে। বল-ত্রিভুজের সাহায্যে দড়ির টানগুলি বাহির কর। [W.B.H.S. 1969]

6. দুইটি দড়ির দ্বারা W পা.-ভারের একটি বস্তুকে উল্লম্বভাবে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল, যেখানে একটি দড়ি উল্লম্বদিকের সহিত 30° কোণে নত। অপর দড়িটি উল্লম্বদিকের সহিত কিরূপ কোণে নত থাকিলে উহার টান ক্ষুদ্রতম হইবে? তখন দড়ির টানগুলি কত কত হইবে?

7. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং O বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q, R, যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে। দেখাও যে,

$$P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C.$$

8. ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I এবং I বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q, R যথাক্রমে $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে। দেখাও যে,

$$P : Q : R = \cos\tfrac{1}{2}A : \cos\tfrac{1}{2}B : \cos\tfrac{1}{2}C.$$

9. একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, এবং উহারা পরস্পরের সহিত 120° কোণ উৎপন্ন করে, তবে 'বল-ত্রিভুজ'-এর উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, উহারা পরস্পর সমান।

10. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দু A এতে প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q, R যথাক্রমে, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, ও $\overrightarrow{CA}$ বরাবর সক্রিয়। যদি উহারা সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে দেখাও যে, $P : Q : R = \overline{CD} : \overline{CB} : \overline{BD}$.

11. W ভারের একটি বস্তুকে একটি মসৃণ নততলের উপর অনুভূমিক রেখায় ক্রিয়াশীল P একক বল, অথবা, নততল বরাবর ক্রিয়াশীল Q একক বল স্থিরাবস্থায় রাখিতে পারে। যদি এই দুইক্ষেত্রে নততলের উপর বস্তুটির চাপ যথাক্রমে R ও S একক হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{Q^2}-\frac{1}{P^2}=\frac{1}{W^2}; \text{ এবং } RS=W^2.$$

12. l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি হাল্কা দড়ির দুইপ্রান্ত একটি অনুভূমিক তলের (a দূরত্বে স্থিত) দুইটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে এবং একটি মসৃণ হাল্কা আংটির মধ্য দিয়া দড়িটি নেওয়া হইয়াছে। ঐ আংটি হইতে W ভারের একটি বস্তু অবাধে ঝুলিতে থাকিলে, এবং দড়িটির টান T একক হইলে, দেখাও যে,

$$T=\frac{lW}{2\sqrt{l^2-a^2}}, \quad (l>a).$$

13. ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি সামতলিক বল, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ দ্বারা নির্দেশিত হইলে, দেখাও যে, উহারা সাম্যাবস্থায় থাকিবে। **[W. B. H. S. 1967]**

14. ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ও $\overline{DA}$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে, E, F, G, H. একটি কণাতে প্রযুক্ত তিনটি বল, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{FH}$ ও $\overrightarrow{DB}$ দ্বারা নির্দেশিত। প্রমাণ কর যে, উহারা সাম্যাবস্থায় আছে। **[W. B. H. S. 1963]**

15. ABCD সামান্তরিকের অভ্যন্তরস্থ O একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, O বিন্দুতে প্রযুক্ত এবং $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}$ ও $\overrightarrow{DO}$ দ্বারা নির্দেশিত চারিটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

16. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত পাঁচটি সামতলিক বল ABCD চতুর্ভুজের $\vec{AB}$, $2\vec{BC}$, $2\vec{CD}$, $\vec{DA}$ ও $\vec{DB}$ দ্বারা নির্দেশিত। দেখাও যে, ঐ বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে।

17. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O ; P, Q, R তিনটি বল O বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়া যথাক্রমে $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ বরাবর ক্রিয়াশীল, এবং

$$P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C.$$

দেখাও যে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

18. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে, এবং তাহাদের অনুপাত $\sqrt{3}+1 : 2 : \sqrt{2}$. প্রথম এবং দ্বিতীয় বলের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। অপর মধ্যবর্তী কোণগুলি কি কি ?

19. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল চারিটি সামতলিক বল P একক উত্তরাভিমুখে, Q একক পশ্চিমাভিমুখে, 4 একক দক্ষিণ-পশ্চিমাভিমুখে এবং 3 একক পূর্বাভিমুখে প্রযুক্ত। যদি উহারা সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে P এবং Q এর মান নির্ণয় কর।

[W. B. H. S. 1967]

20. l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি হাল্কা দড়ির দুইপ্রান্ত একটি অনুভূমিক দণ্ডের a $(a<l)$ দূরত্বে A এবং B তে সংযুক্ত আছে এবং ইহাতে W ভারের একটি মসৃণ আংটি পরানো আছে। এই আংটিতে P বল অনুভূমিক দিক বরাবর এমন ভাবে প্রয়োগ করা হইল যেন উহা ঠিক B এর নীচে স্থিরাবস্থায় থাকে। দেখাও যে, $P = aW/l$.

[W. B. H. S. Comp. 1967]

ANSWERS. (প্রশ্নমালা 3)

1. (a). সাম্যাবস্থা সম্ভবপর (ছোট বল দুইটি একদিকে, বৃহত্তমটি বিপরীত দিকে) ; (b). 'বল-ত্রিভুজের' সাহায্যে সাম্যাবস্থা সম্ভবপর ; (c). সাম্যাবস্থা অসম্ভব, কারণ 'বল-ত্রিভুজটি' অস্তিত্বহীন। 2. ছোট বল দুইটি একদিকে, এবং বৃহত্তমটি বিপরীত দিকে সক্রিয় হইলে, সাম্যাবস্থায় থাকিবে। 3. বলত্রিভুজের সূত্রানুযায়ী, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে। 4. 21·6 পা.-ভার ; 28·8 পা.-ভার। 5. 48 পা.-ভার ; 64 পা.-ভার। 6. 60° ; ($\frac{1}{2}W\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}W$) পা.-ভার। 18. 150° ; 75° ; 135°. 19. $P=2\sqrt{2}$; $Q=3-2\sqrt{2}$.

চতুর্থ অধ্যায়

সমান্তরাল বলের লব্ধি

(Resultant of parallel forces)

4-1. উপস্থাপন :

দুই বা ততোধিক বলের ক্রিয়ারেখা পরস্পর সমান্তরাল হইলে, ঐ বলসমূহকে সমান্তরাল বল বলা হইবে। সমান্তরাল বল দুই শ্রেণীর :—(*i*) **সদৃশ (like)** এবং (*ii*) **অসদৃশ (unlike).** দুইটি সমান্তরাল বলের অভিমুখিতা একই হইলে উহাদিগকে **সদৃশ সমান্তরাল বল (like parallel forces)** বলা হইবে ; কিন্তু, দুইটি সমান্তরাল বলের অভিমুখিতা পরস্পর বিপরীত হইলে, উহাদিগকে **অসদৃশ সমান্তরাল বল (unlike parallel forces)** বলা হইবে।

দুই বা ততোধিক সমান্তরাল বল কোনও কণা (বা, বিন্দু) এর উপর প্রযুক্ত হইতে পারে না ; কারণ উহাদের ক্রিয়ারেখা পরস্পরচ্ছেদী নহে ; সমরেখও নহে। সেইজন্য পূর্ববর্তী আলোচনা অনুযায়ী উহাদের লব্ধি নির্ণয় করা যাইবে না।

কোনও দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি এবং দুইটি অসদৃশ **অসমান** সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় পদ্ধতি এই অধ্যায়ের পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলিতে দেওয়া হইল।

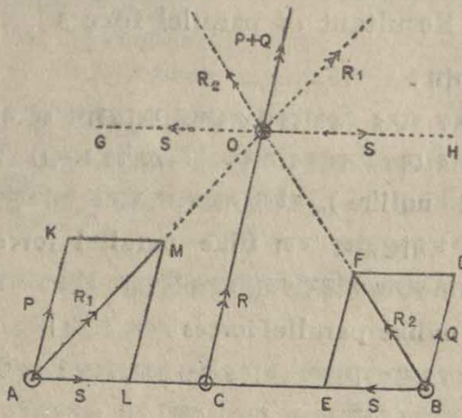
দুইটি সমান অসদৃশ সমান্তরাল বলকে **যুগ্মবল (couple)** বলা হয়। যুগ্মবল সম্বন্ধে আলোচনা ষষ্ঠ অধ্যায়ে দেওয়া হইবে।

4-2. দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয়।

মনে করি, একটি দৃঢ় বস্তুর A ও B বিন্দুতে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল, P এবং Q, সক্রিয়, এবং মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে উহারা যথাক্রমে, $\vec{AK}$ ও $\vec{BD}$ দ্বারা সূচিত। $\overline{AB}$ অঙ্কন করি। এখন, A বিন্দুতে $\vec{AB}$ বরাবর একটি বল S এবং B বিন্দুতে $\vec{BA}$ বরাবর একটি বল S একই সঙ্গে প্রয়োগ করা হইল, যেখানে $\overline{AL}=S$ এবং $\overline{BE}=S$. ALMK ও BEFD সামান্তরিকদ্বয় সম্পূর্ণ করি, এবং $\overline{AM}$ ও $\overline{BF}$ কর্ণদ্বয় অঙ্কন করি।

তাহা হইলে, A বিন্দুতে P ও S বলের লব্ধি $\vec{AM}$ এবং B বিন্দুতে Q ও S বলের লব্ধি $\vec{BF}$ দ্বারা নির্দেশিত হইবে। ধরি, $\overline{AM}=R_1$ এবং $\overline{BF}=R_2$.

মনে করি, বর্ধিত $\overline{AM}$ ও $\overline{BF}$ পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দু দিয়া $\overline{AB}$ এর সমান্তরাল $\overline{GH}$ এবং $\overline{AK}$ এর সমান্তরাল $\overline{CO}$ অঙ্কন করি, যেখানে, $\overline{AB}$ এর উপর C অবস্থিত।



এখন, R_1 এর ক্রিয়াবিন্দু A হইতে $\overrightarrow{AO}$ বরাবর O বিন্দুতে এবং R_2 এর ক্রিয়া-বিন্দু B হইতে $\overrightarrow{BO}$ বরাবর O বিন্দুতে সরাইয়া লই। O বিন্দুতে R_1 এর উপাংশ P এবং S, যথাক্রমে, $\overrightarrow{CO}$ ও $\overrightarrow{OH}$ বরাবর সক্রিয়; এবং O বিন্দুতে R_2 এর উপাংশ Q এবং S, যথাক্রমে, $\overrightarrow{CO}$ ও $\overrightarrow{OG}$ বরাবর সক্রিয় হইবে। এখন, $\overrightarrow{OH}$ বরাবর S বল এবং $\overrightarrow{OG}$ বরাবর S বল বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল হওয়ায়, উহাদের ক্রিয়াফল শূন্য হইবে। কিন্তু, $\overrightarrow{CO}$ বরাবর P এবং Q এর লব্ধি P+Q হইবে, যাহা O বিন্দুতে $\overrightarrow{CO}$ বরাবর ক্রিয়াশীল থাকিবে। এখন, P+Q বলের ক্রিয়াবিন্দু O হইতে $\overrightarrow{OC}$ বরাবর C বিন্দুতে সরাইয়া লওয়া হইল।

তাহা হইলে, P এবং Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি R হইলে, $R = P + Q$ এবং ইহা C এতে $\overrightarrow{CO}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইবে, যেখানে $\overline{AB}$ এর মধ্যে C বিন্দু অবস্থিত।

আবার, $\triangle ALM$ ও $\triangle ACO$ সদৃশ বলিয়া,

$$\overline{AL}/\overline{AC} = \overline{LM}/\overline{CO};$$

বা, $P.\overline{AC} = S.\overline{CO}$.

অধিকন্তু, $\triangle BEF$ এবং $\triangle BCO$ সদৃশ বলিয়া,

$\overline{BE}/\overline{BC}=\overline{EF}/\overline{CO}$;

বা, $Q.\overline{BC}=S.\overline{CO}$.

$\therefore\ P.\overline{AC}=Q.\overline{BC}$.

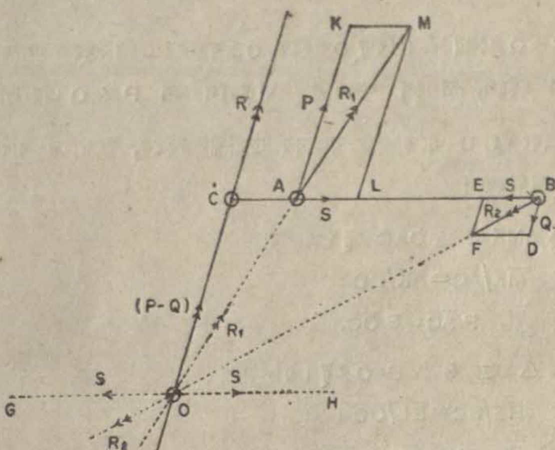
এখান হইতে, C বিন্দুর অবস্থান পাওয়া যাইবে।

মন্তব্য: P এবং Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির পরিমাণ R হইলে, $R=P+Q$; এবং উহার অভিমুখিতা P ও Q বলের অভিমুখিতায় ; এবং উহার ক্রিয়া বিন্দু C ($\overline{AB}$ এর মধ্যস্থ), যেখানে, $P:Q=\overline{BC}:\overline{AC}$.

এখন, $P=Q$ হইলে, $\overline{AB}$ এর মধ্যবিন্দু C হইবে। $P>Q$ হইলে, $P/Q>1$; অর্থাৎ, $\overline{BC}>\overline{AC}$; অর্থাৎ, বৃহত্তর বল P এর নিকটতর C বিন্দু হইবে।

4-3. দুইটি অসদৃশ অসমান বলের লব্ধি নির্ণয়।

মনে করি, একটি দৃঢ় বস্তুর A ও B বিন্দুতে দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বল P এবং Q, $(P>Q)$ সক্রিয়, এবং মানে, ক্রিয়ারেখায়, ও দিকে যথাক্রমে $\overrightarrow{AK}$ ও $\overrightarrow{BD}$



দ্বারা সূচিত। $\overline{AB}$ অঙ্কন করি। এখন, A বিন্দুতে $\overrightarrow{AB}$ বরাবর একটি বল S এবং B বিন্দুতে $\overrightarrow{BA}$ বরাবর একটি বল S একই সঙ্গে প্রয়োগ করা হইল, যেখানে, $\overline{AL}=S$ এবং $\overline{BE}=S$.

ALMK ও BEFD সামান্তরিকদ্বয় সম্পূর্ণ করি, এবং $\overline{AM}$ ও $\overline{BF}$ কর্ণদ্বয় অঙ্কন করি। তাহা হইলে, A বিন্দুতে P ও S বলের লব্ধি $\overrightarrow{AM}$ এবং B বিন্দুতে Q এবং S বলের লব্ধি $\overrightarrow{BF}$ দ্বারা নির্দেশিত হইবে। ধরি, $\overline{AM}=R_1$ এবং $\overline{BF}=R_2$.

মনে করি, বর্ধিত $\overline{MA}$ ও $\overline{BF}$, O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দু দিয়া $\overline{AB}$ এর সমান্তরাল $\overline{GH}$ এবং $\overline{AK}$ এর সমান্তরাল $\overline{OC}$ অঙ্কন করি, যেখানে বর্ধিত $\overline{BA}$ এর উপর C অবস্থিত।

এখন, R_1 এর ক্রিয়াবিন্দু A হইতে $\overrightarrow{AO}$ বরাবর O বিন্দুতে এবং R_2 এর ক্রিয়াবিন্দু B হইতে $\overrightarrow{BO}$ বরাবর O বিন্দুতে সরাইয়া লই। O বিন্দুতে R_1 এর উপাংশ P এবং S, যথাক্রমে, $\overrightarrow{OC}$ ও $\overrightarrow{OH}$ বরাবর সক্রিয়; এবং O বিন্দুতে R_2 এর উপাংশ Q এবং S, যথাক্রমে $\overrightarrow{CO}$ ও $\overrightarrow{OG}$ বরাবর সক্রিয় হইবে। এখন, $\overrightarrow{OH}$ বরাবর S বল এবং $\overrightarrow{OG}$ বরাবর S বল পরস্পর বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল হওয়ায়, উহাদের ক্রিয়াফল শূন্য হইবে। কিন্তু, $\overrightarrow{OC}$ বরাবর, P বল এবং $\overrightarrow{CO}$ বরাবর Q বলের লব্ধি $(P-Q)$ হইবে, এবং তাহা O এতে $\overrightarrow{OC}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইবে।

এখন, $P-Q$ বলের ক্রিয়াবিন্দু O হইতে $\overrightarrow{OC}$ বরাবর C বিন্দুতে সরাইয়া লওয়া হইল। তাহা হইলে, অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধি R হইলে, $R=P-Q$ এবং ইহা C এতে $\overrightarrow{OC}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইবে, যেখানে বর্ধিত $\overline{BA}$ এর উপর C বিন্দু অবস্থিত।

এখন, Δ AMK ও Δ OAC সদৃশ বলিয়া,

$$\overline{MK}/\overline{AC}=\overline{AK}/\overline{OC};$$

বা, $P.\overline{AC}=S.\overline{OC}$.

অধিকন্তু, Δ BEF ও Δ BCO সদৃশ বলিয়া,

$$\overline{BE}/\overline{BC}=\overline{EF}/\overline{OC};$$

বা, $Q.\overline{BC}=S.\overline{OC}$.

$$\therefore\ P.\overline{AC}=Q.\overline{BC}.$$

এখান হইতে, C এর অবস্থান পাওয়া যাইবে।

মন্তব্য : (1). P এবং Q দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বল $(P>Q)$ এর লব্ধির পরিমাণ R হইলে, $R=P-Q$, এবং উহার অভিমুখিতা বৃহত্তর বল P এর অভিমুখিতায় হইবে। আবার উহার ক্রিয়াবিন্দু C, যেখানে, $P:Q=\overline{BC}:\overline{AC}$ এবং বর্ধিত $\overline{BA}$ এর উপর A এর নিকটতর C বিন্দু হইবে।

মন্তব্য : 2. (অঙ্কন-বৈশিষ্ট্য) :

(i) প্রথমে, $\overline{AB}$ এবং $\overline{CA}$ একই রেখায় আঁকিতে হইবে, ($\overline{CA}<\overline{AB}$).

(ii) $\overline{AB}$ হইতে, $\overline{AL}=s$, $\overline{BE}=s$ নিতে হবে, ($\overline{AB}>2s$).

(iii) সুবিধামত কোণে, $\overrightarrow{OC}$ রেখাটি আঁকিয়া, GOH (∥ CAB) টানা হবে।

(iv) $\overline{LM}$ (∥ $\overline{OC}$) নিতে হবে, যেন M, $\overline{OA}$ এর উপর থাকে ; এবং ALMK সামান্তরিক সম্পূর্ণ করিতে হইবে।

(v) $\overline{EF}$ (∥ $\overline{CO}$) নিতে হবে, যেন F, $\overline{OB}$ এর উপরে থাকে ; এবং BEFD সামান্তরিক সম্পূর্ণ করিতে হইবে।

4-4. দুইয়ের অধিক সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় :

মনে করি, $P_1, P_2, P_3, \cdots \quad \cdots, \quad P_n$ সমান্তরাল বলসমূহ যথাক্রমে, $A_1, A_2, \cdots \quad \cdots, A_n$ এতে প্রযুক্ত। এইখানে, দুইটি সম্ভাবনা থাকিতে পারে। যেমন :

(i) বল সমূহ পরস্পর সদৃশ অথবা (ii) উহাদের কয়েকটি সদৃশ সমান্তরাল এবং বাকীগুলিও সদৃশ সমান্তরাল ; কিন্তু, এই দুই শ্রেণীর বলগুলি পরস্পর অসদৃশ।

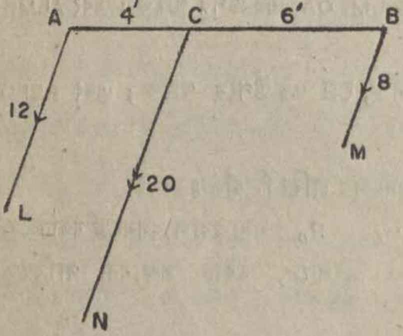
(i) বলসমূহ সদৃশ সমান্তরাল হইলে, P_1 এবং P_2এর লব্ধি R_1, যেখানে $R_1=P_1+P_2$, যাহার ক্রিয়াবিন্দু $\overline{A_1A_2}$ এর উপরিস্থ C_1, বিন্দুতে, যেখানে $P_1.\overline{A_1C_1}=P_2.\overline{A_2C_1}$. আবার, R_1 এবং P_3 এর লব্ধি R_2, যেখানে $R_2=R_1+P_3=P_1+P_2+P_3$; যাহার ক্রিয়াবিন্দু $\overline{C_1A_3}$ এর উপরিস্থ C_2 বিন্দুতে, যেখানে $R_1.\overline{C_1C_2}=P_3.\overline{A_3C_2}$; ইত্যাদি। এইভাবে অগ্রসর হইয়া, বলসমূহের লব্ধি R নির্ণয় করা যাইবে, যেখানে,

$$R=P_1+P_2+P_3+\cdots \quad \cdots+P_n.$$

(ii) মনে করি, $P_1, P_2, P_3, \cdots \quad \cdots, \quad P_n$ বলগুলি সমান্তরাল যাহাদের প্রয়োগ বিন্দু যথাক্রমে $A_1, A_2, A_3, \cdots \quad \cdots, A_n$. এবং ইহারা সদৃশ নহে। ইহাদের দুই গ্রন্থ সদৃশ সমান্তরাল বলে বিভক্ত করা যায়, এবং এই দুই শ্রেণীর লব্ধিদ্বয় R' এবং R'' বাহির করা যাক্। এই দুইটি বল অসদৃশ সমান্তরাল। যদি $R'\neq R''$ হয় এবং $R'>R''$ হয়, তাহা হইলে, ইহাদের লব্ধি $R=R'-R''$ হইবে। যদি $R'=R''$ হয় এবং একই ক্রিয়ারেখা হয়, তবে বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকিবে। কিন্তু, $R'=R''$ হইলে, এবং ক্রিয়ারেখা বিভিন্ন হইলে, উহারা একটি যুগ্মবল গঠন করিবে।

4-5. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ ঃ

উদাহরণ 1. একটি দৃঢ় বস্তুর A এবং B বিন্দুতে দুইটি সমান্তরাল বল 12 কি. গ্রা.-ভার ও 8 কি. গ্রা.-ভার প্রযুক্ত, যেখানে $\overline{AB}=10$ ফুট। বল দুইটি (i) সদৃশ ; (ii) অসদৃশ হইলে, উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।



(i) বল দুইটি সদৃশ সমান্তরাল হইলে, উহাদের লব্ধি R কি. গ্রা.-ভার হইবে, যেখানে, $R=12+8=20$; অর্থাৎ, লব্ধি বল $=20$ কি. গ্রা.-ভার যাহার ক্রিয়া বিন্দু $\overline{AB}$ এর উপর C বিন্দুতে, যেখানে : $12.\overline{AC}=8.\overline{BC}$;

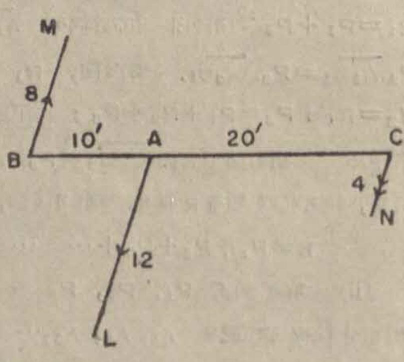
বা, $3.\overline{AC}=2.\overline{BC}$;

বা, $5.\overline{AC}=2.(\overline{BC}+\overline{AC})$;

বা, $5.\overline{AC}=2.\overline{AB}=2\times10$;

বা, $\overline{AC}=4$ **ফুট** ; $\overline{BC}=6$ **ফুট**।

(ii) বল দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল হইলে, উহাদের লব্ধি বল R কি.গ্রা ভার হইবে, যেখানে, $R=12-8=4$; অর্থাৎ, লব্ধি বল $=4$ কি. গ্রা.-ভার, যাহার ক্রিয়াবিন্দু C এতে, যেখানে, $12.\overline{AC}=8.\overline{BC}$, এবং বর্ধিত $\overline{BA}$ এর উপর A এর নিকটতর স্থানে C অবস্থিত।



$\therefore$ $12.\overline{AC}=8(\overline{AB}+\overline{AC})$

বা, $4\overline{AC}=8.\overline{AB}=8\times10$.

$\therefore$ $\overline{AC}=.20$ **ফুট** ;

$\overline{BC}=30$ **ফুট**।

উদাহরণ 2. একটি দৃঢ় বস্তুর A ও B বিন্দুতে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল প্রযুক্ত এবং উহাদের লব্ধি 75 পাউণ্ড-ভার। যদি A ও B এর দূরত্ব 100 সে. মি. হয়, এবং লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু $\overline{AB}$কে 2 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে বল দুইটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

মনে করি, বল দুইটি P ও Q পাউণ্ড-ভার এবং উহাদের লব্ধি C এতে ক্রিয়াশীল।

তাহা হইলে, $P+Q=75$ এবং $P.\overline{AC}=Q.\overline{BC}$.

কিন্তু প্রদত্ত শর্তানুসারে,

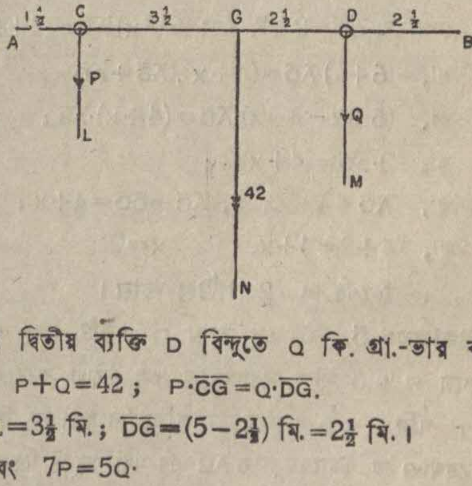
$$\overline{AC} : \overline{BC}=2 : 3.$$

$$\therefore \frac{Q}{P}=\frac{2}{3}; \text{ বা, } 3Q=2P.$$

সুতরাং, "$P+Q=75$ এবং $2P=3Q$" হইতে পাই, $P=45$; $Q=30$.

$\therefore$ নির্ণেয় বল দুইটির পরিমাপ : **45 পা.-ভার ও 30 পা.-ভার।**

উদাহরণ 3. 10 মিটার দীর্ঘ একটি সুষম দণ্ডের ভার 42 কিলোগ্রাম। এক ব্যক্তি উহার এক প্রান্ত হইতে $1\frac{1}{2}$ মিটার দূরে এবং অপর এক ব্যক্তি অপর প্রান্ত হইতে $2\frac{1}{2}$ মিটার দূরে কাঁধের উপর রাখিয়া উহা বহন করিতেছে। প্রত্যেক ব্যক্তি কত ভার বহন করিতেছে?



মনে করি, দণ্ডটি AB যেখানে $\overline{AB}=10$ মি.; যাহার মধ্যবিন্দু G.

সুতরাং, $\overline{AG}=\overline{BG}=5$ মি.।

মনে করি, $\overline{AC}=1\frac{1}{2}$ মি. $\overline{BD}=2\frac{1}{2}$ মি.; এবং C বিন্দুতে প্রথম ব্যক্তি P কি. গ্রা.-ভার এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি D বিন্দুতে Q কি. গ্রা.-ভার বহন করিতেছে। তাহা হইলে, $P+Q=42$; $P\cdot\overline{CG}=Q\cdot\overline{DG}$.

কিন্তু, $\overline{CG}=(5-1\frac{1}{2})$ মি.$=3\frac{1}{2}$ মি.; $\overline{DG}=(5-2\frac{1}{2})$ মি.$=2\frac{1}{2}$ মি.।

$\therefore$ $P+Q=42$ এবং $7P=5Q$.

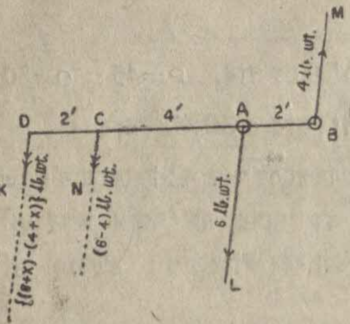
$\therefore$ $P=17\frac{1}{2}$, এবং $Q=24\frac{1}{2}$.

সুতরাং, প্রথম ব্যক্তি **$17\frac{1}{2}$ কি. গ্রা.-ভার** ও দ্বিতীয় ব্যক্তি **$24\frac{1}{2}$ কি. গ্রা.-ভার** বহন করিতেছে।

উদাহরণ 4. 4 পাউণ্ড-ভার ও 6 পাউণ্ড-ভারবিশিষ্ট দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল একটি সরলরেখার 2 ফুট দূরত্বে দুইটি বিন্দুতে প্রযুক্ত। যখন উহাদের সহিত দুইটি সমান মানের বল উহাদের অভিমুখিতায় যোগ করা হয়, তখন উহাদের

লব্ধির প্রয়োগবিন্দু 2 ফুট দূরে সরিয়া যায়। প্রদত্ত বল দুইটিতে কি পরিমাণ বল যোগ করা হইয়াছিল তাহা নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1965]

মনে করি, 6 পা.-ভার ও 4 পা.-ভার বল দুইটি যথাক্রমে, A ও B বিন্দুতে প্রযুক্ত, এবং উহাদের লব্ধি C এতে ক্রিয়াশীল, যেখানে $\overline{AB}=2$ ফুট; এবং $6\cdot\overline{AC}=4\cdot\overline{BC}.=4.(\overline{AB}+\overline{AC})=4.\overline{AB}+4.\overline{AC}$; or, $2\overline{AC}=4\overline{AB}=4\times 2.$ $\therefore$ $\overline{AC}=4$ ফুট।



মনে করি, x পা.-ভার বল উভয়ের সহিত (স্ব-স্ব-দিকে) যোগ করা হইয়াছিল। তাহা হইলে, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে উহাদের লব্ধি D এতে ক্রিয়াশীল হইবে, যেখানে, $\overline{CD}=2$ ফুট, এবং $(6+x).\overline{AD}=(4+x).\overline{BD}$;

বা, $(6+x)\cdot\overline{AD}=(4+x).(\overline{AB}+\overline{AD})$;

বা, $(6+x-4-x)\cdot\overline{AD}=(4+x)\cdot\overline{AB}$;

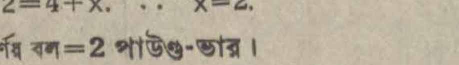
বা, $2\cdot\overline{AD}=(4+x).2$;

বা, $\overline{AD}=4+x$; বা, $\overline{AC}+\overline{CD}=4+x$;

বা, $4+2=4+x.$ $\therefore$ $x=2.$

$\therefore$ **নির্ণেয় বল = 2 পাউণ্ড-ভার।**

উদাহরণ 5. $\overline{AB}$ এর উপর C একটি বিন্দু এবং $\overline{AC}$ ও $\overline{BC}$ এর মধ্যবিন্দুতে যথাক্রমে P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করিলে, উহাদের লব্ধি C এতে ক্রিয়া করে। যদি P ও Q এর অবস্থান পরিবর্তন করা হয়, কিন্তু অভিমুখিতা পূর্ববৎ থাকে, তবে দেখাও যে, উহাদের লব্ধি $\overline{AB}$ এর মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়া করিবে।



মনে করি, $\overline{AC}$ এবং $\overline{BC}$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. যেহেতু, D ও E এতে প্রযুক্ত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধি C এতে ক্রিয়া করে,

$\therefore$ $P\cdot\overline{CD}=Q\cdot\overline{CE}.$

$\therefore$ $\dfrac{\overline{CE}}{P}=\dfrac{\overline{CD}}{Q}=\dfrac{\overline{CE}+\overline{CD}}{P+Q}=\dfrac{\overline{DE}}{P+Q}.$

বল দুইটির অবস্থান পরিবর্তন করার পর, উহাদের লব্ধি K বিন্দুতে ক্রিয়া করিলে,

$$Q.\overline{DK}=P\cdot\overline{EK}.$$

$$\therefore\ \frac{\overline{DK}}{P}=\frac{\overline{EK}}{Q}=\frac{\overline{DK}+\overline{EK}}{P+Q}=\frac{\overline{DE}}{P+Q}.$$

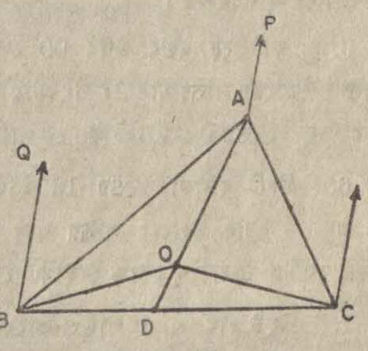
তাহা হইলে, $\overline{DK}=\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{BC}.$

$$\therefore\ \overline{AK}=\overline{AD}+\overline{DK}=\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BC}$$

$=\frac{1}{2}\overline{AB}$; অর্থাৎ, $\overline{AB}$ এর মধ্যবিন্দু K.

উদাহরণ 6. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R, ABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি সকল সম্ভাব্য সমান্তরাল দিকের জন্য উহাদের লব্ধি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখাও যে,

$$P:Q:R=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C.$$



B এবং C বিন্দুতে প্রযুক্ত Q ও R বলের লব্ধি Q+R এবং তাহা D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে $\overline{BC}$ এর উপর D অবস্থিত, এবং $Q\cdot\overline{BD}=R.\overline{CD}$

অপিচ, প্রদত্ত শর্তানুসারে, O বিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র।

তাহা হইলে, $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$;

$$\angle BOC=2A\ ;\ \angle COA=2B\ ;\ \angle AOB=2C.$$

$$\therefore\ \frac{R}{Q}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{OD}}\times\frac{\overline{OD}}{\overline{DC}}=\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle OBD}\times\frac{\sin\angle OCD}{\sin\angle DOC}$$

$$=\frac{\sin(180^\circ-2C)}{\sin\angle OBD}\times\frac{\sin\angle OBD}{\sin(180^\circ-2B)}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B};$$

অর্থাৎ, $\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}.$

অনুরূপভাবে, দেখানো যায় : $\frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}.$

$$\therefore\ P:Q:R=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C.$$

প্রশ্নমালা 4.

1. একটি দৃঢ় বস্তুর A এবং B বিন্দুতে দুইটি **সদৃশ** সমান্তরাল বল 4 পা.-ভার ও 12 পা.-ভার প্রযুক্ত, যেখানে $\overline{AB}$ এর মান 3 ফুট। বল দুইটির লব্ধি-নির্ণয় কর।

2. পরস্পর 24 সেন্টিমিটার দূরত্বে স্থিত দুইটি বিন্দুতে প্রযুক্ত 7 পা.-ভার ও 5 পা.-ভার দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির মান ও ক্রিয়াবিন্দু নির্ণয় কর।

3. একটি দৃঢ় বস্তুর C এবং D বিন্দুতে দুইটি **অসদৃশ** সমান্তরাল বল 30 কি. গ্রা.-ভার ও 18 কি. গ্রা.-ভার প্রযুক্ত যেখানে $\overline{CD}=24$ সেন্টিমিটার। উহাদের লব্ধির মান ও ক্রিয়াবিন্দু বাহির কর।

4. 15 পা.-ভার ও 10 পা.-ভারবিশিষ্ট দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির ক্রিয়ারেখা ক্ষুদ্রতর বলটি হইতে 20 ফুট দূরত্বে সক্রিয়। বল দুইটির ক্রিয়াবিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

5. একটি দৃঢ় বস্তুর উপর 90 সেন্টিমিটার দূরত্বে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল প্রযুক্ত। উহাদের লব্ধির মান 27 পা.-ভার হইলে, এবং ইহার ক্রিয়াবিন্দু ক্ষুদ্রতর বলের ক্রিয়াবিন্দু হইতে 50 সেন্টিমিটার দূরে থাকিলে, বল দুইটির মান বাহির কর।

6. একটি হাল্কা দণ্ডের 18 ইঞ্চি দূরত্বে দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বল প্রযুক্ত। যদি উহাদের লব্ধির মান 30 পা.-ভার হয়, এবং উহার ক্রিয়াবিন্দু বৃহত্তর বলটির ক্রিয়াবিন্দু হইতে 6 ইঞ্চি দূরে থাকে, তবে বল দুইটির মান বাহির কর।

7. 4 ফুট দীর্ঘ ও 6 পাউণ্ড-ভারের একটি সুষম দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে 2 পাউণ্ড-ভারের একটি বস্তু ঝুলাইয়া উহাকে একটি খুঁটির উপর অনুভূমিকরেখা বরাবর স্থিরাবস্থায় রাখা হইয়াছে। দণ্ডটির মধ্যবিন্দু হইতে খুঁটির দূরত্ব কত?

[W. B. H. S. 1964]

8. 2 ফুট দীর্ঘ ও 30 পাউণ্ড-ভারের একটি সুষম দণ্ড অনুভূমিকরেখায় পরস্পর হইতে এক ফুট ব্যবধানে স্থিত দুইটি কীলকের উপর স্থিরাবস্থায় আছে। কীলক দুইটির উপর চাপের অনুপাত 2 : 3 হইলে, কীলকদ্বয়ের অবস্থান নির্ণয় কর।

9. একটি দৃঢ় বস্তুর উপর 10 ফুট ব্যবধানে A ও B বিন্দুতে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল প্রযুক্ত। তাহাদের লব্ধি 25 পাউণ্ড-ভার হইলে, এবং উহার ক্রিয়াবিন্দু $\overline{AB}$ কে 2 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করিলে, বল দুইটির মান নির্ণয় কর।

10. 20 ইঞ্চি দীর্ঘ এবং 8 পাউণ্ড-ভারের একটি সুষম দণ্ড লইয়া উহার একপ্রান্ত উল্লম্ব দড়িতে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল, এবং উহার অন্য একস্থানে উহাকে একটি খুঁটির উপর স্থাপন করিয়া অনুভূমিকরেখা বরাবর স্থিরাবস্থায় রাখা হইল। দড়ির টান 3 পাউণ্ড-ভার হইলে, খুঁটিটি কোথায় অবস্থিত এবং উহার উপর চাপ কত আছে?

11. 8 ফুট দীর্ঘ একটি হাল্কা দণ্ডের মধ্যস্থানে 4 হন্দর ভারের একটি বস্তু ঝুলানো অবস্থায় দুই ব্যক্তি উহা বহন করিতেছে। এক ব্যক্তি দণ্ডটির একপ্রান্ত হইতে $1\frac{1}{2}$ ফুট এবং অপর ব্যক্তি অপর প্রান্ত হইতে $2\frac{1}{2}$ ফুট দূরে থাকিয়া দণ্ডটি ধরিয়া বহন করিতে থাকিলে, কে কত পরিমাণ ভার বহন করিতেছে?

[W. B. H. S. 1966]

12. 4 মিটার দীর্ঘ একটি হাল্কা দণ্ডের সাহায্যে দুই ব্যক্তি 60 কিলোগ্রাম ভারের একটি বস্তু বহন করিতেছে। বস্তুটি দণ্ডটির মধ্যবিন্দুতে রাখিলে, এবং উহার একপ্রান্ত হইতে $\frac{1}{2}$ মিটার দূরে একজন এবং অপর প্রান্ত হইতে 1 মিটার দূরে অপর এক জন থাকিলে, প্রত্যেক ব্যক্তি কি পরিমাণ ভার বহন করিতে থাকিবে?

[W. B. H. S. 1970]

13. 3 ফুট দীর্ঘ ও 12 পাউণ্ড-ভার বিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ড একই অনুভূমিক রেখায় পরস্পর হইতে 16 ইঞ্চি দূরত্বে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর স্থাপিত আছে। একটি খুঁটির উপর চাপ যদি অপর খুঁটির উপর চাপ অপেক্ষা 3 পা.-ভার বেশী হয়, তবে খুঁটি দুইটির অবস্থান নির্ণয় কর।

14. দুই ব্যক্তি 15 ফুট দীর্ঘ ও 70 পাউণ্ড ভার বিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ড হইতে ঝুলন্ত 350 পাউণ্ড-ভারের একখণ্ড পাথর দণ্ডটির দুই প্রান্ত ধরিয়া বহন করিতে চাহিল। দণ্ডটির কোন্ স্থানে পাথর খণ্ডটি স্থাপন করিলে, একজন অপরজন অপেক্ষা 70 পা.-ভার বেশী বহন করিবে?

15. একটি লোহার সুষম দণ্ডের প্রতি ফুটে 6 পাউণ্ড-ভার ওজন। এই দণ্ডটির এক প্রান্তে 144 পাউণ্ড-ভারের একটি বস্তু ঝুলাইয়া সেই প্রান্ত হইতে 1 ফুট দূরে একটি খুঁটির উপরে উহা স্থাপন করিয়া অনুভূমিকরেখায় স্থিরাবস্থায় রাখা হইয়াছে। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত?

16. (a). 2 ফুট দীর্ঘ একটি হাল্কা দণ্ড অনুভূমিক অবস্থায় দুইটি কীলকের সাহায্যে রাখা আছে। কীলক দুইটির ব্যবধান 3 ইঞ্চি এবং উহাদের একটি দণ্ডটির একপ্রান্তে রহিয়াছে। দণ্ডটির অপর প্রান্তে 5 পাউণ্ড-ভারের একটি বস্তু ঝুলানো থাকিলে, কীলক দুইটির উপর চাপ নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1971]

(b). 5 পাউণ্ড ভারবিশিষ্ট 5 ফুট দীর্ঘ একটি সুষম দণ্ডকে দুইটি কীলকের মধ্য দিয়া নিয়া অনুভূমিকভাবে রাখা হইল। যদি উপরের কীলকটি দণ্ডটির এক প্রান্তে থাকে, এবং নীচেরটি ঐ প্রান্ত হইতে 3 ইঞ্চি দূরে থাকে, তবে কীলক দুইটির উপর কিরূপ চাপ পড়িবে?

17. একটি হাল্কা দণ্ডের এক প্রান্ত হইতে 2, 8, 6 ফুট দূরে তিনটি সমান্তরাল বল P, Q, R প্রযুক্ত রহিয়াছে। যদি দণ্ডটি স্থিরাবস্থায় থাকে, তবে দেখাও যে,

$$P:Q:R=1:2:3.$$

18. 3 ফুট দূরত্বে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল একটি দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত। যদি বল দুইটির অবস্থার পরিবর্তন হয়, তবে উহাদের লব্ধি 6 ইঞ্চি সরিয়া যায়। বল দুইটির অনুপাত নির্ণয় কর। **[W. B. H. S. 1961]**

19. 12 ফুট দূরত্বে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল 7 পা.-ভার ও 5 পা.-ভার একটি দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত হইয়াছে। উহাদের সহিত সমান সমান মানের দুইটি বল উহাদের অভিমুখিতায় প্রয়োগ করিলে, উহাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু 3 ইঞ্চি সরিয়া যায়। ঐ সমান সমান বলের মান নির্ণয় কর।

20. 4 পা.-ভার ও 6 পা.-ভার এর দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল একটি দৃঢ় বস্তুতে 5 ফুট ব্যবধানে প্রযুক্ত। প্রত্যেকটির পরিমাণ 1 পা.-ভার বৃদ্ধি পাইলে, তাহাদের লব্ধি কোন্ দিকে কতদূর সরিয়া যাইবে? **[W. B. H. S. 1967]**

21. 6 পা.-ভার ও 4 পা.-ভার এর দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বল একটি দৃঢ় বস্তুর দুইটি বিন্দুতে প্রযুক্ত রহিয়াছে এবং তাহাদের প্রয়োগবিন্দু দুইটির ব্যবধান 2 ফুট। বল দুইটির সহিত সমান মানের দুইটি বল উহাদের অভিমুখিতায় প্রয়োগ করিলে, উহাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু 2 ফুট সরিয়া যায়। ঐ সমান সমান বলের মান নির্ণয় কর। **[W. B. H. S. 1965]**

22. একটি হালকা দণ্ডের 4 ইঞ্চি দূরত্বে দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বল P ও Q ($P>Q$) পা.-ভার ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধি বল 1 পা-ভার হইলে, এবং তাহা P বল হইতে 3 ফুট দূরে ক্রিয়া করিলে, P ও Q এর মান বাহির কর।

[W. B. H. S. Comp. 1967]

23. দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q ($P>Q$) যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে প্রযুক্ত। যদি P ও Q উভয়ের সহিত X বল উহাদের স্ব-স্ব-দিকে যুক্ত হয়, তবে দেখাও যে, উহাদের লব্ধি d দূরত্বে সরিয়া যাইবে, যেখানে, $(P-Q)\,d=X.\,\overline{AB}$.

[W. B. H. S. 1968]

24. তিনটি অসমতলীয় সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R যথাক্রমে, A, B, C এতে প্রযুক্ত। যদি তাহাদের লব্ধি ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখাও যে,

$$P=Q=R.$$

25. একটি দৃঢ় বস্তুর A, B, C এতে যথাক্রমে তিনটি অসমতলীয় সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R প্রযুক্ত, এবং $P:Q:R=a:b:c$. দেখাও যে, উহাদের লব্ধি ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রগামী, দেওয়া আছে : $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$.

26. দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল, P ও Q $(P>Q)$, যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে প্রযুক্ত। যদি P ও Q উভয়ের সহিত λ বল উহাদের স্ব-স্ব-দিকে যুক্ত হয়, তবে দেখাও যে, উহাদের লব্ধি d দূরত্বে সরিয়া যায়, যেখানে,

$$(P+Q)(P+Q+2\lambda)d=(P-Q)\,\lambda.\,\overline{AB}.$$

ANSWERS. (প্রশ্নমালা 4.)

1. 16 পা.-ভার (সদৃশ ও সমান্তরাল); $\overline{AB}$ এর মধ্যস্থ C বিন্দুতে সক্রিয়, যেখানে, $\overline{CB}=9$ ইঞ্চি। 2. সদৃশ ও সমান্তরাল 12 পা.-ভার ; 7 পা.-ভারের প্রয়োগ বিন্দু হইতে 10 *cm.* এবং 5 পা.-ভারের প্রয়োগবিন্দু হইতে 14*cm* দূরস্থ বিন্দুতে সক্রিয়। 3. 12 কি. গ্রা.-ভার ; বর্ধিত $\overline{DC}$ এর উপরিস্থ O বিন্দুতে সক্রিয়, $\overline{CO}=$ 36 *cm.* 4. 6 ফু. 8 ইঞ্চি। 5. 15 পা.-ভার ; 12 পা.-ভার। 6. 40 পা.-ভার 10 পা.-ভার। 7. 6 ইঞ্চি। 8. G দণ্ডটির মধ্যবিন্দু, এবং (C, D) কীলকদ্বয়ের অবস্থান হইলে, $\overline{GC}=0{\cdot}6$ ফু. ; $\overline{GD}=0{\cdot}4$ ফু.। 9. 15 পা.-ভার ; 10 পা.-ভার। 10. অপর প্রান্ত হইতে 4 ইঞ্চি দূরে ; চাপ = 5 পা.-ভার। 11. 168 পা.-ভার ; 280 পা.-ভার। 12. 24 কি. গ্রা.-ভার ; 36 কি. গ্রা.-ভার। 13. দণ্ডের মধ্যবিন্দু G হইতে খুঁটি দুইটির মাথার দূরত্ব $\overline{GC}=6''$; $\overline{GD}=10''$. 14. প্রস্তর খণ্ডটি দণ্ডের মধ্যবিন্দু হইতে 1·5 ফুট দূরে সংলগ্ন। 15. দণ্ডটির দৈর্ঘ্য = 8 ফুট। 16. (*a*) প্রান্তস্থ কীলকের উপরে ঊর্ধ্বচাপ = 35 পা.-ভার ; অপরটির উপরে নিম্নচাপ = 40 পা.-ভার। (*b*). প্রান্তস্থ কীলকের উপর ঊর্ধ্বচাপ = 45 পা.-ভার ; অপরটির উপর নিম্নচাপ = 50 পা.-ভার। 18. 7 : 5. 19. 2 পা.-ভার। 20. 4 পা-ভার বলের ক্রিয়াবিন্দুর দিকে 1 ইঞ্চি সরিবে। 21. 2 পা.-ভার। 22. $P=10$; $Q=9$.

পঞ্চম অধ্যায়

বলের ভ্রামক

(Moment of a force)

5-1. উপস্থাপন :

একটি কণাতে একটি বল প্রযুক্ত হইলে, কণাটিকে বলের অভিমুখিতায় চলিতে দেখা যাইবে। কিন্তু, কোন দৃঢ় বস্তুর উপর একটি বল প্রযুক্ত হইলে, বস্তুটি বলের অভিমুখিতায় চলিতে পারে, অথবা, কোনও স্থির বিন্দুর চারিদিকে আবর্তন করিতে পারে, অথবা, চলন এবং আবর্তন উভয়ই একই সঙ্গে করিতে পারে। বলের প্রয়োগে বস্তুর আবর্তন হইতে বলের ভ্রামক সম্বন্ধে ধারণা আসে।

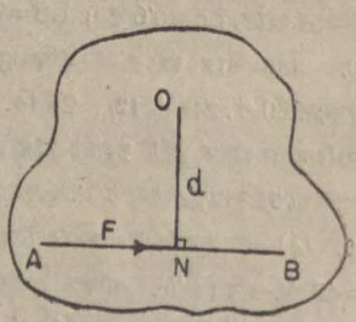
মনে করি, একটি মসৃণ টেবিলের উপর একটি টিনের পাত O বিন্দুতে একটি পিন্ দিয়া আটকাইয়া দেওয়া হইল, যেন পাতটি পিন্‌টির চারিদিকে সহজেই ঘুরিতে পারে। এখন যদি ঐ পাতের সমতলে একটি বল প্রয়োগ করা হয়, যাহার ক্রিয়ারেখা O বিন্দুগামী নহে, তবে লক্ষ্য করা যাইবে যে, বলের প্রভাবে পাতটি O বিন্দুর চারিদিকে আবর্তন করিতে চেষ্টা করিবে।

একটি দরজার পাল্লা খোলার, বা, বন্ধ করার সময় আমরা দরজাটির কব্জা রেখা হইতে কিছু দূরে পাল্লায় একটি বল প্রয়োগ করি। ফলে, পাল্লাটি কব্জারেখার চারিদিকে আবর্তন করিতে থাকে।

উপরোক্ত দুইটি উদাহরণ বলের ভ্রামকের দৃষ্টান্ত।

5-2. (a) বলের ভ্রামকের সংজ্ঞা :

কোনও দৃঢ় বস্তুতে একটি বল প্রযুক্ত হইলে, কোনও স্থির বিন্দু হইতে ঐ বলের ক্রিয়ারেখার উপর অঙ্কিত লম্ব-দূরত্ব ও বলের গুণফলকে বিন্দুটির চারিদিকে ঐ বলটির **ভ্রামক** (**moment**) বলা হইবে।



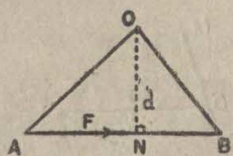
মনে করি, একটি দৃঢ় বস্তুতে F পরিমাপের একটি বল প্রযুক্ত, যেখানে উহা $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা নির্দেশিত এবং O বিন্দু হইতে $\overline{AB}$ এর লম্ব-দূরত্ব$=d$.

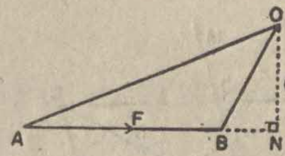
তাহা হইলে, O বিন্দুর চারিদিকে F বলের ভ্রামক$=F.d$.

মন্তব্য : F বলের ভ্রামক O বিন্দুর চারিদিকে শূন্য হইবে, যদি (i) $F=0$, অথবা, (ii) F এর ক্রিয়ারেখা O বিন্দুগামী হয়।

(b) ভ্রামকের জ্যামিতিক প্রকাশ :

মনে করি, F বলটি মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত এবং O বিন্দু





হইতে $\overline{AB}$ বা বর্ধিত $\overline{AB}$ এর লম্ব দূরত্ব $\overline{ON}=d$. $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ অঙ্কন করি। তাহা হইলে, O বিন্দুর চারিদিকে F বলের ভ্রামক $=F.d=\overline{AB}.\overline{ON}$.

কিন্তু, $\triangle OAB=\frac{1}{2}.\ \overline{AB}.\overline{ON}$.

$\therefore\ F.d=2.\triangle OAB$.

অর্থাৎ, O বিন্দুর চারিদিকে $\overrightarrow{AB}$ বলের ভ্রামক $=2.\triangle OAB$.

(c) ভ্রামকের একক :

এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক এক পাউণ্ড-ভার এবং দূরত্বের একক এক ফুট বলিয়া, ঐ পদ্ধতিতে ভ্রামকের একক **এক ফুট-পাউণ্ড-ভার।**

সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক এক গ্রাম-ভার এবং দূরত্বের একক এক সেন্টিমিটার বলিয়া, ঐ পদ্ধতিতে ভ্রামকের একক **এক সেন্টিমিটার-গ্রাম-ভার।**

(d) ভ্রামকের চিহ্ন :

কোন দৃঢ় বস্তুর উপর একটি বল F প্রযুক্ত থাকিলে, বস্তুটি যদি একটি বিন্দু O এর চারিদিকে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে আবর্তনের চেষ্টা করে, তবে ঐ বিন্দুর চারিদিকে F বলের ভ্রামক **ধনাত্মক** ধরা হইবে; কিন্তু বস্তুটি ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে আবর্তন করিতে চেষ্টা করিলে, O বিন্দুর চারিদিকে F বলের ভ্রামক **ঋণাত্মক** ধরা হইবে।

5-3. ভ্যারিগ্‌ননের উপপাদ্য (Varignon's theorem):

'যুগ্মবল নহে' এইরূপ দুইটি সামতলিক বলের সমতলে যে কোন একটি বিন্দুর চারিদিকে বল দুইটির ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ বিন্দুর চারিদিকে বল দুইটির লব্ধির ভ্রামকের সমান হইবে।

(a) সমবিন্দু বলের ক্ষেত্র :

মনে করি, $\overrightarrow{AL}$ বরাবর P বল এবং $\overrightarrow{AM}$ বরাবর Q বল প্রযুক্ত, এবং P ও Q বলের সমতলে O যে কোন একটি বিন্দু। $\overrightarrow{AL}$ এর সমান্তরাল করিয়া,

O বিন্দু দিয়া, $\overline{OC}$ অঙ্কন করি, যাহা $\overline{AM}$ কে, অথবা, বর্ধিত $\overline{AM}$ কে, D বিন্দুতে ছেদ করে।

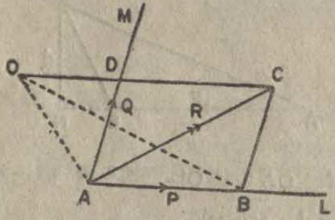


Fig (a)

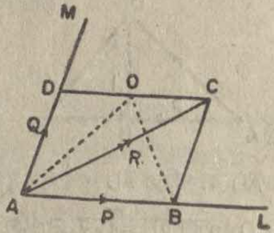


Fig. (b)

এক্ষণে, স্কেল এমনভাবে পছন্দ করি, যেন $\overrightarrow{AD}$, Q বলকে নির্দেশ করে এবং সেই একই স্কেলে, মনে করি, $\overrightarrow{AB}$, P বলকে নির্দেশ করে। ABCD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করি এবং $\overline{AC}$ অঙ্কন করি। তাহা হইলে, "বলের সামান্তরিক সূত্র" অনুসারে, P ও Q বলের লব্ধি R মানে, দিকে ও ক্রিয়ারেখায়, $\overrightarrow{AC}$ দ্বারা নির্দেশিত হইবে। $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ অঙ্কন করি। $\triangle OAB$ এবং $\triangle CAB$ একই ভূমি $\overline{AB}$ এর উপর উহার একই পার্শ্বে দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত বলিয়া, $\triangle OAB = \triangle CAB$.

আবার, ABCD সামান্তরিকের $\overline{AC}$ একটি কর্ণ বলিয়া, $\triangle CAB = \triangle DAC$.

(i) O বিন্দুটি $\angle BAD$ এর বহিঃস্থ হইলে, O বিন্দুর চারিদিকে P ও Q বলের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল

$= 2\triangle OAB + 2\triangle OAD$, [Fig.(a) হইতে]

$= 2\triangle CAB + 2\triangle OAD$

$= 2\triangle DAC + 2\triangle OAD$

$= 2\triangle OAC$

= O বিন্দুর চারিদিকে R এর ভ্রামক।

(ii) O বিন্দুটি $\angle BAD$ এর অন্তঃস্থ হইলে, O বিন্দুর চারিদিকে P ও Q বলের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল,

$= 2\triangle OAB - 2\triangle ODA$, [Fig. (b) হইতে]

$= 2\triangle CAB - 2\triangle ODA$

$=2\triangle DAC-\triangle 2ODA$

$=2\triangle OAC$

= O বিন্দুর চারিদিকে R এর ভ্রামক।

O বিন্দুটি $\overline{AD}$ এর উপর D এতে থাকিলে O বিন্দুর চারিদিকে P ও Q বলের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল

$=2\triangle DAB+0$

$=2\triangle CAB=2\triangle DAC$

= D, বা, O বিন্দুর চারিদিকে R এর ভ্রামক।

(b) সদৃশ সমান্তরাল বলের ক্ষেত্র ঃ

মনে করি, P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল, যেথানে উহারা যথাক্রমে

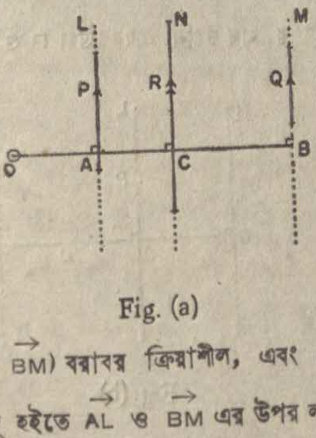


Fig. (a)

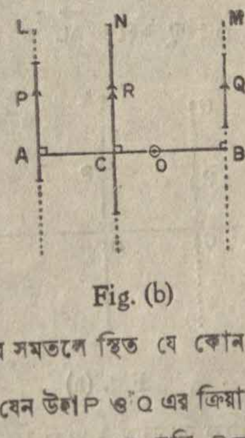


Fig. (b)

$\overrightarrow{AL}$ ও $\overrightarrow{BM}$) বরাবর ক্রিয়াশীল, এবং O উহাদের সমতলে স্থিত যে কোন বিন্দু। O বিন্দু হইতে $\overrightarrow{AL}$ ও $\overrightarrow{BM}$ এর উপর লম্ব টানি ; যেন উহা P ও Q এর ক্রিয়ারেথাকে যথাক্রমে, A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। এথন, P এবং Q এর লব্ধি $R=P+Q$, যাহা $\overline{AB}$ এর C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেথানে, $P\cdot\overline{AC}=Q\cdot\overline{BC}$.

(i) O বিন্দুটি $\overline{AB}$ এর বহিঃস্থ হইলে, O বিন্দুর চারিদিকে P ও Q এর ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল

$=P\cdot\overline{OA}+Q\cdot\overline{OB}$, [Fig. (a) হইতে]

$=P\cdot(\overline{OC}-\overline{AC})+Q\cdot(\overline{OC}+\overline{BC})$

$=(P+Q)\cdot\overline{OC}+(Q\cdot\overline{BC}-P.\overline{AC})$

$=(P+Q).\overline{OC}=R.\overline{OC}$

= O বিন্দুর চারিদিকে R এর ভ্রামক।

(ii) O বিন্দুটি $\overline{AB}$ এর অন্তঃস্থ হইলে, O বিন্দুর চারিদিকে P ও Q এর ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল

$= Q.\overline{BO} - P.\overline{AO}$, [Fig. (b) হইতে]

$= Q.(\overline{BC} - \overline{OC}) - P.(\overline{AC} + \overline{OC})$

$= -(P+Q)\cdot\overline{OC} + (Q\cdot\overline{BC} - P\cdot\overline{AC})$

$= -(P+Q)\cdot\overline{OC} = -R\cdot\overline{OC}$

= O বিন্দুর চারিদিকে R এর ভ্রামক।

(c) **অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলের ক্ষেত্র :**

মনে করি, P ও Q দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বল, $(P>Q)$, যথাক্রমে, $\overrightarrow{AL}$ ও $\overrightarrow{BM}$ বরাবর ক্রিয়াশীল এবং O উহাদের সমতলে স্থিত যে কোন বিন্দু। O বিন্দু হইতে $\overrightarrow{AL}$ ও $\overrightarrow{BM}$ এর উপর লম্ব টানি, যেন উহা P ও Q এর

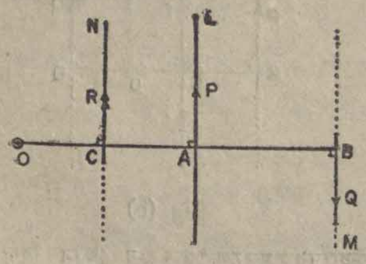


Fig. (a)

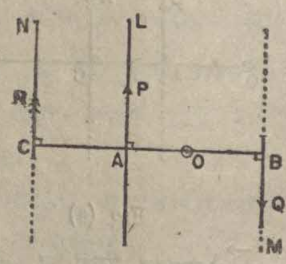


Fig (b)

ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, P ও Q এর লব্ধি R হইলে, $R = P - Q$, এবং উহা $\overline{BA}$ এর C বিন্দুতে ক্রিয়া করিবে, যেখানে, $P\cdot\overline{AC} = Q.\ \overline{BC}$.

O বিন্দুটি $\overline{AB}$ এর বহিঃস্থ হইলে, O বিন্দুর চারিদিকে P ও Q এর ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল

$= P\cdot\overline{OA} - Q\cdot\overline{OB}$, [Fig. (*a*) হইতে]

$= P\cdot(\overline{OC} + \overline{AC}) - Q\cdot(\overline{OC} + \overline{BC})$

$= (P-Q)\cdot\overline{OC} + (P\cdot\overline{AC} - Q\cdot\overline{BC})$

$= (P-Q)\cdot\overline{OC} = R\cdot\overline{OC}$

= O বিন্দুর চারিদিকে R এর ভ্রামক।

O বিন্দুটি $\overline{AB}$ এর অন্তঃস্থ হইলে, O বিন্দুর চারিদিকে P ও Q এর ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল :

$= -P \cdot \overline{OA} - Q \cdot \overline{OB}$, [Fig. (*b*) হইতে]

$= -P \cdot (\overline{OC} - \overline{AC}) - Q \cdot (\overline{BC} - \overline{OC})$

$= -(P - Q).\overline{OC} + (P.\overline{AC} - Q.\overline{BC})$

$= -(P - Q).\overline{OC} = -R.\overline{OC}.$

= O বিন্দুর চারিদিকে R এর ভ্রামক।

মন্তব্য : দুইটি বলের লব্ধির ক্রিয়ারেখার উপরিস্থ যে কোন বিন্দুর চারিদিকে বল দুইটির ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হইবে ; এবং বিপরীতক্রমে।

5·4. যে কোন সংখ্যক সামতলিক বলের লব্ধির ভ্রামক নির্ণয় :

যে কোন সংখ্যক সামতলিক বলের একটি লব্ধি থাকিলে, উহাদের সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর চারিদিকে ঐ বলগুলির ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল, ঐ বিন্দুর চারিদিকে উহাদের লব্ধির ভ্রামকের সমান হইবে।

মনে করি, $P_1, P_2, P_3 \cdots \cdots, P_n$ কতিপয় সামতলিক বল এবং উহাদের সমতলে O যে কোন বিন্দু। মনে করি, P_1 ও P_2 এর লব্ধি R_1 ; R_1 ও P_3 এর লব্ধি R_2, অর্থাৎ P_1, P_2, P_3 এর লব্ধি R_2 ; ইত্যাদি ; এবং সর্বশেষে $P_1, P_2, P_3 \cdots \cdots, P_n$ এর লব্ধি R.

O বিন্দুর চারিদিকে P_1 এবং P_2 বলের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল এবং R_1 এর ভ্রামক সমান। O বিন্দুর চারিদিকে R_1 এবং P_3, অর্থাৎ P_1, P_2, P_3 বলের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল ও R_2 এর ভ্রামক সমান। এইভাবে অগ্রসর হইলে, O বিন্দুর চারিদিকে $P_1, P_2, P_3, \cdots \cdots, P_n$ বলসমূহের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ বিন্দুর চারিদিকে R এর ভ্রামকের সমান হইবে।

দ্রষ্টব্য : মনে করি, O বিন্দু হইতে $P_1, P_2, P_3, \cdots \cdots, P_n$ বলসমূহের ক্রিয়ারেখার লম্ব-দূরত্ব যথাক্রমে, $d_1, d_2, d_3, \cdots \cdots, d_n$ এবং উহাদের লব্ধি R এর ক্রিয়ারেখায় লম্ব-দূরত্ব d. তাহা হইলে,

$$P_1 d_1 + P_2 d_2 + \cdots \cdots + P_n d_n = Rd\ ;$$

অর্থাৎ, $$\sum_{r=1}^{n} P_r d_r = Rd.$$

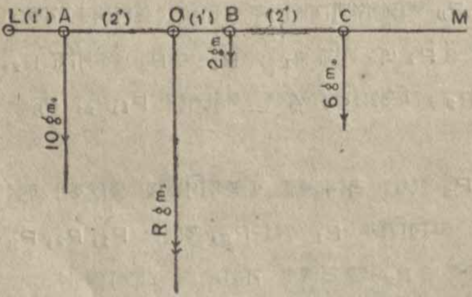
মন্তব্য : (1) বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকিলে, R=0. সুতরাং, $Rd=0$;

বা, $\sum_{r=1}^{n} P_r d_r = 0$; অর্থাৎ, বলসমূহের সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর চারিদিকে উহাদের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হইবে।

(2) যদি $\sum P_r d_r = 0$ হয়, তবে $Rd=0$. এইরূপক্ষেত্রে, হয় $R=0$, অথবা, $d=0$. $R=0$ হইলে, বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকিবে। কিন্তু $d=0$ এবং $R \neq 0$ হইলে, R এর ক্রিয়ারেখা O বিন্দুগামী হইবে। অতএব, লব্ধির ক্রিয়ারেখায় উপরিস্থ যে কোন বিন্দুর চারিদিকে বলসমূহের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হইবে।

5-5. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. একটি হাল্কা দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে 1, 4, 6 ফুট দূরত্বে 10, 2, 6 গ্রাম-ভার পরিমাণ সদৃশ সমান্তরাল বল তিনটি সক্রিয়। উহাদের লব্ধির মান ও ক্রিয়ারেখার অবস্থান নির্ণয় কর।



মনে করি, LM দণ্ডের L প্রান্ত হইতে 1, 4, 6 ফুট দূরত্বে A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে 10, 2, 6 গ্রাম-ভার সদৃশ সমান্তরাল বল তিনটি ক্রিয়া করে।

মনে করি, উহাদের লব্ধি R গ্রাম-ভার এবং উহা L হইতে x ফুট দূরত্বে O এতে ক্রিয়া করে। তাহা হইলে,

$$R = 10 + 2 + 6 = 18 ;$$

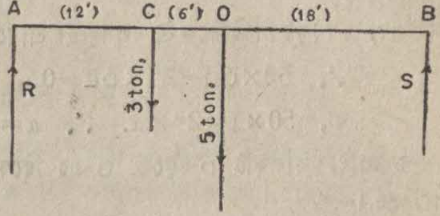
এবং, $10 \times 1 + 2 \times 4 + 6 \times 6 = R \times x$;

বা, $54 = 18x$. $\therefore\ x = 3$.

সুতরাং, নির্ণেয় লব্ধি = **18 গ্রাম-ভার** ; এবং তাহা L হইতে **3 ফুট দূরত্বে** LM এর উপর O বিন্দুতে প্রদত্ত বল সমূহের অভিমুখিতায় সমান্তরাল দিকে ক্রিয়াশীল।

উদাহরণ 2. 5 টন-ভার বিশিষ্ট ও 36 ফুট দীর্ঘ একটি অনুভূমিক সেতু উহার দুই প্রান্ত দুইটি উল্লম্ব থামের উপর অবস্থিত। মাল সমেত 3 টন-ভার বিশিষ্ট একটি

লরি সেতুটির এক প্রান্ত হইতে যখন 12 ফুট দূরত্বে অবস্থিত তখন থাম দুইটির উপর কিরূপ চাপ থাকিবে ? [W. B. H. S. 1966]



AB হইল অনুভূমিক সেতুর অবস্থান ; $\overline{AB}=36$ ফুট। লরিটি যখন C এতে অবস্থিত, যেখানে $\overline{AC}=12$ ফুট, মনে করি, A এবং B এতে অবস্থিত থাম দুইটির উপর যথাক্রমে R ও S টন-ভার চাপ পড়ে। তাহা হইলে,

$$R+S=5+3=8. \quad \cdots \quad (1)$$

এইরূপ অবস্থানে, A বিন্দুর চারিদিকে AB সেতুর উপর ক্রিয়াশীল বলের ভ্রামক লইয়া পাই,

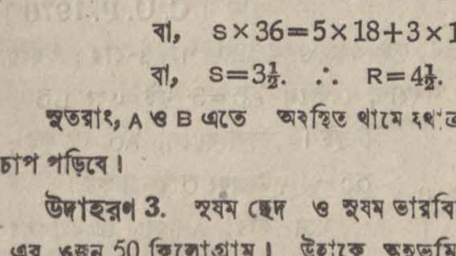
$$S.\ \overline{AB}-5.\ \overline{AO}-3.\ \overline{AC}=0\ ;$$

বা, $S\times 36=5\times 18+3\times 12$;

বা, $S=3\frac{1}{2}$. $\therefore$ $R=4\frac{1}{2}$.

সুতরাং, A ও B এতে অবস্থিত থামে যথাক্রমে $4\frac{1}{2}$ **টন-ভার** ও $3\frac{1}{2}$ **টন-ভার** চাপ পড়িবে।

উদাহরণ 3. সুষম ছেদ ও সুষম ভারবিশিষ্ট 10 মিটার দীর্ঘ একটি তক্তা AB এর ওজন 50 কিলোগ্রাম। উহাকে অনুভূমিক অবস্থায় C ও D এতে দুইটি উল্লম্ব থামের উপর রাখা আছে, যেখানে $\overline{AC}=2$ মিটার এবং $\overline{BD}=4$ মিটার। 25 কিলোগ্রাম ওজনের একটি বালক D হইতে তক্তাটির উপর দিয়া B এর দিকে কত দূর পর্যন্ত নিরাপদে যাইতে পারিবে ?



মনে করি, বালকটি D হইতে B এর দিকে E বিন্দু পর্যন্ত নিরাপদে যাইতে পারে, এবং $\overline{DE}=x$ মিটার। এইরূপ অবস্থায় C এতে অবস্থিত থামের উপর কোন চাপ থাকিবে না ; কেবলমাত্র D এতে অবস্থিত থামের উপর চাপ থাকিবে। তখন, তক্তাটির উপর 50 কি. গ্রা.-ভার $\overline{AB}$ এর

মধ্যবিন্দু O এতে নীচের দিকে, E এতে 25 কি. গ্রা.-ভার নীচের দিকে, এবং D এতে প্রতিক্রিয়া R কি. গ্রা.-ভার উপরের দিকে ক্রিয়া করিবে।

যেহেতু, এই অবস্থায় তক্তাটির উপর ক্রিয়াশীল বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব, D বিন্দুর চারিদিকে ঐ বলসমূহের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হইবে।

$\therefore\ 50\times\overline{OD}-25\times\overline{DE}=0$;

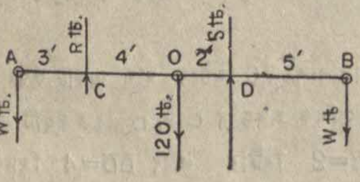
বা, $50\times1=25\times x.\ \ \therefore\ x=2.$

সুতরাং, বালকটি D হইতে B এর দিকে নিরাপদে 2 মিটার পর্যন্ত যাইতে পারিবে।

উদাহরণ 4. 14 ফুট দীর্ঘ ও 120 পাউণ্ড-ভার বিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ড 6 ফুট ব্যবধানে দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকরেখা বরাবর অবস্থিত, যেখানে, উহার দুই প্রান্ত হইতে খুঁটি দুইটির দূরত্ব যথাক্রমে, 3 ফুট ও 5 ফুট। যদি প্রত্যেক খুঁটি 200 পা.-ভার পর্যন্ত বহন করিতে পারে, তাহা হইলে, সর্বাধিক কত মানের দুইটি সমান ওজনের বস্তু উহার দুই প্রান্ত হইতে ঝুলাইয়া দিলে, কোন খুঁটি ভাঙ্গিয়া যাইবে না?

[C. U. P. 1976]

মনে করি, AB দণ্ডের দৈর্ঘ্য 14 ফুট এবং ওজন 120 পাউণ্ড-ভার; ইহার মধ্যবিন্দু O. C এবং D দুইটি খুঁটির অবস্থান, যেখানে $\overline{AC}=3$ ফুট এবং $\overline{BD}=5$ ফুট। তাহা হইলে, $\overline{AO}=7$ ফুট; $\overline{OC}=4$ ফুট এবং $\overline{OD}=2$ ফুট।



মনে করি, A এবং B প্রান্তদ্বয় হইতে W পা.-ভার ও W পা.-ভার ঝুলাইয়া দেওয়া হইল, এবং তখন C ও D এতে দণ্ডটির উপর যথাক্রমে, R পা.-ভার ও S পা.-ভার প্রতিক্রিয়া হইল। AB দণ্ডের উপর প্রযুক্ত বল সমূহ সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া,

$S+R=2W+120$;

এবং, $W\times\overline{OA}-R\times\overline{OC}+S\times\overline{OD}-W\times\overline{OB}=0$;

বা, $W\times7-R\times4+S\times2-W\times7=0$;

বা, $S=2R$

$\therefore\ S=2R=\frac{2}{3}(2W+120).$

$\therefore\ S>R$; অর্থাৎ, D এতে চাপ C এতে চাপ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

সুতরাং, প্রদত্ত শর্তানুসারে, s এর মান 200 এর চেয়ে বেশী হইবে না।

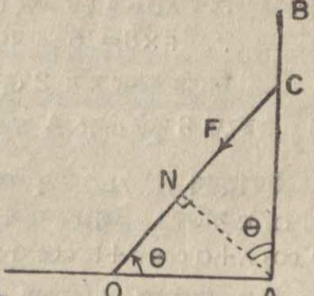
$\therefore$ s=200;

বা, $\frac{2}{3}(2w+120)=200$;

বা, w=90.

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : **90 পাউণ্ড-ভার।**

উদাহরণ 5. ভূমির উপর উল্লম্বভাবে দণ্ডায়মান একটি খুঁটির সহিত 20 ফুট দীর্ঘ একটি দড়ির একপ্রান্ত বাঁধিয়া এক ব্যক্তি অপর প্রান্ত ধরিয়া টানিতে লাগিল। খুঁটিটির কোন্ স্থানে দড়ি বাঁধিলে, এবং অপর প্রান্ত ভূমিতে থাকিলে, খুঁটিটিকে উল্টাইয়া দেওয়া সর্বাপেক্ষা সুবিধাজনক হইবে?



মনে করি, AL ভূমির উপর AB খুঁটিটি উল্লম্বভাবে দণ্ডায়মান। উহার C বিন্দুতে CO দড়ির এক প্রান্ত বাঁধা আছে এবং দড়ি বরাবর F বল দ্বারা উহা টানা হইতেছে, যেখানে, $\overline{OC}=20$ ফুট। মনে করি, $\angle AOC=\theta$, $\overline{OC}$ এর উপর $\overline{AN}$ লম্ব, যেখানে, $\overline{OC}$ এর উপর N অবস্থিত। তাহা হইলে, $\overline{AN}=\overline{AO}.\sin\theta$ $=\overline{CO}.\cos\theta.\sin\theta.$

$=\frac{1}{2}\overline{CO}.\ \sin 2\theta=10\sin 2\theta$ ফুট।

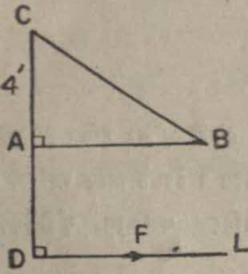
এক্ষণে, A বিন্দুর চারিদিকে F বলের ভ্রামক $=F.\ \overline{AN}=10\ F\sin 2\theta.$

F এর মান নির্দিষ্ট থাকিলে, ঐ ব্যক্তির পক্ষে খুঁটিটি উল্টাইয়া ফেলিতে সর্বাপেক্ষা সুবিধাজনক হইবে, যখন $10\ F\sin 2\theta$, অর্থাৎ, $\sin 2\theta$ এর মান বৃহত্তম হইবে; অর্থাৎ, যখন $\theta=45°$ হইবে। তখন, $\overline{AC}=\overline{CO}.\sin\theta=20.\ \sin 45°$ ফুট $=10\sqrt{2}$ ফুট।

সুতরাং, ভূমি হইতে **$10\sqrt{2}$ ফুট উচ্চতায়** দড়িটি বাঁধিতে হইবে।

উদাহরণ 6. ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ $\overline{BC}$ এবং $\overline{AC}=4$ ফুট। ABC ত্রিভুজের সমতলে অবস্থিত কোন একটি বলের ভ্রামক A, B ও C বিন্দুর চারিদিকে যথাক্রমে, 8, 8, 16 একক। ঐ বলটির মান ও ক্রিয়ারেখার অবস্থান নির্ণয় কর।

মনে করি, নির্ণেয় বলটি F একক এবং A ও B হইতে ইহার ক্রিয়ারেখার দূরত্ব যথাক্রমে x_1 ও x_2 একক। তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে,



$Fx_1=8$; এবং, $Fx_2=8$.

$\therefore$ $x_2=x_1$; অর্থাৎ, F বলের ক্রিয়ারেখা $\overline{AB}$ এর সমান্তরাল। এখন, C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই,

$F.\overline{CD}=16$. কিন্তু, $Fx_1=8$.

$\therefore$ $F.\overline{CD}=2\,Fx_1$;

বা, $\overline{CD}=2x_1=2\overline{AD}$.

$\therefore$ $\overline{CA}=\overline{AD}$. কিন্তু, $\overline{CA}=4$ ফুট।

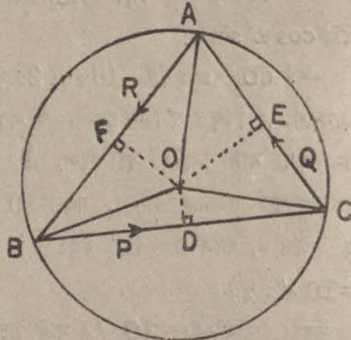
$\therefore$ $\overline{AD}=4$ ফুট এবং $\overline{CD}=8$ ফুট।

$\therefore$ $F\times 8=16$; বা, $F=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় বলের মান 2 একক এবং উহার ক্রিয়ারেখা $\overline{AB}$ এর সমান্তরাল ও C হইতে 8 ফুট এবং A হইতে 4 ফুট দূরে অবস্থিত।

উদাহরণ 7. ABC ত্রিভুজের $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ বরাবর যথাক্রমে তিনটি বল P, Q, R সক্রিয়। উহাদের লব্ধি ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগামী হইলে, দেখাও যে, $P\cos A+Q\cos B+R\cos C=0$.

ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O ; এবং পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R_0, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ অঙ্কন করি ; $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, ও $\overline{AB}$ এর উপর যথাক্রমে $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ লম্ব টানি।



এখন, $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=R_0$;

$\angle BOD=\angle COD=A$.

$\therefore$ $\overline{OD}=R_0\cos A$.

সেইরূপ, $\overline{OE}=R_0\cos B$;

$\overline{OF}=R_0\cos C$.

আবার, প্রদত্ত শর্তানুসারে, P, Q, R বলের লব্ধি O বিন্দুগামী ; সুতরাং O বিন্দুর চারিদিকে উহাদের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হইবে ; অর্থাৎ,

$P.\overline{OD}+Q.\overline{OE}+R.\overline{OF}=0$;

বা, $P\cos A+Q\cos B+R\cos C=0$; প্রমাণিত।

প্রশ্নমালা 5

1. 8 ফুট দীর্ঘ একটি হাল্কা সরল দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে 2·5, 5, ও 7 ফুট দূরত্বে যথাক্রমে, 12, 3, 5 পা.-ভার পরিমাণ তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল সক্রিয়। উহাদের লব্ধির মান ও অবস্থান নির্ণয় কর।

2. 6 ফুট দীর্ঘ AB সুষম দণ্ডের ভার 10 পাউণ্ড। যদি 2 পাউণ্ডের একটি ভার A এতে এবং 6 পাউণ্ডের অপর একটি ভার B হইতে 1 ফুট দূরে D এতে রাখা হয়, তবে দণ্ডটির কোন্ বিন্দুতে কত বল প্রয়োগ করিলে, দণ্ডটি অনুভূমিক বরাবর স্থিরাবস্থায় থাকিবে?

3. 2, 4, 6, 8 পাউণ্ড-ভারের চারিটি সদৃশ সমান্তরাল বল একই সরলরেখায় স্থিত এক ফুট অন্তর চারিটি বিন্দুতে ঐ সরলরেখার উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে। ঐ সরলরেখার উপরিস্থ যে বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হইবে তাহা নির্ণয় কর। **[W. B. H. S. 1967]**

4. 10 ফুট দীর্ঘ ও 20 পাউণ্ড-ভারবিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ডের এক প্রান্ত হইতে 2 ফুট দূরে 7 পাউণ্ড-ভার ও তাহার আরও এক ফুট দূরে 6 পাউণ্ড-ভার ঝুলাইয়া দিয়া দণ্ডটির কোন্ স্থানে একটি খুঁটি দিলে, উহা অনুভূমিকরেখায় স্থিরাবস্থায় থাকিবে?

5. 10 ফুট লম্বা একটি সুষম দণ্ডের দুই প্রান্ত হইতে যথাক্রমে 10 পা.-ভার ও 100 পা.-ভার ঝুলিতে থাকিলে, উহা 10 পা.-ভার হইতে $7\frac{1}{2}$ ফুট দূরে একটি বিন্দুতে স্থিত একটি খুঁটিতে সুস্থিত থাকে। দণ্ডটির ওজন কত?

6. 10 ফুট দীর্ঘ ও 10 পাউণ্ড-ভারবিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ডের এক প্রান্ত হইতে $4\frac{1}{2}$ ফুট দূরে একটি বিন্দুতে ধরিয়া ঐ প্রান্তে 16 পাউণ্ড-ভারের একটি বস্তু স্থাপন করা হইল। অপর প্রান্তে কত পাউণ্ড-ভারের একটি বস্তু স্থাপন করিলে, দণ্ডটি স্থিরাবস্থায় অনুভূমিক বরাবর থাকিবে?

7. 16 পাউণ্ড-ভারবিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে 6 পা.-ভার এবং অপর প্রান্ত হইতে 10 পা.-ভার ঝুলাইয়া উহার মধ্য বিন্দু হইতে এক ফুট দূরে একটি বিন্দুতে ধরিয়া থাকিলে উহা অনুভূমিক বরাবর স্থিরাবস্থায় থাকে। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত?

8. 1 মিটার দীর্ঘ ও 120 গ্রাম-ভারবিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ড AB এর A ও B প্রান্তের সহিত যুক্ত দুইটি উলম্ব স্প্রিং-তুলাযন্ত্রের সাহায্যে অনুভূমিক অবস্থায় ছিল। দণ্ডটির C বিন্দুতে 300 গ্রাম-ভার এর একটি বস্তু ঝুলাইয়া দেওয়ায় A প্রান্তস্থিত তুলাযন্ত্রে 270 গ্রাম-ভার সূচিত হইল। B প্রান্তস্থিত তুলায় তখন কত ভার সূচিত হইবে, এবং AC এর দৈর্ঘ্য কত?

9. 25 ফুট দীর্ঘ একটি হাল্কা তক্তার উপর 75 পাউণ্ড-ভারের একটি বস্তু উহার কোন্ স্থানে স্থাপন করিলে, উহার দুই প্রান্ত ধরিয়া দুই ব্যক্তি বহন করিবার সময় একজন অপর জন অপেক্ষা 15 পাউণ্ড-ভার বেশী বহন করিবে ?

10. 11 ফুট দীর্ঘ ও 40 পাউণ্ড-ভার বিশিষ্ট এক সুষম দণ্ডের দুইপ্রান্ত ধরিয়া দুই ব্যক্তি উহার উপর স্থাপিত 110 পাউণ্ড-ভারের একটি বস্তু বহন করিতেছে। বস্তুটি কোথায় রাখার জন্য একজন অপর জন অপেক্ষা দ্বিগুণ-ভার বহন করিবে ?

11. 10 ফুট দীর্ঘ ও 20 পাউণ্ড-ভার বিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ডের দুইপ্রান্ত দুইটি খুঁটির উপর স্থাপিত আছে। উহার এক প্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরে 80 পাউণ্ড-ভারের একটি বস্তু উহার উপর রাখিলে, খুঁটি দুইটির উপর কিরূপ চাপ পড়িবে ?

[W. B. H. S. 1968]

12. একটি সুষম দণ্ডের দৈর্ঘ $2a$ এবং ওজন W. ইহাকে অনুভূমিক ভাবে b দূরত্বে অবস্থিত দুইটি কীলকের উপর রাখা হইল। ইহার একপ্রান্তে সর্ব্বোচ্চ ভার W_1 ঝুলানো সম্ভবপর। অনুরূপভাবে, ইহার অপর প্রান্তে সর্ব্বোচ্চ ভার W_2 ঝুলানো সম্ভবপর। দেখাও যে,

$$\frac{W_1}{W+W_1}+\frac{W_2}{W+W_2}=\frac{b}{a}.$$

13. 8 ফুট দীর্ঘ ও 11 পা.-ভার বিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ড উহার একপ্রান্ত হইতে 3 ফুট দূরে একটি দড়ি দ্বারা ঝুলানো আছে এবং সেই প্রান্তে 12 পা.-ভার এর একটি বস্তু ঝুলানো আছে। অন্য প্রান্তে কত পাউণ্ড-ভার বল প্রয়োগ করিলে, দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে স্থিরাবস্থায় থাকিবে ?

14. 12 ফুট দীর্ঘ ও 32 পা.-ভার বিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ড উহার দুই প্রান্তে দুইটি উল্লম্ব দড়ির সাহায্যে অনুভূমিক অবস্থায় ঝুলানো আছে। কোনও দড়ি 28 পাউণ্ডের বেশী ভার বহন করিতে পারে না। দণ্ডটির মধ্য বিন্দু হইতে কতদূরে 16 পাউণ্ড-ভার এর একটি বস্তু ঝুলাইয়া দিলে, একটি দড়ি ছিঁড়িয়া যাইবার উপক্রম হইবে ?

15. 8 ফুট দীর্ঘ একটি সুষম দণ্ডের দুইপ্রান্ত দুইটি কীলকের উপরে আছে, যেখানে প্রত্যেক কীলকের উপরে চাপ 10 পাউণ্ড-ভার। 80 পা.-ভার কোথায় স্থাপন করিলে, একটি কীলকের উপরে চাপ 40 পা.-ভার হইবে ?

16. 10 ফুট লম্বা ও 25 পাউণ্ড-ভার বিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ডের একপ্রান্ত একটি মসৃণ কব্জায় আটকানো এবং উহার অপর প্রান্ত 16 ফুট লম্বা দড়ি দিয়া কব্জাটির উল্লম্বদিকে 10 ফুট উপরে বাঁধা আছে। কব্জার প্রতিক্রিয়া এবং দড়ির টান নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1967]

17. একটি সরল দণ্ড দুইটি সমান্তরাল দড়ির সাহায্যে অনুভূমিকভাবে ঝুলাইয়া রাখিবার কালে, দড়ি দুইটি দণ্ডের দুই প্রান্তে থাকিলে, দড়ির টান যথাক্রমে 20 পা.-ভার ও 40 পা.-ভার হয়। কিন্তু, যখন দড়ি দুইটি প্রান্তদ্বয় হইতে 1 ফুট দূরে বাঁধা হয়, তখন উহাদের টান যথাক্রমে 18 পা.-ভার ও 42 পা.-ভার হয়। দণ্ডের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

18. 30 ফুট দীর্ঘ ও 6 টন ভারী একটি অনুভূমিক সেতুর দুই প্রান্ত দুইটি উল্লম্ব স্তম্ভের উপর অবস্থিত। সেতুর উপর দিয়া যাইবার কালে উহার এক প্রান্ত হইতে দুই-তৃতীয়াংশ দূরে যখন 2 টন-ভারের একটি গাড়ী অবস্থিত, তখন প্রতি স্তম্ভের উপর কিরূপ চাপ থাকিবে ?

19. 14 ফুট দীর্ঘ ও 120 পাউণ্ড-ভার বিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ড দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপিত আছে। দণ্ডটির মধ্যবিন্দু হইতে 3 ফুট দূরে একটি খুঁটি এবং 5 ফুট দূরে অপর খুঁটি অবস্থিত। দণ্ডটির এক প্রান্তে 100 পাউণ্ড-ভারের একটি বস্তু স্থাপন করিলে, খুঁটি দুইটির উপর কিরূপ চাপ পড়িবে ?

20. 4 ফুট দীর্ঘ সুষম ভারবিশিষ্ট একটি দণ্ড 1 ফুট ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থিরাবস্থায় আছে। উহার একপ্রান্ত হইতে 25 পা.-ভার, অথবা, অপর প্রান্ত হইতে 10 পা.-ভার এর বস্তু ঝুলাইয়া দিলে, দণ্ডটির স্থিরাবস্থা ভগ্ন হয়। দণ্ডটির ভার এবং উহার মধ্যবিন্দু হইতে খুঁটি দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর। [C. U. P. 1975]

21. 12 ফুট দীর্ঘ ও 20 পাউণ্ড-ভারবিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ড পরস্পর হইতে 8 ফুট দূরে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিক অবস্থায় আছে। দণ্ডটির একপ্রান্ত হইতে 12 পা.-ভার এবং অপর প্রান্ত হইতে 4 পা.-ভার এর দুইটি বস্তু ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। যে প্রান্তে 4 পাউণ্ড-ভারের বস্তুটি ঝুলানো হইল সেই প্রান্ত হইতে 1 ফুট দূরে একটি খুটি এবং 4 ফুট দূরে 8 পাউণ্ড-ভারের তৃতীয় একটি বস্তু উহার উপর রাখা হইল। এইরূপ ক্ষেত্রে, খুঁটি দুইটির উপর কিরূপ চাপ পড়িবে ?

[W. B. H. S. 1969]

22. (a). 6 মিটার দীর্ঘ ও 2 কিলোগ্রাম-ভার বিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ড দুইটি কীলকের উপর অনুভূমিক ভাবে শায়িত আছে। দণ্ডটির প্রান্তদ্বয় কীলক দুইটির উপর অবস্থিত। দণ্ডটির মধ্যবিন্দু হইতে সর্বাপেক্ষা অধিক দূরবর্তী এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর, যেখানে 17 কিলোগ্রাম-ভার এর একটি বস্তু স্থাপন করিলে, কোনও কীলকই ভাঙ্গিয়া যাইবে না। ধরিয়া লইবে যে, কোন কীলকই 12 কিলোগ্রাম-ভার এর বেশী বহন করিতে পারে না। [C. U. P. 1974]

(b). দণ্ডটির উপরে স্থাপিত বস্তুটির ওজন 15 কিলোগ্রাম-ভার হইলে, কি হইবে ?

23. 20 ফুট দীর্ঘ একটি সুষম দণ্ডের একপ্রান্ত কোন এক অনুভূমিকতলে স্থিত একটি মসৃণ কব্জাতে সংবদ্ধ এবং অপর প্রান্ত ঐ অনুভূমিক তলের সহিত 30° উন্নতি কোণে একটি দড়ি বাঁধিয়া টানা হইতেছে এবং তখন দড়ির টান 30 পা.-ভার। অনুভূমিকতল হইতে 4 ফুট উচ্চতায় দণ্ডের উপর কি বল অনুভূমিক দিকে প্রয়োগ করিলে, দণ্ডটি উল্লম্ব অবস্থায় থাকিবে ?

24, W ভারবিশিষ্ট AB সুষম দণ্ডের A প্রান্ত একটি কব্জায় আটকানো আছে এবং B প্রান্তে দণ্ডের সহিত 30° কোণে দড়িতে বাঁধিয়া দণ্ডটিকে অনুভূমিকের সহিত 45° কোণে স্থিরাবস্থায় রাখা আছে। দড়ির টান নির্ণয় কর।

[W. B. H. S. Comp. 1967]

25. একটি খুঁটি খাড়াভাবে মাটিতে এমনভাবে পুঁতিয়া রাখা আছে যে, উহা মাটির উপর 10 ফুট আছে। একটি দড়ির একপ্রান্ত খুঁটির শীর্ষদেশে এবং অপর প্রান্ত খুঁটি বরাবর অনুভূমিকতলে খুঁটি হইতে 20 ফুট দূরে অশিথিল অবস্থায় বাঁধা আছে। দড়িটিতে এক হন্দর ভারের বল প্রয়োগ করিলে, খুঁটিটি ভূমিতে ভাঙ্গিয়া পড়িবার উপক্রম করিবে। পাদদেশ হইতে দ্বিগুণ দূরত্বে দড়িটি মাটিতে বাঁধা থাকিলে, কি পরিমাণ বল প্রয়োগ করিলে, খুঁটিটি ভূমিতে ভাঙ্গিয়া পড়িবে ?

[W. B. H. S. 1965]

26. P, Q, R তিনটি বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ বরাবর ক্রিয়াশীল আছে। উহাদের লব্ধি ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{P}{\sin A}+\frac{Q}{\sin B}+\frac{R}{\sin C}=0$$

27. তিনটি বল P, 2P, 3P যথাক্রমে একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ বরাবর ক্রিয়াশীল আছে। উহাদের লব্ধির মান ও অভিমুখিতা নির্ণয় কর; এবং ঐ ক্রিয়ারেখার সহিত $\overline{BC}$ বাহুর ছেদ বিন্দু নির্ণয় কর। [C. U. P. 1971]

28. ABC সমকোণী ত্রিভুজের A কোণের পরিমাপ 90° এবং $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ এর মান যথাক্রমে 5 ও 12 একক। A, B, C বিন্দুর চারিদিকে কোন একটি বলের ভ্রামক যথাক্রমে 0, 25 ও 144 একক। বলটির মান, দিক ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর।

29. ABCD একটি আয়তক্ষেত্র, যেখানে $\overline{BC}$ = 4 ফুট। 30, 40, 50 পাউণ্ড ভারের তিনটি বল $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, ও $\overrightarrow{CD}$ বরাবর ক্রিয়াশীল। ইহাদের লব্ধির মান ও $\overline{BC}$ কে যে কোণে এবং B হইতে যে দূরত্বে উহাকে ছেদ করিবে তাহা নির্ণয় কর।

[W. B. H. S. 1964]

30. r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গাড়ীর একটি চাকার ভার w. h উচ্চতাবিশিষ্ট একটি প্রতিবন্ধকের উপর দিয়া চাকাটিকে কেন্দ্রগামী একটি অনুভূমিক বলের সাহায্যে, ঠেলিয়া পার করিতে হইবে। দেখাও যে, ইহার জন্য যে বলের প্রয়োজন তাহা $\dfrac{w\sqrt{2rh-h^2}}{r-h}$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; (প্রতিবন্ধকটি সম্পূর্ণরূপে অমসৃণ)।

ANSWERS. (প্রশ্নমালা 5.)

1. 20 পা.-ভার (সদৃশ সমান্তরাল বল); প্রদত্ত প্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরত্বে সক্রিয়। 2. A প্রান্ত হইতে 3′4″ দূরে উপরের দিকে 18 পা.-ভার বল। 3. বিন্দুটি 6 পা.-ভারের ক্রিয়াবিন্দুতে অবস্থিত। 4. প্রদত্ত প্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরে খুঁটিটি দিতে হইবে। 5. 90 পা.-ভার। 6. 9 পা.-ভার। 7. 16 ফুট। 8. 150 গ্রা.-ভার; 30 সে. মি.। 9. এক প্রান্ত হইতে 10 ফুট দূরে; (ঐ প্রান্তে চাপ বেশী পড়িবে)। 10. একপ্রান্ত হইতে 3 ফুট দূরে; (ঐ প্রান্তে চাপ বেশী পড়িবে)। 11. প্রথম প্রান্তে 58 পা.-ভার চাপ; অপর প্রান্তে 42 পা.-ভার। 13. 5 পা.-ভার। 14. 3 ফুট। 15. মধ্যবিন্দু হইতে 1 ফুট দূরে। 16. প্রতিক্রিয়া 15 পা.-ভার; দড়ির টান 20 পা.-ভার। 17. দৈর্ঘ্য=12 ফুট।

18. প্রথম স্তম্ভের উপরে চাপ $=3\frac{2}{3}$ টন-ভার ; দ্বিতীয়টি $=4\frac{1}{3}$ টন-ভার। 19. (i): মধ্যবিন্দু হইতে 3 ফুট দূরে যেই খুঁটিটি অবস্থিত, তাহার নিকটবর্তী প্রান্তকে প্রথম প্রান্ত বলা যাক্। প্রথম প্রান্তে 100 পা. ভার ঝুলাইলে, এবং দ্বিতীয় খুঁটিতে দণ্ডটি বাঁধা না থাকিলে, উহা উল্টাইয়া পড়িবে ; (ii) দ্বিতীয় প্রান্তে 100 পা.-ভার ঝুলাইলে, চাপদ্বয় = 50 পা.-ভার ; 170 পা.-ভার। 20. 50 পা.-ভার ; 8 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চি। 21. 12 পা.-ভারের নিকটবর্তী খুঁটির উপরে চাপ $=31{\cdot}5$ পা.-ভার ; অপর চাপটি $=12{\cdot}5$ পা.-ভার। 22. (a) $\frac{15}{17}$ মিটার ; (b) $1{\cdot}4$ মিটার। 23. $75\sqrt{3}$ পা.-ভার। 24. $\frac{1}{2}w\sqrt{2}$. 25. $\frac{1}{10}\sqrt{85}$ হন্দর ভারের চেয়ে একটু বেশী। 27. $P\sqrt{3}$; $\perp \overline{BC}$ (A বিন্দুর দিকে) ; বর্ধিত $\overline{BC}$ কে C হইতে $\frac{1}{2}\overline{BC}$ দূরে ছেদ করে। 28. মান $=13$ একক ; ক্রিয়ারেখা $\overrightarrow{AF}$, $\overline{BC}$ ব্যাসের উপর অঙ্কিত বৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শক ; $\angle BAF = \angle BCA$. 29. মান $=20\sqrt{5}$ পা.-ভার ; B হইতে 10 ফুট দূরে, বর্ধিত $\overline{BC}$ কে $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$ কোণে।

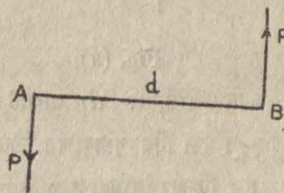
ষষ্ঠ অধ্যায়

যুগ্মবল
(Couple)

6-1. যুগ্মবলের সংজ্ঞা :

একটি দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত দুইটি সমান অসদৃশ সমান্তরাল (সমরেখ নহে) বলকে **যুগ্মবল (couple)** বলা হয়।

একটি যুগ্মবলের বল দুইটির ক্রিয়ারেখাদ্বয়ের লম্ব-দূরত্বকে ঐ যুগ্মবলের **বাহু (arm)** বলা হয়।

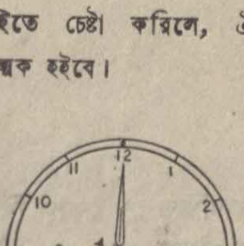


কোন যুগ্মবলের বল দুইটি P এবং P হইলে, এবং উহার বাহু d হইলে, যুগ্মবলটিকে সাধারণতঃ (P, d) এইরূপ লেখা হয়। চিত্রে, (P, d) যুগ্মবলের বাহু $\overline{AB}=d$.

যুগ্মবলের ভ্রামক :

যুগ্মবল গঠনকারী বল দুইটির একটির এবং উহার বাহুর গুণফলকে **যুগ্মবলের ভ্রামক (moment of a couple)** বলা হয়। সুতরাং, (P, d) যুগ্মবলের ভ্রামক $=\text{P}d$ একক।

একটি যুগ্মবলের ভ্রামক ধনাত্মক অথবা ঋনাত্মক হইতে পারে। যুগ্মবলগঠনকারী বলদ্বয় কোন দৃঢ় বস্তুতে প্রযুক্ত হইয়া উহাকে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে ঘুরাইতে চেষ্টা করিলে, ঐ যুগ্মবলের ভ্রামক ধনাত্মক হইবে; অন্যথায়, ইহা ঋণাত্মক হইবে।



উপরোক্ত চিত্রে, একটি দৃঢ়বস্তুতে (P. d) যুগ্মবল সক্রিয় যেখানে, উহার বাহু $\overline{AB}=d$ একক, এবং বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখা $\overline{AB}$ এর লম্বাভিমুখে অবস্থিত ; এবং এই যুগ্মবলের প্রয়োগে বস্তুটি ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত-ক্রমে আবর্তন করিতে চেষ্টা করিবে।

ঘড়িতে চাবি দ্বারা দম দিবার সময়, অথবা, দুই আঙ্গুলের সাহায্যে লাটু ঘুরাইবার সময়, আমরা যুগ্মবল প্রয়োগ করিয়া থাকি।

6-2. কোনও যুগ্মবলের সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর চারিদিকে যুগ্মবল গঠনকারী বল দুইটির ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল ধ্রুবক, এবং তাহা ঐ যুগ্মবলের ভ্রামকের সমান।

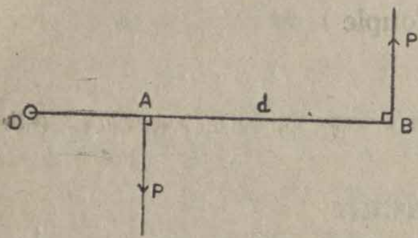


Fig. (a)

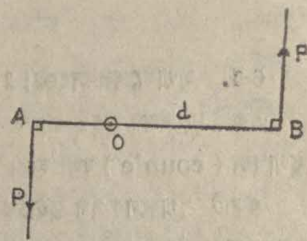


Fig. (b)

মনে করি, (P, d) একটি যুগ্মবল, এবং উহাদের সমতলে O যে কোন বিন্দু। O বিন্দুর মধ্য দিয়া যুগ্মবলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব টানি, এবং মনে করি, তাহা উহাদের ক্রিয়ারেখাদ্বয়কে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) O বিন্দুটি $\overline{AB}$-এর বহিঃস্থ হইলে, O বিন্দুর চারিদিকে যুগ্মবল গঠনকারী বলদ্বয়ের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল

$=P\cdot\overline{OB}-P.\overline{OA}$, [Fig (a) হইতে]

$=P.(\overline{OB}-\overline{OA})=P.\overline{AB}$

$=P.d=$ ধ্রুবক $=$ যুগ্মবলের ভ্রামক।

(ii) O বিন্দুটি $\overline{AB}$ এর অন্তঃস্থ হইলে, O বিন্দুর চারিদিকে যুগ্মবল গঠনকারী বলদ্বয়ের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল

$=P.\overline{OA}+P.\overline{OB}$, [Fig.(b) হইতে]

$=P.(\overline{OA}+\overline{OB})=P.\overline{AB}$

$=P.d=$ ধ্রুবক

$=$ যুগ্মবলের ভ্রামক।

মন্তব্য : যুগ্মবলের ভ্রামক কখনও শূন্য হইবে না।

6-3. দুইটি সামতলিক বলের সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর চারিদিকে উহাদের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য না হইয়া একটি ধ্রুবক হইলে, ঐ বল দুইটি একটি যুগ্মবল গঠন করিবে।

মনে করি, P ও Q দুইটি সামতলিক বল এবং উহাদের সমতলে O যে কোন বিন্দু। এখন, উহাদের ক্রিয়ারেখা পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না ; কারণ, তাহা হইলে, ঐ ছেদবিন্দুর চারিদিকে P ও Q এর ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল

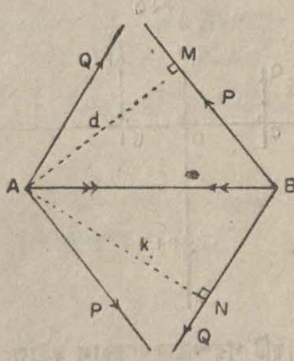
শূন্য হইবে, যাহা প্রদত্ত শর্তের বিরুদ্ধ। সুতরাং, P ও Q বল দুইটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল হইবে। যদি উহারা সদৃশ সমান্তরাল হয়, অথবা অসদৃশ অসমান সমান্তরাল হয়, তবে উহাদের একটি লব্ধি থাকিবে ; এবং সেই লব্ধির ক্রিয়ারেখার উপরিস্থ যে কোন বিন্দুর চারিদিকে P ও Q এর ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হইবে, যাহা প্রদত্ত শর্তের বিরুদ্ধ। সুতরাং, P ও Q বল দুইটি অতি অবশ্যই অসদৃশ, সমান ও সমান্তরাল হইবে ; অর্থাৎ, উহারা একটি যুগ্মবল হইবে।

6·4. একটি দৃঢ় বস্তুর উপর একই সমতলে প্রযুক্ত দুইটি যুগ্মবলের ভ্রামক যদি পরস্পর সমান (মানে) হয়, এবং বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়া করে, তাহা হইলে, উহারা সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

মনে করি, (P, d) এবং (Q, k) দুইটি যুগ্মবল, যাহারা বিপরীত অভিমুখিতায় সক্রিয়, এবং

$$Pd = Qk. \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(a) যুগ্মবল দুইটি গঠনকারী বল চারিটি যখন পরস্পর সমান্তরাল নহে :



মনে করি, (P, d) এর একটি বল P এবং (Q, k) এর একটি বল Q এর ক্রিয়ারেখা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে এবং অপর দুইটি বল পরস্পরকে B বিন্দুতে ছেদ করে। তখন, A বিন্দু হইতে B এতে প্রযুক্ত P ও Q বল দুইটির ক্রিয়ারেখার লম্ব-দূরত্ব যথাক্রমে d এবং k হইবে।

এখন, A বিন্দুর চারিদিকে B এতে প্রযুক্ত P ও Q বল দুইটির ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল

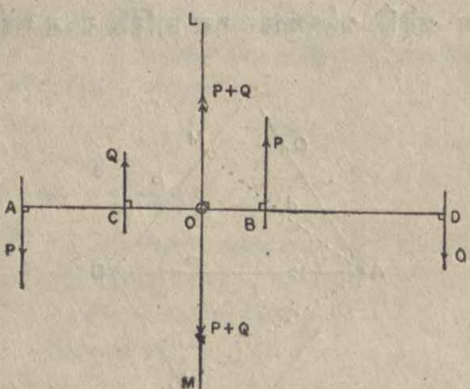
$$= Pd - Qk = 0, \quad [\,(1) \text{ হইতে}\,]।$$

সুতরাং, B এতে প্রযুক্ত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি A বিন্দুগামী এবং তাহা $\overrightarrow{BA}$ বরাবর ক্রিয়াশীল।

অনুরূপভাবে, A এতে প্রযুক্ত P ও Q বল দুইটি লব্ধি $\overrightarrow{AB}$ বরাবর ক্রিয়াশীল।

যেহেতু, A এতে প্রযুক্ত বল দুইটি B এতে প্রযুক্ত বল দুইটির সমান এবং বিপরীত অভিমুখী এবং A এতে প্রযুক্ত বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, B এতে প্রযুক্ত বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান। অতএব, A এতে প্রযুক্ত বল দুইটির লব্ধি ও B এতে প্রযুক্ত বল দুইটির লব্ধি মানে সমান এবং বিপরীত অভিমুখিতায় একই রেখায় ক্রিয়াশীল হইবে; কারণ, উহারা যথাক্রমে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BA}$ বরাবর ক্রিয়াশীল (পূর্বে প্রমাণিত)। সুতরাং, যুগ্মবল দুইটি গঠনকারী বল চারিটির লব্ধি শূন্য হইবে; অর্থাৎ, যুগ্মবল দুইটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

(b) যুগ্মবল গঠনকারী বল চারিটি যখন পরস্পর সমান্তরাল :



যুগ্মবল গঠনকারী বল চারিটি পরস্পর সমান্তরাল হইলে, একটি সরলরেখা অঙ্কন করি, যাহা উহাদের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব, এবং উপরোক্ত চিত্রানুযায়ী A, B, C, D বিন্দুতে উহাদিগকে ছেদ করে। যেহেতু, প্রদত্ত শর্তানুসারে, যুগ্মবল দুইটির ভ্রামকের মান সমান,

$$\therefore \quad P.\overline{AB} = Q.\overline{CD} \qquad \dots \qquad (i)$$

B এবং C এতে প্রযুক্ত P ও Q বল দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলিয়া, উহাদের লব্ধি (P+Q) এর ক্রিয়াবিন্দু $\overline{BC}$ এর উপর থাকিবে, যেখানে,

$$P.\overline{OB} = Q.\overline{OC}\,; \qquad \dots \qquad (ii)$$

এবং উহার অভিমুখিতা B এতে প্রযুক্ত P এর অভিমুখিতায় এবং ক্রিয়ারেখা $\overrightarrow{OL}$ বরাবর হইবে(।

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$P.(\overline{AB}-\overline{OB})=Q.(\overline{CD}-\overline{OC})\;;$$

বা, $P.\overline{AO}=Q.\overline{OD}.\qquad\cdots\quad$ (iii)

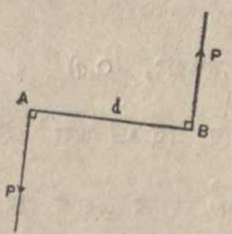
এখন, (iii) হইতে দেখা যাইতেছে, A এবং D এতে প্রযুক্ত P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধি, (P+Q), O বিন্দুতে ক্রিয়া করিবে এবং তাহা A এতে প্রযুক্ত P বলের অভিমুখিতায় হইবে। অতএব, ইহার ক্রিয়ারেখা $\overrightarrow{OM}$ বরাবর হইবে।

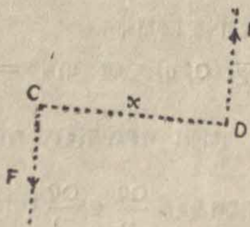
এখন, যেহেতু, এই দুইটি লব্ধির মান সমান এবং ইহারা বিপরীত অভিমুখিতায় একই রেখায় ক্রিয়াশীল, সুতরাং, ইহাদের লব্ধি শূন্য হইবে; অর্থাৎ, যুগ্মবল গঠনকারী বল চারিটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

মন্তব্য : একই সমতলে অবস্থিত দুইটি যুগ্মবলের ভ্রামকের মান সমান ও একই চিহ্নযুক্ত হইলে, যুগ্মবলদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

কারণ, উহাদের যে কোন একটির যুগ্মবল গঠনকারী বল দুইটির অভিমুখিতা ঠিক বিপরীত অভিমুখে পরিবর্তিত করিলে, যুগ্মবল দুইটির বল চারিটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

6-5. একটি যুগ্মবলকে উহার সমান ভ্রামক-মান ও একই চিহ্ন বিশিষ্ট অপর একটি যুগ্মবলে পরিবর্তন :





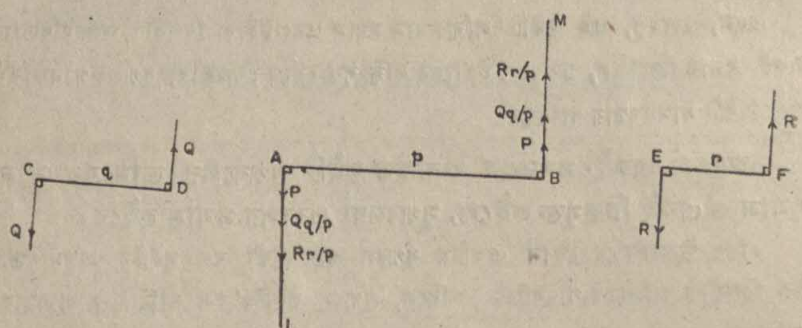
মনে করি, (P, d) একটি যুগ্মবল। তাহা হইলে, ইহার ভ্রামক $=P\,d$. (P, d) এর সমতলে (F, x) একটি যুগ্মবল পুনঃ স্থাপন করা থাক, যেখানে $Fx=Pd$, মানে এবং চিহ্নে।

(i) F বল নির্দিষ্ট হইলে, $x = \mathrm{P}d/\mathrm{F}$; এবং তখন (P, d) এবং $(\mathrm{F}, \mathrm{P}d/\mathrm{F})$ সমতুল্য ; অর্থাৎ, উহাদের ফল একই।

(ii) আবার, x নির্দিষ্ট হইলে, $\mathrm{F} = \mathrm{P}d/x$; এবং তখন, (P, d) ও $(\mathrm{P}d/x, x)$ সমতুল্য ; অর্থাৎ, উহাদের ফল একই হইবে।

সুতরাং, যে সমতলে (P, d) অবস্থিত সেই সমতলে ইহার পরিবর্তে $(\mathrm{F}, \mathrm{P}d/\mathrm{F})$, অথবা, $(\mathrm{P}d/x, x)$ যুগ্মবল লওয়া যাইতে পারে, যেখানে এই নূতন যুগ্মবলের বল দুইটির অভিমুখিতা যে কোন দিকে হইতে পারে, একমাত্র নূতন যুগ্মবলের ভ্রামককে প্রদত্ত যুগ্মবলের ভ্রামকের সঙ্গে সমচিহ্ন হইতে হইবে।

6-6. কতিপয় সামতলিক যুগ্মবলের লব্ধি নির্ণয় :



মনে করি, কোন দৃঢ় বস্তুতে একই সমতলে, (P, p), (Q, q), (R, r),……, কতিপয় (সসীম সংখ্যক) যুগ্মবল ক্রিয়াশীল আছে। মনে করি, (P, p) এর বাহু $\overline{\mathrm{AB}} = p$ এবং এই যুগ্মবল গঠনকারী একটি বল P, $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ বরাবর এবং অপর বল P, $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ বরাবর ক্রিয়াশীল।

যেহেতু, (Q, q) এর ভ্রামক $= \mathrm{Q}q = \left(\frac{\mathrm{Q}q}{p}\right)p$, সুতরাং, (Q, q) এর পরিবর্তে $\left(\frac{\mathrm{Q}q}{p}, p\right)$ যুগ্মবল লওয়া যাইতে পারে, যেখানে উহার বাহু $\overline{\mathrm{AB}}$ এবং এই যুগ্মবল গঠনকারী বল দুইটি $\frac{\mathrm{Q}q}{p}$ ও $\frac{\mathrm{Q}q}{p}$ যথাক্রমে $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ ও $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ বরাবর ক্রিয়া করিবে।

অনুরূপভাবে, (R, r) এর পরিবর্তে $\left(\frac{\mathrm{R}r}{p}, p\right)$ লওয়া যাইতে পারে, যেখানে উহার বাহু $\overline{\mathrm{AB}}$ এবং এই যুগ্মবল গঠনকারী বল দুইটি, $\frac{\mathrm{R}r}{p}$ ও $\frac{\mathrm{R}r}{p}$, যথাক্রমে, $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ ও $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ বরাবর ক্রিয়া করিবে।

এইরূপে, অপর যুগ্মবলসমূহকে পরিবর্তিত করিয়া এক একটি নূতন যুগ্মবল লওয়া যাইতে পারে, যাহাদের প্রত্যেকটির বাহু $\overline{AB}$ এবং প্রত্যেকটির একটি বল $\overrightarrow{AL}$ এবং অপরটি $\overrightarrow{BM}$ বরাবর ক্রিয়া করিবে।

সুতরাং, প্রদত্ত যুগ্মবলসমূহের পরিবর্তে একটি যুগ্মবল পাওয়া যায়, যাহার বাহু $\overline{AB}$ এবং যুগ্মবল গঠনকারী প্রতিটি বল $=P+\frac{Qq}{p}+\frac{Rr}{p}+\quad\cdots\quad\cdots$

সুতরাং, প্রদত্ত যুগ্মবলসমূহের সমতুল্য একটি যুগ্মবল পাওয়া যাইবে, যাহার ভ্রামক

$$=\left(P+\frac{Qq}{p}+\frac{Rr}{p}+\quad\cdots\quad\cdots\right)\times p$$

$$=Pp+Qq+Rr+\quad\cdots\quad\cdots$$

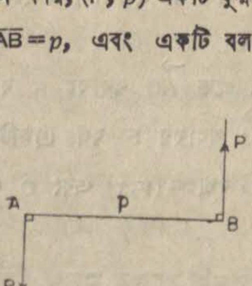
= প্রদত্ত যুগ্মবলসমূহের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল।

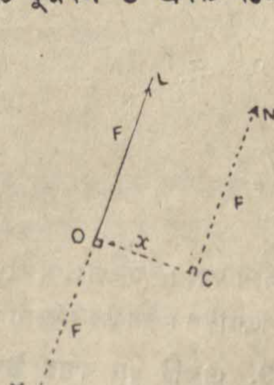
সুতরাং, একই সমতলে একটি দৃঢ় বস্তুতে প্রযুক্ত কতিপয় যুগ্মবলের লব্ধি একটি যুগ্মবল এবং উহার ভ্রামক প্রদত্ত যুগ্মবলসমূহের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফলের সমান।

দ্রষ্টব্য: Pp, Qq, Rr,……, ইত্যাদি ভ্রামকগুলির মধ্যে কয়েকটি ঋণাত্মক হইলে, ছবিটি নূতন করিয়া আঁকিতে হইবে। মনে রাখিতে হইবে, "বাহু $\overline{AB}$ সর্বদাই ধনাত্মক; ঋণাত্মক ভ্রামক-বিশিষ্ট নূতন যুগ্মবলের বল দুইটিরই দিক্ একমাত্র পরিবর্তনীয়"। যেমন, তৃতীয় যুগ্মবলের ভ্রামকটি যদি $(-Rr)$ হয়, তবে $\overrightarrow{AL}$ অথবা $\overrightarrow{BM}$ বরাবর প্রতিটি বল $\left(P+\frac{Qq}{p}-\frac{Rr}{p}+\cdots\right)$ হইবে।

6-7. একই সমতলে প্রযুক্ত একটি যুগ্মবল ও একটি বলের লব্ধি নির্ণয়।

মনে করি, (P, p) একটি যুগ্মবল, যাহার বাহু $\overline{AB}=p$, এবং একটি বল F, যাহা





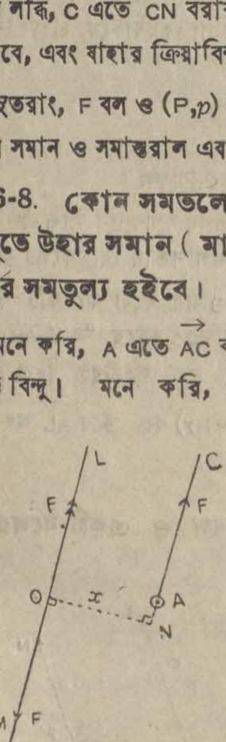
O এতে $\overrightarrow{OL}$ বরাবর একই সমতলে সক্রিয়। এক্ষণে, (P, p) যুগ্মবলের পরিবর্তে (F, x) একটি যুগ্মবল এমন ভাবে সংস্থাপন করা যাক্ যেন (F, x) এর একটি বল O

এতে $\overrightarrow{LO}$ বরাবর ক্রিয়া করে এবং $Fx=Pp$ মানে ঐ দিকে হয় ($x=\overline{OC}$). তাহা হইলে, (P,p) ও $\overrightarrow{OL}$ বরাবর F বলের সমতুল্য (F,x) ও $\overrightarrow{OL}$ বরাবর F বল। কিন্তু, O এতে $\overrightarrow{OL}$ বরাবর F এবং $\overrightarrow{LO}$ বা $\overrightarrow{OM}$ বরাবর F সমরেখ, সমান ও বিপরীত-মুখী হওয়ায়, সাম্যাবস্থায় থাকিবে। সুতরাং, (F, x) যুগ্মবল এবং O এতে $\overrightarrow{OL}$ বরাবর F বলের লব্ধি, C এতে $\overrightarrow{CN}$ বরাবর F বল হইবে, যাহা প্রদত্ত F বলের অভিমুখিতায় ক্রিয়া করিবে, এবং যাহার ক্রিয়াবিন্দু O হইতে x দূরত্বে থাকিবে ; যেখানে $x=Pp/F$.

সুতরাং, F বল ও (P,p) যুগ্মবলের লব্ধি একটি মাত্র বল F হইবে, যাহা প্রদত্ত বল F এর সমান ও সমান্তরাল এবং উহা হইতে Pp/F দূরত্বে ক্রিয়া করিবে।

6-8. কোন সমতলে ক্রিয়াশীল একটি বল, ঐ সমতলে প্রদত্ত একটি বিন্দুতে উহার সমান (মানে) ও অভিমুখিতায় একটি বল ও একটি যুগ্ম-বলের সমতুল্য হইবে।

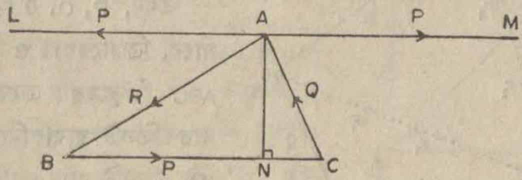
মনে করি, A এতে $\overrightarrow{AC}$ বরাবর F বল ক্রিয়াশীল। ঐ বলের সমতলে O একটি প্রদত্ত বিন্দু। মনে করি, O হইতে $\overline{AC}$ এর লম্ব-দূরত্ব $\overline{ON}=x$. O বিন্দু দিয়া $\overleftrightarrow{LM} \perp \overline{ON}$ টানি। এখন, O এতে $\overrightarrow{OL}$ বরাবর F এবং $\overrightarrow{OM}$ বরাবর F বল প্রযুক্ত করা যাক্, যেন উহারা বিপরীত অভিমুখে ক্রিয়া করে। যেহেতু ইহারা সমরেখ এবং বিপরীত অভিমুখে ক্রিয়াশীল, সুতরাং, ইহাদের কোন ক্রিয়াফল নাই।



এখন, A এতে $\overrightarrow{AC}$ বরাবর F বল এবং O এতে $\overrightarrow{OM}$ বরাবর F বল একটি যুগ্মবল (F,x) গঠন করে। সুতরাং, A এতে F বল, একটি যুগ্মবল (F,x) এবং O এতে $\overrightarrow{OL}$ বরাবর ক্রিয়াশীল F বল এর সমতুল্য।

6-9. একটি দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত তিনটি বলের মান, ক্রিয়ারেখা ও অভিমুখিতা যদি কোন ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা যথাক্রমে নির্দেশিত হয়, তাহা হইলে, ঐ তিনটি বল একটি যুগ্মবলের সমতুল্য হইবে এবং উহার ভ্রামক ঐ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হইবে।

মনে করি, একটি দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q, R মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে যথাক্রমে, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা নির্দেশিত। A বিন্দু দিয়া $\overline{BC}$ এর সমান্তরাল করিয়া $\overline{LM}$ অঙ্কন করি। এখন, A এতে, $\overrightarrow{AL}$ বরাবর P বল এবং $\overrightarrow{AM}$ বরাবর P বল যুগপৎ প্রযুক্ত করা যাক্। ইহারা সমরেখ, মানে সমান



এবং বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল বলিয়া, ইহাদের কোন ফল থাকিবে না। A হইতে $\overline{BC}$ এর উপর $\overline{AN}$ লম্ব টানি, যেখানে $\overline{BC}$ এর উপর N অবস্থিত। A বিন্দুতে তিনটি বল, P, Q, R যথাক্রমে, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ বরাবর ক্রিয়াশীল, এবং উহারা যথাক্রমে, ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশিত বলিয়া, "বল-ত্রিভুজ"-এর উপপাদ্য অনুযায়ী, এই তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিবে। তখন, অবশিষ্ট P বল $\overrightarrow{AL}$ এবং P বল $\overrightarrow{BC}$ বরাবর সক্রিয় থাকিয়া, একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক

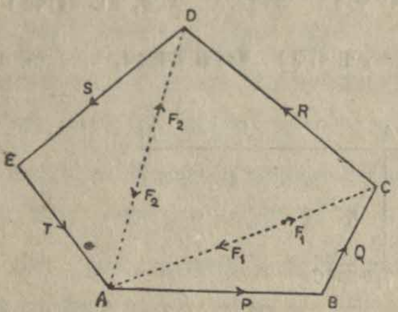
$$=P.\overline{AN}=\overline{BC}.\overline{AN}$$

$$=2\cdot(\tfrac{1}{2}\,\overline{BC}.\ \overline{AN})=2\triangle ABC.$$

6·10. একটি দৃঢ় বস্তুর উপর একই সমতলে প্রযুক্ত কতিপয় বলের মান, ক্রিয়ারেখা ও দিক্ যদি কোন বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা যথাক্রমে নির্দেশিত হয়, তাহা হইলে, ঐ বলসমূহ একটি যুগ্মবলের সমতুল্য হইবে, যাহার ভ্রামক ঐ বহুভুজটির ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হইবে।

মনে করি, একটি দৃঢ় বস্তুর উপর কোন প্রদত্ত সমতলে P, Q, R, S, T বলসমূহ ক্রিয়াশীল এবং উহারা মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে যথাক্রমে ABCDE বহুভুজের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{EA}$ দ্বারা নির্দেশিত।

$\overline{AC}$ ও $\overline{AD}$ অঙ্কন করি ; এবং $\overrightarrow{AC}$, বরাবর F_1 ; $\overrightarrow{CA}$ বরাবর F_1 ; এবং $\overrightarrow{AD}$ বরাবর F_2 ; $\overrightarrow{DA}$ বরাবর F_2 বল যুগপৎ প্রয়োগ করি, যেখানে $\overline{AC}=F_1$; $\overline{AD}=F_2$. এখন, এই নূতন চারিটি বলের সম্মিলিত কোন ক্রিয়াফল থাকিবে না।



এখন, P, Q, ও F_1 $(=\overrightarrow{CA})$ বল মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু তিনটি দ্বারা নির্দেশিত বলিয়া, এই তিনটি বল একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $=2\triangle ABC$.

আবার F_1 $(=\overrightarrow{AC})$, R ও F_2 $(=\overrightarrow{DA})$ বল মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে, ACD ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা নির্দেশিত। সুতরাং, এই তিনটি বল একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $=2\triangle ACD$.

সেইরূপ, F_2 $(=\overrightarrow{AD})$, S, T বল মানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে ADE ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু তিনটি দ্বারা নির্দেশিত বলিয়া, উহারা একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $=2\triangle ACE$.

এখন, এই তিনটি যুগ্মবল একটি যুগ্মবলের সমান, যাহার ভ্রামক

$=2(\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE)$

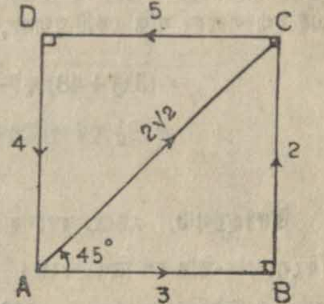
$=$ABCDE বহুভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

6-11. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর পরিমাপ 5 ফুট। 3, 2, 5, 4 ও $2\sqrt{2}$ পাউণ্ড-ভার বল পাঁচটি যথাক্রমে, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ ও $\overrightarrow{AC}$ বরাবর ক্রিয়াশীল হইলে, দেখাও যে, উহারা একটি যুগ্মবল গঠন করিয়াছে। এই যুগ্মবলের ভ্রামকের মান নির্ণয় কর।

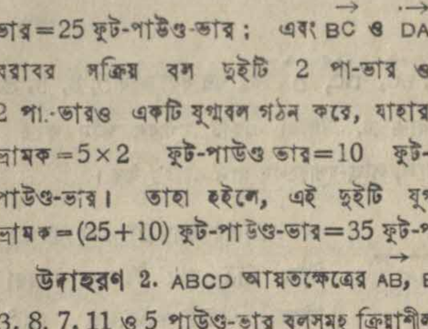
$\overrightarrow{AC}$ বরাবর ক্রিয়াশীল $2\sqrt{2}$ পা.-ভার বলের বিশ্লেষিতাংশ $\overrightarrow{AB}$ বরাবর $2\sqrt{2}\cos 45°$ পা.-ভার, অর্থাৎ, 2 পা.-ভার, এবং $\overrightarrow{AD}$ বরাবর $2\sqrt{2}\sin 45°$

পা.-ভার, অর্থাৎ 2 পা-ভার। সুতরাং, প্রদত্ত পাঁচটি বল $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ বরাবর যথাক্রমে, 5, 2, 5, 2 পাউণ্ড-ভারের সমতুল্য।



এখন, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বরাবর সক্রিয় বল দুইটি 5 পা.-ভার ও 5 পা.-ভার একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $=5\times5$ ফুট-পাউণ্ড-ভার $=25$ ফুট-পাউণ্ড-ভার; এবং $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DA}$ বরাবর সক্রিয় বল দুইটি 2 পা-ভার ও 2 পা.-ভারও একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $=5\times2$ ফুট-পাউণ্ড ভার $=10$ ফুট-পাউণ্ড-ভার। তাহা হইলে, এই দুইটি যুগ্মবলের লব্ধি একটি যুগ্মবল, যাহার ভ্রামক $=(25+10)$ ফুট-পাউণ্ড-ভার $=35$ ফুট-পাউণ্ড-ভার।

উদাহরণ 2. ABCD আয়তক্ষেত্রের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ ও $\overrightarrow{AC}$ বরাবর যথাক্রমে 3, 8, 7, 11 ও 5 পাউণ্ড-ভার বলসমূহ ক্রিয়াশীল। দেখাও যে, উহারা একটি যুগ্মবলের সমান, যদি $\overline{AB}=6$ ফুট ও $\overline{BC}=4\frac{1}{2}$ ফুট হয়। তখন দেখাও যে, ঐ যুগ্মবলের ভ্রামক $79\frac{1}{2}$ ফুট-পাউণ্ড-ভার। **[W. B. H. S. 1972]**



$\overline{AB}=6$ ফুট; $\overline{BC}=4\frac{1}{2}$ ফুট।

$\therefore\ \overline{AC}=\sqrt{(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)}$

$=7\frac{1}{2}$ ফুট।

তখন, $\angle BAC=\alpha$ হইলে,

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

$\therefore$ $\overrightarrow{AC}$ বরাবর সক্রিয় 5 পা.-ভার এর বিশ্লেষিতাংশ $\overrightarrow{AB}$ বরাবর $=5\times\cos\alpha$ পা.-ভার $=4$ পা.-ভার; $\overrightarrow{AD}$ বরাবর বিশ্লেষিতাংশ $=5\times\sin\alpha$ পা.-ভার $=3$ পা.-ভার।

সুতরাং, প্রদত্ত বলসমূহ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ বরাবর যথাক্রমে, 7, 8, 7, 8 পা.-ভার এর সমতুল্য।

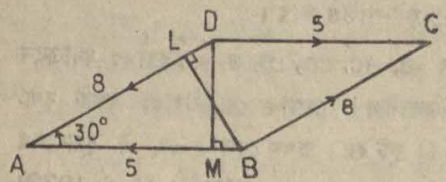
এখন, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বরাবর সক্রিয় 7 পা.-ভার ও 7 পা.-ভার বল দুইটি একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $=7\times4\frac{1}{2}$ ফুট-পাউণ্ড-ভার $=31\frac{1}{2}$ ফুট-পাউণ্ড-ভার।

আবার, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DA}$ বরাবর সক্রিয় 8 পা.-ভার ও 8 পা.-ভার বল দুইটি একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $=8\times6$ ফুট-পাউণ্ড-ভার $=48$ ফুট-পাউণ্ড-ভার। এই যুগ্মবলদ্বয়ের লব্ধি একটি যুগ্মবল, যাহার ভ্রামক

$=(31\frac{1}{2}+48)$ ফুট-পাউণ্ড-ভার

$=79\frac{1}{2}$ ফুট-পাউণ্ড-ভার।

উদাহরণ 3. ABCD রম্বসের $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ বরাবর যথাক্রমে 5, 8, 5, 8 কিলোগ্রাম-ভার বল ক্রিয়া করে। দেখাও যে, উহারা একটি যুগ্মবল গঠন করে। $\overline{AB}=8$ মিটার এবং $\angle BAD=30°$ হইলে, লব্ধি-যুগ্মবলের মান বাহির কর।



$\overline{AD}$ এর উপর $\overline{BL}$ এবং $\overline{AB}$ এর উপর $\overline{DM}$ লম্ব টানি। তাহা হইলে, $\overline{BL}=\overline{AB}.\sin 30°$ $=4$ মিটার;

$\overline{DM}=\overline{AD}.\sin 30°=4$ মিটার।

$\overrightarrow{BA}$ ও $\overrightarrow{DC}$ বরাবর সক্রিয় 5 কি. গ্রা.-ভার ও 5 কি. গ্রা.-ভার বল দুইটি একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক

$=-5\times4$ মিটার-কিলোগ্রাম-ভার

$=-20$ মিটার-কিলোগ্রাম-ভার।

আবার, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DA}$ বরাবর সক্রিয় 8 কি. গ্রা.-ভার ও 8 কি. গ্রা.-ভার বল দুইটি একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক

$=8\times4$ মিটার-কিলোগ্রাম-ভার

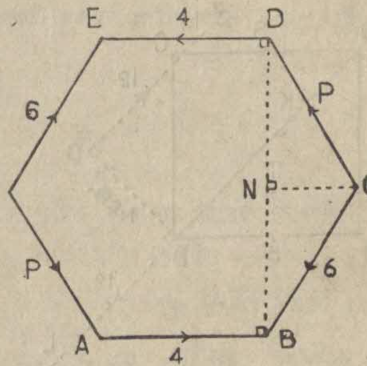
$=32$ মিটার-কিলোগ্রাম-ভার।

এই যুগ্মবল দুইটি একটি যুগ্মবলের সমতুল্য, যাহার ভ্রামক

$=(32-20)$ মিটার-কিলোগ্রাম-ভার

$=12$ মিটার-কিলোগ্রাম-ভার।

উদাহরণ 4. ABCDEF সুষম ষড়্ভুজের $\vec{AB}$, $\vec{CB}$, $\vec{CD}$, $\vec{DE}$, $\vec{FE}$, $\vec{FA}$, বরাবর যথাক্রমে, 4, 6, P, 4, 6, P গ্রাম-ভার বল ছয়টি ক্রিয়াশীল হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে। P এর মান নির্ণয় কর।



ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ বলিয়া, ইহার প্রত্যেক অন্তঃকোণের পরিমাপ 120°.

$\overline{BD}$ অঙ্কন করি। তাহা হইলে, $\overline{BC}$ ও $\overline{CD}$ সর্বসম বলিয়া, $\angle CBD = \angle CDB = 30°$.

$\therefore\ \angle ABD = \angle EDB = 90°$.

$\overline{BC} = a$ সেন্টিমিটার হইলে,

$\overline{BD} = \overline{BC}.\ \cos 30° + \overline{CD}\ .\ \cos\ 30° = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ সে. মি. $= a\sqrt{3}$ সে.মি.।

সুতরাং, সুষম ষড়্ভুজটির বিপরীত বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= a\sqrt{3}$ সে. মি.।

$\vec{AB}$ ও $\vec{DE}$ বরাবর সক্রিয় 4 গ্রা.-ভার ও 4 গ্রা.-ভার বলদ্বয় একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $= 4 \times a\sqrt{3}$ সে. মি.-গ্রাম-ভার।

$\vec{CB}$ ও $\vec{FE}$ বরাবর সক্রিয় 6 গ্রা.-ভার ও 6 গ্রা.-ভার বল দুইটি একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক

$= -6 \times a\sqrt{3}$ সে. মি.-গ্রাম-ভার।

$\vec{CD}$ ও $\vec{FA}$ বরাবর সক্রিয় P গ্রাম.-ভার ও P গ্রাম-ভার বল দুইটিও একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক

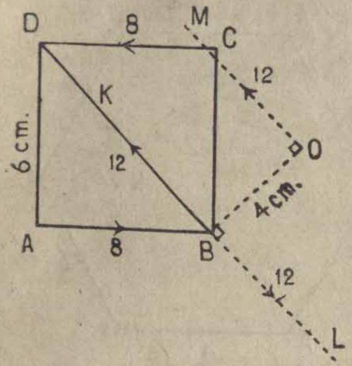
$= P \times a\sqrt{3}$ সে. মি.-গ্রাম-ভার।

এই তিনটি যুগ্মবলের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল $= (4a\sqrt{3} - 6a\sqrt{3} + Pa\sqrt{3})$ সে.মি.-গ্রাম-ভার। প্রদত্ত শর্তানুসারে বল ছয়টি সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া, উহাদের সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর চারিদিকে উহাদের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হইবে।

$\therefore\ 4a\sqrt{3} - 6a\sqrt{3} + Pa\sqrt{3} = 0$; বা, $P = 2$.

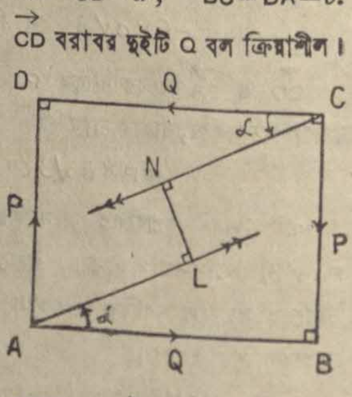
নির্ণেয় উত্তর : $P = 2$

উদাহরণ 5. ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর পরিমাপ 6 সে. মি.। উহার $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ ও $\vec{BD}$ বরাবর যথাক্রমে, 8, 8, 12 গ্রাম-ভার বল সক্রিয় আছে। উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।



প্রদত্ত যুগ্মবলের ($\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$ বরাবর প্রদত্ত বলদ্বয় হইতে উৎপন্ন) ভ্রামক $= 8 \times 6$ সে.মি.-গ্রাম-ভার $= 48$ সে. মি. গ্রাম-ভার। এক্ষণে, এই প্রদত্ত যুগ্মবলের পরিবর্তে সমান ফলদায়ী একটি যুগ্মবল $(12, x)$ সংস্থাপন করা যাক্, যাহার একটি বল $\vec{DB}$ (বা, $\vec{BL}$) বরাবর ক্রিয়া করিবে। তাহা হইলে, $48 = 12x$; বা, $x = 4$. এখন, তাহা হইলে, প্রদত্ত যুগ্মবল ও প্রদত্ত বলের সমতুল্য একটি যুগ্মবল ও একটি বল 12 গ্রাম-ভার $\vec{BD}$ বরাবর পাই, যেখানে এই নূতন যুগ্মবলের একটি বল 12 গ্রাম-ভার এবং বাহু $\overline{BO} = x = 4$ সে. মি.। এখন, $\vec{BD}$ বরাবর 12 গ্রাম-ভার ও $\vec{BL}$ বরাবর 12 গ্রাম ভার সমরেখ, মানে সমান ও বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল হওয়ায়, ইহাদের লব্ধি শূন্য হইবে। তাহা হইলে, প্রদত্ত যুগ্মবল ও প্রদত্ত বলের লব্ধি একটি 12 গ্রা-ভার বল হইবে, তাহা O বিন্দুতে $\vec{OM}$ বরাবর, প্রদত্ত বলের ($\vec{BD}$ বরাবর যাহা সক্রিয়) অভিমুখিতায় ক্রিয়া করিবে, এবং $\overline{BO} = 4$ সে. মি.; $\angle DBO = 90°$.

উদাহরণ 6. ABCD আয়তক্ষেত্রের $\overline{AB} = \overline{CD} = a$; $\overline{BC} = \overline{DA} = b$. $\vec{AD}$ ও $\vec{CB}$ বরাবর দুইটি P বল এবং $\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$ বরাবর দুইটি Q বল ক্রিয়াশীল। দেখাও যে, A এতে ক্রিয়াশীল P ও Q এর লব্ধি-এবং C এতে ক্রিয়াশীল P ও Q এর লব্ধির লম্ব-দূরত্ব $= \dfrac{Pa \backsim Qb}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$.



প্রদত্ত চারিটি বল, (P, a) ও (Q, b) দুইটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহারা পরস্পর বিপরীত অভিমুখে ক্রিয়া করে। (P, a) যুগ্মবলের ভ্রামক $= Pa$ (মানে); (Q, b) যুগ্মবলের ভ্রামক $= Qb$ (মানে)। এই দুইটি যুগ্মবল একটি যুগ্মবলের সমতুল্য, যাহার ভ্রামকের মান $= Pa \backsim Qb$.

A বিন্দুতে সক্রিয় P ও Q বলের লব্ধি $\sqrt{P^2+Q^2}$; C বিন্দুতে সক্রিয় P ও Q বলের লব্ধি $\sqrt{P^2+Q^2}$. এই দুইটি লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা পরস্পর সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখী। সুতরাং, এই দুইটি লব্ধি-বল একটি যুগ্মবল গঠন করে ; এবং এই যুগ্মবলের বাহু d হইলে,

$$\sqrt{P^2+Q^2}.d = Pa \sim Qb \;;$$

$$\therefore \quad d = \frac{Pa \sim Qb}{\sqrt{P^2+Q^2}} .$$

উদাহরণ 7. কোন ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুত্রয় বরাবর ক্রিয়াশীল তিনটি বল একটি যুগ্মবল গঠন করিলে, দেখাও যে, বল তিনটি ত্রিভুজটির অনুরূপ বাহুর সমানুপাতিক। **[C. U. P. 1973]**

মনে করি, ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ বরাবর যথাক্রমে ক্রিয়াশীল তিনটি বল, P, Q, R, একটি যুগ্মবল গঠন করে।

মনে করি, A, B, C হইতে $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ এর লম্বদূরত্ব যথাক্রমে, p, q, r

এখন, A বিন্দুর চারিদিকে P, Q, R বল তিনটির ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল $=Pp$; B বিন্দুর চারিদিকে উহাদের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল $=Qq$; C বিন্দুর চারিদিকে উহাদের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল $=Rr$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে, P, Q, R একটি যুগ্মবল গঠন করে। সুতরাং উহাদের সমতলে যে কোন বিন্দুর চারিদিকে উহাদের ভ্রামকের বীজগণিতীয় যোগফল ধ্রুবক হইবে।

$$\therefore \quad Pp = Qq = Rr.$$

কিন্তু, $\Delta \equiv \triangle ABC = \frac{1}{2}ap = \frac{1}{2}bq = \frac{1}{2}cr.$

$$\therefore \quad P.\frac{2\Delta}{a} = Q.\frac{2\Delta}{b} = R.\frac{2\Delta}{c} \;;$$

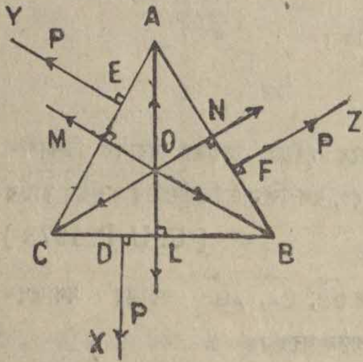
বা, $P : Q : R = a : b : c$;

অর্থাৎ, $P : Q : R = \overline{BC} : \overline{CA} : \overline{AB}.$

উদাহরণ 8. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ, যাহার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a. $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, ও $\overline{AB}$ বাহু যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে 2 : 1 এতে বিভক্ত। D, E, F বিন্দুতে P মানের তিনটি বল বাহুত্রয়ের উপর লম্বভাবে ত্রিভুজের বাহিরের দিকে ক্রিয়াশীল। দেখাও যে, এই তিনটি বল একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামকের মান $\frac{1}{2}Pa$.

ধরি, $\overline{BC}=a$; তাহা হইলে, $\overline{CD}=\overline{AE}=\overline{BF}=a/3$.

$\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ এর উপর যথাক্রমে $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ ও $\overline{CN}$ লম্ব টানি, যাহাদের ছেদবিন্দু O. এখন, O এতে $\vec{OA}$, $\vec{OL}$; $\vec{OB}$, $\vec{OM}$; $\vec{OC}$, $\vec{ON}$ বরাবর সমান মানের 6টি বল P প্রযুক্ত করা যাক্; ইহাদের লব্ধি শূন্য বলিয়া, ইহারা প্রদত্ত বলের লব্ধির কোন পরিবর্তন করিবে না। এখন, $\vec{OL}$, $\vec{OM}$ $\vec{ON}$ বরাবর ক্রিয়াশীল সমান মানের তিনটি বল P, O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, এবং উহাদের মান ABC ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যের সমানুপাতী এবং অনুরূপ বাহুর লম্বাভিমুখে ক্রিয়াশীল বলিয়া, এই তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিবে।



এখন, $\vec{OA}$ বরাবর P বল এবং D বিন্দুতে P বল একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $=P\times\overline{DL}=P\times a/6$; $\vec{OB}$ বরাবর P বল এবং E বিন্দুতে P বল একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $=P\times\overline{ME}=P\times a/6$. $\vec{OC}$ বরাবর P বল এবং F বিন্দুতে P বলও একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $=P\times\overline{NF}=P\times a/6$. এই তিনটি যুগ্মবল একটি যুগ্মবলের সমতুল্য, যাহার ভ্রামক $=3\times P\times a/6=\frac{1}{2}Pa$.

সুতরাং, প্রদত্ত তিনটি বলের লব্ধি একটি যুগ্মবল, যাহার ভ্রামকের মান $=\frac{1}{2}Pa$ একক।

প্রশ্নমালা 6.

1. যে যুগ্মবলের প্রতিটি বল 12 পা-ভার এবং বাহু 8 ফুট, সেই যুগ্মবলের সমতুল্য 6 ফুট বাহুবিশিষ্ট অপর একটি যুগ্মবলের প্রত্যেকটি বলের মান কত?

2. যে যুগ্মবলের প্রত্যেকটি বল 15 গ্রা.-ভার এবং বাহু 8 সে. মি. সেই যুগ্মবলের সমতুল্য অপর একটি যুগ্মবলের প্রতিটি বল 10 গ্রা.-ভার হইলে, উহার বাহুর পরিমাপ কত?

3. 40 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি যুগ্মবলের প্রতিটি বল 5 কি. গ্রা.-ভার। এই যুগ্মবল ও উহার সমতলে নির্দিষ্ট দিকে ও নির্দিষ্ট বিন্দুতে সক্রিয় 10 কি. গ্রা.-ভার বলের লব্ধি কত? [W. B. H. S. 1969]

4. একটি যুগ্মবল ও একটি বলের লব্ধি 9 কি. গ্রা.-ভার। যুগ্মবলটির ভ্রামক যদি 36 সে. মি.-কি. গ্রা.-ভার হয়, তবে প্রদত্ত বলটি হইতে কত দূরে ঐ লব্ধি ক্রিয়া করিবে ?

5. 3, 5, 3 ও 5 পাউণ্ড-ভারের চারিটি বল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু চারিটি বরাবর ক্রিয়াশীল হইলে, উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

6. 1, 2, 3, 4, $2\sqrt{2}$ একক মানবিশিষ্ট বলসমূহ যথাক্রমে ABCD বর্গক্ষেত্রের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ বরাবর ক্রিয়াশীল। দেখাও যে, ঐ বলসমূহের লব্ধি একটি যুগ্মবল ; এবং ইহার ভ্রামক নির্ণয় কর। **[W. B. H S 1965]**

7. ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর পরিমাপ 2 ফুট। $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ বরাবর যথাক্রমে 1, 2, 8, 5, $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ পাউণ্ড-ভার বিশিষ্ট বলসমূহ ক্রিয়াশীল। ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর। **[W. B. H. S. 1970]**

8. ABCD বর্গক্ষেত্রের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CA}$ বরাবর যথাক্রমে, 1, 2, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ এর সমানুপাতী বলসমূহ ক্রিয়াশীল। দেখাও যে, উহাদের লব্ধি একটি যুগ্মবল ; এবং ঐ যুগ্মবলের ভ্রামক নির্ণয় কর। **[W. B. H. S 1975]**

9. ABCD আয়তক্ষেত্রের $\overline{AC}$ কর্ণের দৈর্ঘ্য 13 মিটার এবং $\overline{BC}$ বাহুর দৈর্ঘ্য 5 মিটার। $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, ও $\overrightarrow{AC}$ বরাবর যথাক্রমে 4, 10, 16, 5, 13 কিলোগ্রাম-ভার বলসমূহ ক্রিয়াশীল হইলে, দেখাও যে, উহারা একটি যুগ্মবল গঠন করে ; এবং ইহার ভ্রামক বাহির কর।

10. ABCD রম্বসের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 মিটার এবং $\angle BAD = 60°$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ বরাবর যথাক্রমে, 3, 5, 3, 5 কি.-গ্রা-ভার বল ক্রিয়া করিলে, উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

11. ABCDEF সুষম ষড়ভুজের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FE}$ বরাবর যথাক্রমে, 5, 8, 5, 8 কি. গ্রা.-ভার এর বল ক্রিয়াশীল। $\overrightarrow{CD}$ ও $\overrightarrow{FA}$ বরাবর কিরূপ সমান মানের বল ক্রিয়া করিলে, এই ছয়টি বল সাম্যাবস্থায় থাকিবে ?

12. ABCD বর্গক্ষেত্রের $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বরাবর প্রতিটি 3 পাউণ্ড-ভারের সমান বল এবং $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{CB}$ বরাবর প্রতিটি $7\frac{1}{2}$ পাউণ্ড-ভারের সমান বল ক্রিয়াশীল। বর্গক্ষেত্রটির প্রত্যেক বাহু যদি 10 ফুট হয়, তবে যে যুগ্মবল উহাদের সমতলে প্রয়োগ করিলে, বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকিবে, তাহা নির্ণয় কর।

13. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র, যাহার প্রত্যেক বাহুর পরিমাপ a. একক। $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$, $\vec{AC}$, $\vec{BD}$ বরাবর যথাক্রমে, 1, 2, 3, 5, P, Q একক বলসমূহ ক্রিয়াশীল। এই বলসমূহ একটি যুগ্মবল গঠন করিলে, P ও Q এর মান ও যুগ্মবলের ভ্রামক বাহির কর।

14. ABCD আয়তক্ষেত্রের $\overline{AB}=4$ সে. মি. এবং $\overline{BC}=2$ সে. মি.। $\vec{AC}$, $\vec{BD}$, $\vec{DC}$, $\vec{DA}$ বরাবর যথাক্রমে $15\sqrt{5}$, $20\sqrt{5}$, P ও Q গ্রাম-ভার বলসমূহ ক্রিয়াশীল। ইহারা একটি যুগ্মবল গঠন করিলে, P ও Q এর মান ও যুগ্মবলের ভ্রামক বাহির কর।

15. ABCD আয়তক্ষেত্রের $\overline{AB}=10$ সে. মি. ; $\overline{BC}=8$ সে. মি.। $\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$ বরাবর প্রতিটি 5 কি. গ্রা.-ভারের বল ক্রিয়াশীল। $\vec{AD}$ ও $\vec{CB}$ বরাবর কি পরিমাণ বল প্রযুক্ত হইলে, বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকিবে ?

16. ABCD আয়তক্ষেত্রের $\overline{AB}=7$ মি. ; $\overline{AD}=6$ মি.। $\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$ বরাবর প্রতিটি 6 কি. গ্রা -ভারের বল এবং $\vec{AD}$ ও $\vec{CB}$ বরাবর প্রতিটি 8 কি. গ্রা.-ভারের বল ক্রিয়াশীল। A ও C বিন্দুতে সক্রিয় লব্ধি দ্বয়ের লম্ব-দূরত্ব বাহির কর।

17. ABCD আয়তক্ষেত্রের $\overline{AB}=\overline{CD}=l$; $\overline{BC}=\overline{AD}=m$. $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$ বরাবর যথাক্রমে P, Q, P, Q চারিটি বল প্রযুক্ত। A ও C এতে প্রযুক্ত দুই দুইটি বলের লব্ধিদ্বয়ের লম্ব-দূরত্ব বাহির কর।

18. ABC ত্রিভুজের $\overline{AB}=8$ মি., $\overline{BC}=17$ মি., $\overline{CA}=15$ মি.। এই ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু তিনটি দ্বারা তিনটি বল মানে, ক্রিয়ারেখায়ও দিকে নির্দেশিত। দেখাও যে, এই বল তিনটি একটি যুগ্মবল গঠন করে। ইহার ভ্রামক বাহির কর।

19. ABC ত্রিভুজের $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ ও $\vec{AB}$ বরাবর যথাক্রমে $K.\overline{BC}$; $K.\overline{CA}$ ও $K.\overline{AB}$ একক বল ক্রিয়াশীল। দেখাও যে, এই তিনটি বল একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $2K\triangle$, যেখানে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\triangle$.

20. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ, যাহার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a ; D, E, F বিন্দু $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ কে যথাক্রমে, 5 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে। P মানের তিনটি বল D, E, F বিন্দুতে বাহুগুলির উপর লম্বভাবে ও ত্রিভুজের বহির্দিকে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, বলগুলি Pa মানের ভ্রামক বিশিষ্ট একটি যুগ্মবলের সমতুল্য।

[C. U. P. 1977]

21. ABCD চতুর্ভুজের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ বরাবর যথাক্রমে 24, 10, 28, 30 কি. গ্রা.-ভার বিশিষ্ট বল ক্রিয়াশীল, যেখানে $\overline{AB}=120$ সে মি., $\overline{BC}=50$ সে.মি., $\overline{CD}=140$ সে. মি., $\overline{AD}=150$ সে. মি.। প্রমাণ কর যে, এই চারিটি বল একটি যুগ্মবল গঠন করে ; এবং ঐ যুগ্মবলের ভ্রামক বাহির কর, যখন $\angle ABC=90^\circ$.

22. একটি যুগ্মবলের ভ্রামক G এবং উহার বলদ্বয়ের প্রয়োগ বিন্দু A ও B. এই বল দুইটির ক্রিয়ারেখা উহাদের সমতলে একই দিকে 90° কোণে আবর্তিত হইলে, নূতন যুগ্মবলটির ভ্রামক H হয়। বল দুইটি যদি $\overline{AB}$ এর লম্বভাবে ক্রিয়া করে, তবে দেখাও যে, এই যুগ্মবলটির ভ্রামক $\sqrt{G^2+H^2}$ হইবে।

23. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের স্পর্শক বরাবর একই ক্রমে A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R বল ক্রিয়াশীল। উহারা একটি যুগ্মবল গঠন করিলে, প্রমাণ কর যে,

$$P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C.$$

24. ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 একক। $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ বরাবর a, b, c, d একক বল এবং $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{DB}$ বরাবর $p\sqrt{2}$ ও $q\sqrt{2}$ একক বল যথাক্রমে ক্রিয়াশীল। যদি $p+q=c-a$ এবং $p-q=d-b$ হয়, তবে দেখাও যে, বলসমূহ একটি যুগ্মবল গঠন করে, যাহার ভ্রামক $a+b+c+d$ একক।

25. ABCD আয়তক্ষেত্রের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ বরাবর যথাক্রমে $p.\overline{AB}$, $q.\overline{BC}$ $r.\overline{CD}$ ও $s.\overline{DA}$ বলসমূহ ক্রিয়াশীল। দেখাও যে, এই বলসমূহ একটি যুগ্মবল গঠন করিবার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হইল : $p=r$ এবং $q=s$. **[W. B. H. S. 1963]**

ANSWERS. (প্রশ্নমালা 6)

1. 16 পা.-ভার। 2. 12 সে. মি.। 3. 10 কি. গ্রা.-ভার ; প্রদত্ত বল হইতে 20 সে. মি. দূরে এবং ঐ বলের সমান্তরাল এবং একই দিকে। 4. 4 সে. মি. দূরে। 5. একটি যুগ্মবল, যাহার ভ্রামক $=8a$ ফুট-পা.-ভার ; a ফুট = বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য। 6. $5a$ একক ; a একক = বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য। 7. একটি যুগ্মবল, যাহার ভ্রামক = 16 ফুট-পা.-ভার। 8. $\overline{AB}=a$ এবং $\overrightarrow{AB}$ বরাবর প্রদত্ত বল $=P$ হইলে, ভ্রামক $=2aP$ একক। 9. আঙ্কিক মান 40 মি.-গ্রা.-ভার। 10. একটি যুগ্মবল, যাহার ভ্রামক $16\sqrt{3}$ মিটার-কি. গ্রা.-ভার। 11. 3 কি. গ্রা.-ভার। 12. নির্ণেয় যুগ্মবলের ভ্রামক = 4 ফুট-পা.-ভার। 13. $P=\frac{5}{2}\sqrt{2}$; $Q=\frac{1}{2}\sqrt{2}$; ভ্রামক $=11a/2$ একক। 14. $P=10$, $Q=35$; ভ্রামক = 60 সে.মি.-গ্রা.-ভার। 15. প্রতিটি বল 4 কি. গ্রা.-ভার। 16. 2 মিটার। 17. $(Pm+Ql)/\sqrt{(P^2+Q^2)}$. 18. 120 মিটার-কি. গ্রা.-ভার, যদি $\overrightarrow{BC}=17$ কি. গ্রা.-ভার হয়। 21. 45·6 মিটার-কি. গ্রা.-ভার।

সপ্তম অধ্যায়

ভারকেন্দ্র

(Centre of Gravity)

7-1. উপস্থাপন :

নিউটনের অভিকর্ষ সূত্র অনুযায়ী প্রত্যেক বস্তুকণাকে পৃথিবী তাহার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে। পৃথিবী প্রত্যেক বস্তুকণাকে তাহার কেন্দ্রের দিকে যে বলের সাহায্যে আকর্ষণ করে, তাহাকে অভিকর্ষজ বল বলা হয়। যে অভিকর্ষজ বল দ্বারা একটি বস্তুকণাকে পৃথিবী তাহার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে, তাহাকে ঐ বস্তুকণার **ভার** (**weight**) বলা হয়। সুতরাং, ভার একপ্রকার বলের নামান্তর। বস্তুকণার ভার উহার **ভর** (**mass**) এর সমানুপাতিক।

যে কোন বস্তুকে অসংখ্য বস্তুকণার সমন্বয়ে গঠিত কল্পনা করা যাইতে পারে। পৃথিবীর আকৃতির তুলনায় যে কোন বস্তুর আকৃতি অতীব ক্ষুদ্র। সেইজন্য, একটি বস্তুর বস্তুকণাসমূহের ভারসমূহকে সমান্তরাল বল হিসাবে ধরা যাইতে পারে। এই সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে।

একটি বস্তুর আকার ও আকৃতি (পৃথিবীর সাপেক্ষে অতীব ক্ষুদ্র) যতক্ষণ অপরিবর্তিত থাকিবে, ততক্ষণ বস্তুটিকে যেভাবেই রাখা হউক না কেন, বস্তুটির বস্তুকণাগুলির ভারসমূহের লব্ধি ঐ বস্তুটির সাপেক্ষে যে বিন্দুতে ক্রিয়া করিবে, তাহাকে ঐ বস্তুটির **ভারকেন্দ্র** বলা হইবে। একটি বস্তুর ভারকেন্দ্রকে সংক্ষেপে **C. G.** দ্বারা সূচিত করা হয়। একটি বস্তুর ভারকেন্দ্র ঐ বস্তুর মধ্যেও থাকিতে, অথবা, উহার বাহিরেও থাকিতে পারে।

নির্দিষ্ট আকার ও আকৃতি বিশিষ্ট একটি বস্তুর ভারকেন্দ্র একাধিক থাকিতে পারে না। যদি সম্ভবপর হয়, মনে করি, নির্দিষ্ট আকার ও আকৃতি বিশিষ্ট কোন একটি বস্তুর ভারকেন্দ্র G ও H, দুইটি বিভিন্ন বিন্দু। তাহা হইলে, বস্তুটির ভার G ও H বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইবে। সুতরাং, বস্তুটির ভার $\overline{GH}$ বরাবর ক্রিয়া করিবে। এখন, বস্তুটিকে ঘুরাইয়া যদি এরূপভাবে রাখা হয়, যেন $\overline{GH}$ অনুভূমিক রেখা বরাবর হয়, তাহা হইলে, বস্তুটির ভার উল্লম্বদিকে, অর্থাৎ, $\overline{GH}$ এর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করিবে। সুতরাং, ইহার ক্রিয়া রেখা তখন $\overline{GH}$ বরাবর থাকিতে পারে না। সুতরাং, একটি বস্তুর ভারকেন্দ্র কেবলমাত্র একটি থাকিবে।

বস্তুর ভারকেন্দ্র পৃথিবীর আকর্ষণের উপর নির্ভরশীল। কোন একটি বস্তুকে যদি পৃথিবীর আকর্ষণের বাহিরে কোন এক স্থানে নিয়ে যাওয়া সম্ভব হয়, তবে সেই স্থানে ঐ বস্তুর ভারকেন্দ্রের ধারণা অর্থহীন হইবে। কিন্তু, সেখানে ঐ বস্তুর ভরের কোন পরিবর্তন নাও হইতে পারে।

কোন বস্তুর বিভিন্ন কণাগুলির উপর উহাদের ভরের অনুপাতে সদৃশ সমান্তরাল বল প্রযুক্ত হইলে, ঐ বলসমূহের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দুকে বস্তুটির **ভরকেন্দ্র (Centre of mass)** বলা হইবে এবং ইহাকে **C. M.** দ্বারা সূচিত করা হইবে। একটি বস্তুর কণাসমূহের উপর ক্রিয়াশীল উহাদের ভরের সমানুপাতিক অভিকর্ষজ বলসমূহের লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দুই বস্তুটির ভারকেন্দ্র। সুতরাং, একই স্থানে একটি সসীম (পৃথিবীর সাপেক্ষে অতিশয় ক্ষুদ্র) বস্তুর ভারকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্র একই বিন্দু হইবে। কিন্তু, এমন স্থান থাকিতে পারে, যেখানে কোনও অভিকর্ষজ বল নাই। সেইস্থানে বস্তুটির ভার থাকিবে না ; সেইজন্য উহার ভারকেন্দ্রও থাকিবে না ; কিন্তু উহার ভরকেন্দ্র থাকিবে। সুতরাং, কোন একটি বস্তুর ভারকেন্দ্র নাও থাকিতে পারে ; কিন্তু, উহার ভরকেন্দ্র থাকিবেই।

7-2. একই সমতলে অবস্থিত বস্তুকণাসমূহের ভারকেন্দ্র নির্ণয়।

সহায়িকা প্রতিজ্ঞা (Lemma) :

একই সমতলে অবস্থিত বস্তুকণাসমূহের ভর ও অবস্থান দেওয়া থাকিলে, উহাদের ভরকেন্দ্র (বা, ভারকেন্দ্র) ঐ সমতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইবে।

[(i) **ভরকেন্দ্র** নির্ণয়ে, সদৃশ সমান্তরাল বলগুলি : Km_1, Km_2, Km_3, ..., Km_n, যেখানে K একটি ধ্রুবক, এবং, m_1, m_2, m_3, ..., m_n, বস্তুকণাগুলির ভর।

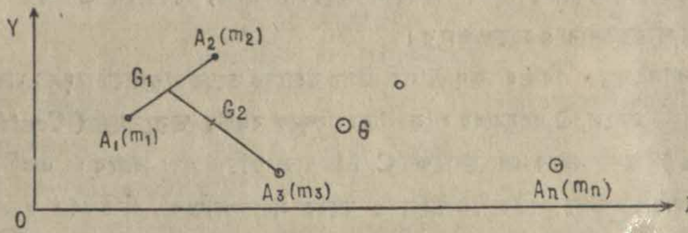
(ii) **ভারকেন্দ্র** নির্ণয়ে, সদৃশ সমান্তরাল বলগুলি : m_1g, m_2g, m_3g, ..., m_ng, যেখানে $g=$ অভিকর্ষজ ত্বরণ।]

মনে করি, কোনও এক প্রদত্ত সমতলের নির্দিষ্ট A_1, A_2, A_3, ..., A_n বিন্দুতে, নির্দিষ্ট m_1, m_2, m_3, ..., m_n ভরের বস্তুকণাগুলি অবস্থিত।

(i) **ভরকেন্দ্র নির্ণয় :**

এখানে, A_1 বিন্দুতে Km_1 এবং A_2 বিন্দুতে Km_2 পরিমাণের সদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি সক্রিয়। ইহাদের লব্ধির মান $K(m_1+m_2)$; এই লব্ধিটি উপরোক্ত বল

দুইটির সহিত সদৃশ, এবং ইহার ক্রিয়াবিন্দু $\overline{A_1A_2}$ রেখার উপরিস্থ G_1 বিন্দুটি, যেখানে, $m_1 \cdot \overline{A_1G_1} = m_2 \cdot \overline{G_1A_2}$.



∴ G_1 একটি নির্দিষ্ট বিন্দু, (ঐ সমতলে নির্দিষ্ট অক্ষ $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ এর সাপেক্ষে)।

এখন, G_1 বিন্দুতে $K(m_1+m_2)$ এবং A_3 বিন্দুতে Km_3 সদৃশ বল দুইটির লব্ধি = সদৃশ বল, $K\ (m_1+m_2+m_3)$, যাহা $\overline{G_1A_3}$ রেখার উপরিস্থ G_2 বিন্দুতে সক্রিয়, যেখানে, $(m_1+m_2).\overline{G_1G_2} = m_3 \cdot \overline{G_2A_3}$.

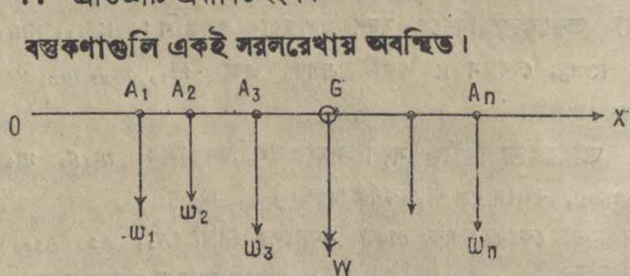
∴ G_2 ও একটি নির্দিষ্ট বিন্দু, ($\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ এর সাপেক্ষে)।

এইরূপে অগ্রসর হইয়া, আমরা নির্ণেয় ভরকেন্দ্র G বিন্দুটি পাইব ; এবং, এই G বিন্দুটিও প্রদত্ত সমতলের উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইবে।

(ii) অনুরূপ-ভাবে অগ্রসর হইয়া, দেখানো যাইবে যে, উপরোক্ত G বিন্দুটি প্রদত্ত বস্তুকণা সমূহের ভারকেন্দ্রও বটে।

∴ প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণিত হইল।

(a) বস্তুকণাগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত।



মনে করি, কতিপয় বস্তুকণা $\overrightarrow{OX}$ এর উপর A_1, A_2, A_3,… …, A_n বিন্দুতে অবস্থিত, যাহাদের ভার যথাক্রমে, w_1, w_2, w_3,… …, w_n এবং O হইতে উহাদের দূরত্ব যথাক্রমে, x_1, x_2, x_3,… …, x_n.